

Kinematik, Kinetik, Maschinendynamik

Joachim Venghaus*

8. September 2023

Inhaltsverzeichnis

I. Kinematik und Kinetik	5
1. Kinematik	5
1.1. Lage	5
1.2. Geschwindigkeit	6
1.3. Beschleunigung	7
1.3.0. Übung, Vorbemerkung zur Kinematik	11
1.3.1. Übung, Spurt von Null auf 100	12
1.3.2. Übung, Massenpunkt auf Kreisbahn	13
1.3.3. Übung, Kreuzung mit Motorrädern	14
1.3.4. Übung, Auto im Nebel	17
2. Kinetik	19
2.1. NEWTONsche Axiom	19
2.1.1. Übung, Hunt in den Schacht gefallen	21
2.1.2. Übung, schräger Schuss	24
2.2. Arbeit am Massenpunkt	27
2.3. Leistung am Massenpunkt	28
2.3.1. Übung, Schrägaufzug, Förderarbeit	32
2.4. Leistung bei stationären Bewegungen	34
2.4.1. Übung, Treideln eines Schiffs	35
2.4.2. Übung, Schrägaufzug mit Angabe der Leistung	36

*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund

2.5. Arbeitssatz für Massenpunkte	37
2.5.1. Übung, Reibung mit Arbeitssatz	38
3. Hauptsätze der Körperdynamik	40
3.1. Schwerpunktsatz	40
3.2. Impulsmomentensatz	41
3.2.1. Übung, Zweikörpersystem	44
3.2.2. Übung, gebremster Förderkorb	47
3.2.3. Übung, Wäscheschleuder	51
3.2.4. Übung, Förderkorb, Seilkräfte	54
3.2.5. Übung, Grinding disk goes berserk	57
3.3. Arbeit und Leistung bei rotatorischen Bewegungen	60
3.3.1. Übung, Schnittleistung	61
3.3.2. Übung, Arbeit an der Kurbel	62
3.3.3. Übung, Lokschuppendrehscheibe	63
3.4. Arbeitssatz bei Drehung um eine feste Achse	64
3.4.1. Übung, Wäscheschleuder mit Arbeitssatz	65
4. Stoßvorgänge	67
4.1. Völlig elastischer Stoß	70
4.2. Völlig unelastischer Stoß	70
4.3. Teilelastischer (realer) Stoß	70
4.4. Zusammenfassung	72
4.4.1. Übung, Stoß zweier Klötze	73
4.4.2. Übung, vier Eisenbahnwagen	76
II. Akustik	78
1. Schall	78
2. Schallfeldgrößen	80
2.1. Schalldruck	80
2.2. Schallschnelle	83
2.3. Schallkennimpedanz	84
2.4. Schallgeschwindigkeit	84
3. Energieinhalt des Schallfeldes	85
3.1. Schallintensität	85
3.2. Schalleistung	85
4. Schallausbreitung	86
4.1. Strahlertypen	86
4.2. Wellengleichung	89

5. Emission und Immission	89
6. Messung des Schallleistungspegels nach DIN 45635	90
III. Maschinendynamik	95
1. Kinematik der Schwingungen	95
1.1. Grundbegriffe	95
1.2. Graphische Darstellung von Schwingungsbewegungen	98
1.3. Überlagerung und Modulation	99
1.3.1. Überlagerung = Addition	99
1.3.2. Modulation = Multiplikation	102
2. Grundlagen des Massenausgleichs bei Kolbenmaschinen	105
2.1. Freischneiden des Kurbeltriebs	106
2.2. Schwerpunktsatz, Impulsmomentensatz	108
2.2.1. Kolben Schwerpunktsatz	108
2.2.2. Pleuel Schwerpunktsatz	109
2.2.3. Pleuel Impulsmomentensatz	109
2.3. Kinematik	109
2.4. Der ideale Einzylindermotor, nur eine Hoffnung	112
2.5. Mehrzylindermotoren	114
3. Kinetik der Schwingungen	119
3.1. Auf den schwingenden Körper wirkende Kräfte und Momente	121
3.1.1. Rückstellkräfte oder Rückstellmomente	121
3.1.2. Dämpfungskräfte und -momente	122
3.1.3. Äußere Erregerkräfte und -momente	123
3.2. Aufstellung von Bewegungsgleichungen	123
3.3. Mechanisch, elektrische Analogie	128
3.4. Freie ungedämpfte Schwingung	129
3.4.1. Übung 1	131
3.4.2. Übung 2	134
3.5. Freie gedämpfte Schwingung	138
3.6. Gedämpfte Schwingungen mit äußerer Anregung	141
3.7. Resonanz im dämpfungsfreien Fall	147
4. Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden	150
4.1. Aufstellen der Bewegungsgleichung	151
4.2. Bewegungsgleichung eines Geradeausschwingers mit N Freiheitsgraden	153
4.3. Struktur der Matrizen	156
4.4. Freie Schwingung eines ungedämpften Kettenschwingers mit zwei Freiheitsgraden	157

4.5. Generalisierung und Zusammenfassung	161
5. Parametererregte Schwingungen	165
5.1. Mathematische Betrachtung	168
5.2. Stabilitätsbetrachtung	170

Blauer Text beschreibt Hintergrundinformationen, Abschweifungen und Unsachliches. Gelegentlich sollen die blauen Passagen der Aufheiterung dienen und entsprechen den Anekdoten, die ich in einer Präsenzvorlesung erzählen würde.

Teil I.

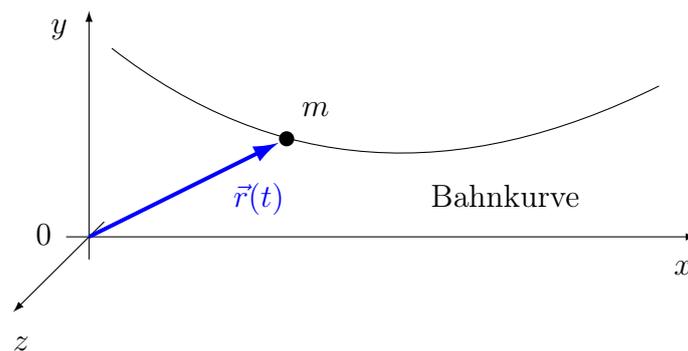
Kinematik und Kinetik

1. Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Bewegung, ohne nach Ursachen zu fragen.

1.1. Lage

Die Lage oder Position eines Massenpunktes ist durch seinen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ gegeben.

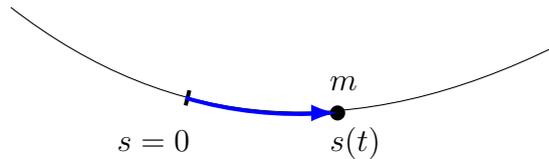


Ein Massenpunkt fährt entlang einer Bahnkurve. Dies kann wie bei einer Achterbahn eine Schienenbahn sein, es kann aber auch eine sich von allein einstellende Wurfbahn sein, die dann natürlich anders aussehen müsste.

$$(I.1.1) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Ortsvektor \vec{r} und Komponenten x , y , z sind naturgemäß zeitabhängig.

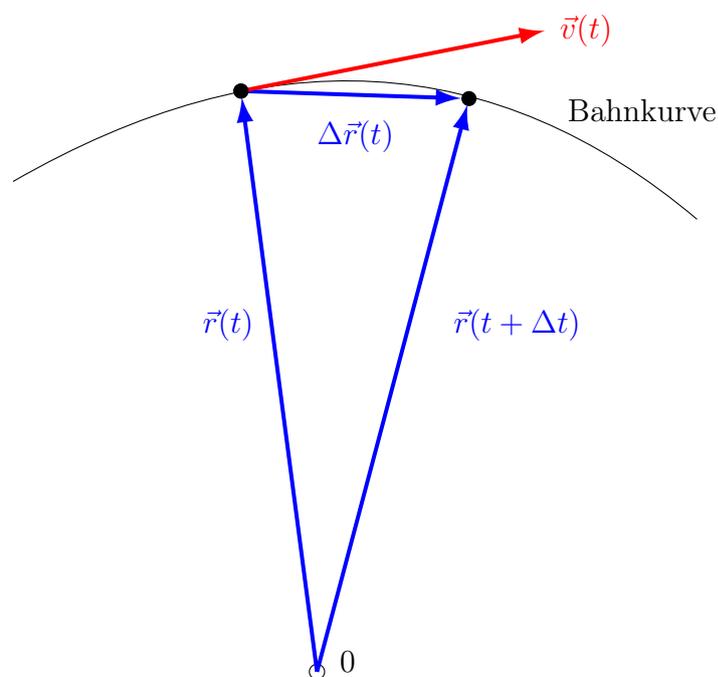
Bei vorgegebener Bahnkurve kann die Lage auch als Bogenlänge s (wie Strecke) angegeben werden.



$\dim [\vec{r}, x, y, z, s] = \text{Länge}, \quad \text{Einheit: m}$

1.2. Geschwindigkeit

Wir betrachten zwei Momentaufnahmen. Der Massenpunkt ist zum Zeitpunkt t an einer Position, beschrieben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Eine kurze Zeit Δt später ist er auf seiner Bahnkurve vorangekommen. Seine Lage wird jetzt beschrieben durch den neuen Ortsvektor $\vec{r}(t + \Delta t)$.



Der Vektor $\Delta\vec{r}(t)$ beschreibt das Vorankommen „in Luftlinie“. Es gilt $\vec{r}(t) + \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t)$

Auch die Geschwindigkeit wird vektoriell angetragen.

Wenn der Zeitunterschied Δt sehr kurz gewählt wird, dann gleichen sich die Richtungen von $\Delta \vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ an.

$$(I.1.2) \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

oder betragsmäßig bei festliegender Bahnstrecke

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$\dim[\vec{v}, v] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} tangiert überall die Bahnkurve. Beispiel eines Geschwindigkeitsvektors

$$(I.1.3) \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}$$

Spezialfälle

- $\vec{v}(t)$ habe konstante Richtung: Bewegung auf einer Geraden,
- $v(t) = |\vec{v}(t)| = \text{const.}$: Gleichförmige Bewegung, auch auf einer krummen Bahn.

1.3. Beschleunigung

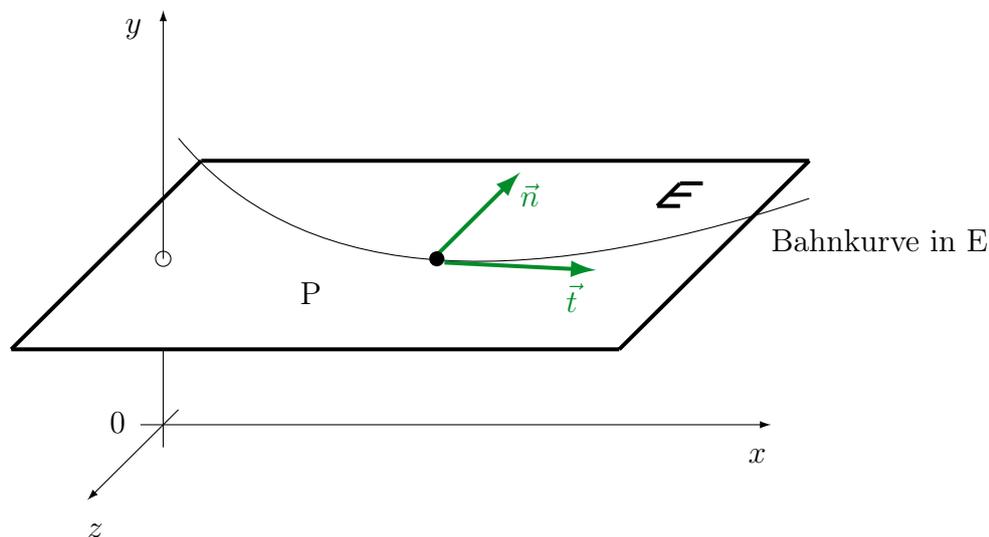
$$(I.1.4) \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$(I.1.5) \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

$$\dim[\vec{a}, a] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2}, \quad \text{Einheit: } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Spezialfälle

- $\vec{a} = \vec{0}$: Wenn $\vec{v} = \text{const.}$ nach Betrag und Richtung, dann ist die Bewegung immer geradlinig und gleichförmig.
- Ebene Bewegung:



Einführung von Einheitsvektoren \vec{t} und \vec{n} . Zur Erinnerung, Einheitsvektoren sind Richtungszeiger der Länge 1.

\vec{t} Tangente zur Bahnkurve in E

$\vec{n} \perp \vec{t}$ in E als Normalenvektor

Man kann herleiten, dass der Beschleunigungsvektor \vec{a} bei ebenen Bewegungen aus maximal zwei additiven Anteilen besteht.

$$(I.1.6) \quad \vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{\varrho} \cdot \vec{n},$$

mit ϱ : momentaner Krümmungsradius der Bahnkurve. Hierbei wird

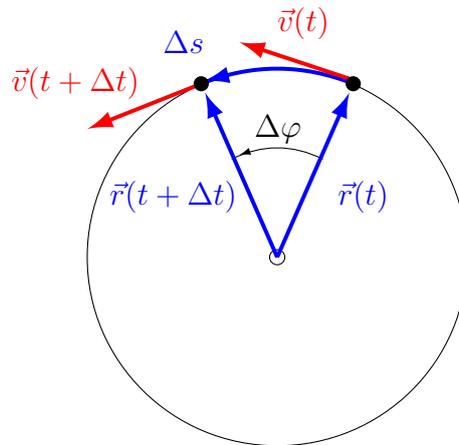
$\dot{v} \cdot \vec{t} = \vec{a}_t$ Tangentialbeschleunigung oder Bahnbeschleunigung und

$\frac{v^2}{\varrho} \cdot \vec{n} = \vec{a}_n$ Normal- oder Zentripetalbeschleunigung genannt.

Letztere ist immer auf den Krümmungsmittelpunkt gerichtet.

Zentripetalbeschleunigung mag sich seltsam anhören. Im allgemeinen Sprachgebrauch sind Zentrifugalbeschleunigungen bekannt. Letztere spüren wir ausschließlich im bewegten System (im Auto, im Karussell). Bei Kurvenfahrt werden wir nach außen gedrückt. Von außen betrachtet, also im ruhenden System, gibt es die Zentripetalbeschleunigung, die das Auto zum Kurvenmittelpunkt hin beschleunigt und so auf der Bahnkurve hält.

- Bewegung auf einer Kreisbahn.



$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\varphi}{dt}$$

Der Zusammenhang $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$ bzw. $ds = r \cdot d\varphi$ ist leicht über den Umfang eines Kreises nachvollziehbar: $U = r \cdot 2\pi$.

Wir kürzen ab:

$$v = r\omega$$

mit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ Winkelgeschwindigkeit

$$\dim[\omega] = \frac{1}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } \frac{1}{\text{s}} \quad \text{nicht Hz}$$

Analog zur Winkelgeschwindigkeit wird die Winkelbeschleunigung eingeführt

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad \dim[\alpha, \dot{\omega}, \ddot{\varphi}] = \frac{1}{\text{Zeit}^2}, \quad \text{Einheit: } \frac{1}{\text{s}^2}$$

Für Kreisbahnen gilt

$$(I.1.7) \quad a_t = \dot{v} = r\dot{\omega} = r\ddot{\varphi}$$

$$(I.1.8) \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

Ausflug

Angaben von Geschwindigkeiten auf Kreisbahnen

Drehzahl	n	$\frac{\text{U}}{\text{min}}$	Ereignisse pro Minute
Drehfrequenz	f	$\frac{\text{U}}{\text{s}} = \text{Hz}$	Ereignisse pro Sekunde
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$	Bogenmaß pro Sekunde

$$(I.1.9) \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx \frac{n}{10}.$$



1.3.0. Übung, Vorbemerkung zur Kinematik

Bekannt ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v; & \ddot{x} &= \dot{v} = a \\ \frac{dx}{dt} &= v; & \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} = a \end{aligned}$$

Vorgehensweise, wenn bei bekannter Beschleunigung Wege s bzw. x oder Geschwindigkeiten v bzw. \dot{x} gesucht sind: Integrieren.

$$\begin{aligned} v &= \int a \, dt = \int \ddot{x} \, dt = \dot{x} \\ x &= \int v \, dt = \int \dot{x} \, dt \end{aligned}$$

Typische Integration: $a = \text{const}$

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= \int a \, dt = at + c_1 \\ x &= \int v \, dt = \int (at + c_1) \, dt = \frac{a}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 werden durch Anfangsbedingungen bestimmt. ■

1.3.1. Übung, Spurt von Null auf 100

Ein Auto beschleunigt mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wie lange dauert der Spurt von 0 auf $v_E = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Welcher Weg d wird dabei zurückgelegt?

Lösung

$$\begin{array}{ll} & \ddot{x} = a = \text{const.} \\ & \\ & \text{2 mal integrieren} \quad \dot{x} = a t + c_1 \\ & \quad \quad \quad x = \frac{a}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \\ & \text{Anfangsbedingungen AB1} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \\ & \quad \quad \quad \text{AB2} \quad x(t=0) = 0 \\ & \text{Konstanten bestimmen} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \\ & \text{tatsächliche Bewegungsgleichungen} \quad \dot{x} = a t \\ & \quad \quad \quad x = \frac{a}{2} t^2 \\ & \text{Endbedingungen EB1} \quad \dot{x}(t=T) = v_E \\ & \quad \quad \quad \text{EB2} \quad x(t=T) = d = ? \\ & \text{Zeit } T \text{ bestimmen (hier EB1)} \quad T = \frac{v_E}{a} \\ & \quad \quad \quad T = \frac{28 \text{ m}}{2,4 \text{ s}} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 11,7 \text{ s} \\ & \text{gesuchte Größe bestimmen (hier EB2)} \quad d = \frac{a}{2} T^2 = \frac{a}{2} \frac{v_E^2}{a^2} = \frac{v_E^2}{2 a} \\ & \quad \quad \quad d = \frac{28^2}{2 \cdot 2,4} \frac{\text{m}^2 \text{ s}^2}{\text{s}^2 \text{ m}} = 164 \text{ m} \end{array}$$

Anfangsbedingungen vom Typ „Doppelnul“ führen wie bei der Balkenbiegung (dort sprachen wir von Randbedingungen) zu Konstanten, die Null sind.

Dieses Rechenschema wird in Zukunft immer wieder auftauchen. Es wird sehr verblüffend sein, dass es völlig unerheblich ist, welche Größen gegeben und welche gesucht sind; die Vorgehensweise ist immer gleich. ■

1.3.2. Übung, Massenpunkt auf Kreisbahn

Ein Massenpunkt bewegt sich mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ auf einer Kreisbahn mit Radius r . Zur Zeit $t = 0$ gilt $\dot{\varphi}(t = 0) = \omega_0$ und $\varphi(t = 0) = \varphi_0$. Wie groß muss $\ddot{\varphi}$ sein, damit der Massenpunkt nach einem Umlauf (2π) zum Stillstand kommt?

Lösung

$$\ddot{\varphi} = \alpha = \text{const.}$$

$$2 \text{ mal int.} \quad \dot{\varphi} = \alpha t + c_1$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{\varphi}(t = 0) = \omega_0$$

$$\text{AB2} \quad \varphi(t = 0) = \varphi_0$$

$$c_{1,2} \text{ best.} \quad c_1 = \omega_0, \quad c_2 = \varphi_0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{\varphi} = \alpha t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

$$\text{EB1} \quad \dot{\varphi}(t = T) = 0$$

$$\text{EB2} \quad \varphi(t = T) = \varphi_0 + 2\pi$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \quad 0 = \alpha T + \omega_0$$

$$T = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$\text{hier ist } \alpha \text{ gesucht, EB2} \quad \varphi_0 + 2\pi = \frac{\alpha}{2} T^2 + \omega_0 T + \varphi_0$$

$$2\pi = \frac{\alpha}{2} \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} - \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$2\pi = \frac{\omega_0^2 - 2\omega_0^2}{2\alpha}$$

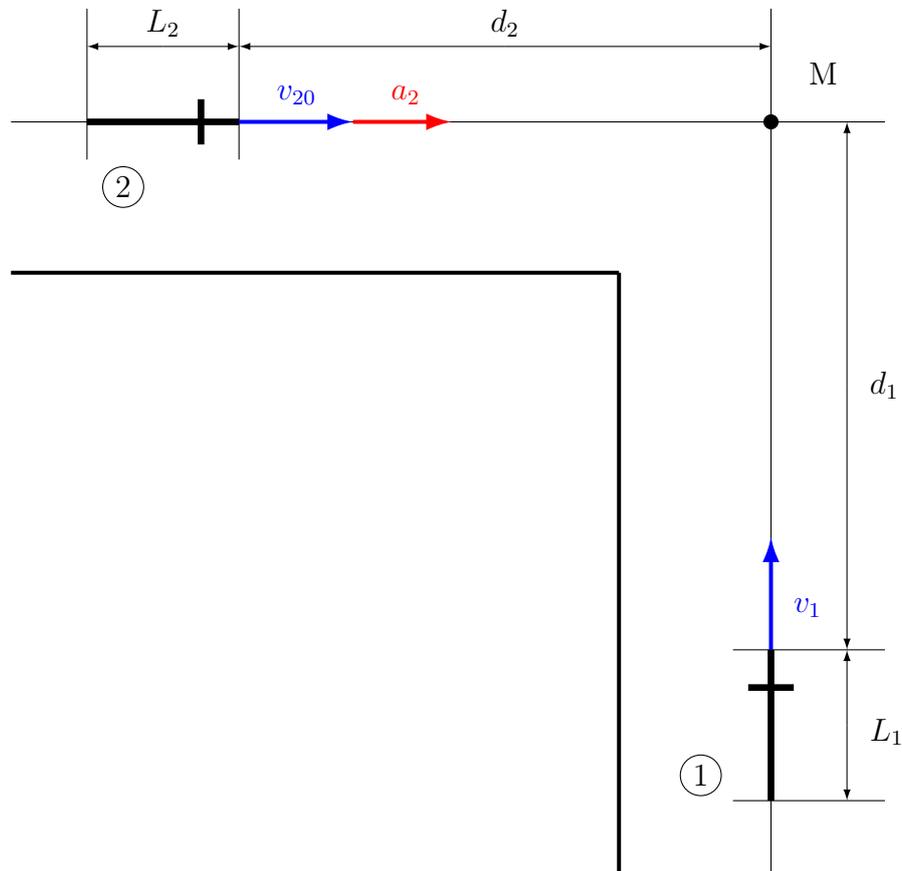
$$\alpha = \ddot{\varphi} = -\frac{\omega_0^2}{4\pi}$$

Eine negative Winkelbeschleunigung? Ja, der Massenpunkt wird abgebremst. ■

1.3.3. Übung, Kreuzung mit Motorrädern

Zwei Motorräder fahren auf eine Kreuzung zu, zum Zeitpunkt $t = 0$ seien ihre Positionen und Geschwindigkeiten bekannt.

Gegeben: $L_1, L_2, d_1, d_2, v_1 = \text{const.}, v_{20} = v_2(t = 0)$.



Mit welcher konstanten

- Verzögerung ($a_2 < 0$),
- Beschleunigung ($a_2 > 0$)

muss Motorrad ② reagieren, um eine Kollision zu vermeiden? Es wird sehr riskant gefahren. Jeweils ein Vorderrad berührt das Hinterrad des Anderen, ohne dass es zu einem Unfall kommt.

Lösung

Generell gilt für a) und b)

$$\begin{array}{ll}
 & \ddot{x}_2 = a_2 = \text{const.} & \ddot{x}_1 = 0 \\
 2 \text{ mal int.} & \dot{x}_2 = a_2 t + c_1 & \dot{x}_1 = 0 \cdot t + c_3 \\
 & x_2 = \frac{a_2}{2} t^2 + c_1 t + c_2 & x_1 = c_3 t + c_4 \\
 \text{AB1} & \dot{x}_2(t=0) = v_{20} & \dot{x}_1(t=0) = v_1 \\
 \text{AB2} & x_2(t=0) = 0 & x_1(t=0) = 0
 \end{array}$$

Die bis zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgelegten Wegstrecken sind ohne jeden Belang. Wir können fast immer die Anfangsbedingungen für Wege (oder Winkel) willkürlich auf Null setzen.

$$\begin{array}{lll}
 c_{1,2,3,4} \text{ best. AB1} & c_1 = v_{20} & c_3 = v_1 \\
 \text{AB2} & c_2 = 0 & c_4 = 0 \\
 \text{tats. BewGl.} & \dot{x}_2 = a_2 t + v_{20} & \dot{x}_1 = v_1 \\
 & x_2 = \frac{a_2}{2} t^2 + v_{20} t & x_1 = v_1 t
 \end{array}$$

a) Motorrad (2) bremst ab, so dass sein Vorderrad am Punkt M das Heck von Motorrad (1) berührt. Dies wird in den Endbedingungen festgehalten.

Wir werden feststellen, dass bei den Endbedingungen nicht immer Aussagen getroffen werden können. Anders als bei den Anfangsbedingungen dürfen wir bei den Endbedingungen auch gelegentlich Lücken lassen. Hier trifft das bei den Geschwindigkeiten zu. Wie schnell (2) am Punkt M bei diesem waghalsigen Manöver sein wird, wissen wir nicht. Grübeln Sie in solchen Fällen nicht unnötig lang, machen Sie aber auch keine wilden Annahmen. Nur weil Sie eine Geschwindigkeit nicht wissen, ist sie noch lange nicht Null.

$$\begin{array}{ll}
 \text{EB1} & \dot{x}_2(t=T) = ? & \dot{x}_1(t=T) = ? \text{ oder } v_1 \\
 \text{EB2} & x_2(t=T) = d_2 & x_1(t=T) = L_1 + d_1
 \end{array}$$

Auch wenn nach der Zeit T nicht gefragt wird, so ist der Schritt „ T bestimmen“ doch immer unverzichtbar. Wir suchen eine EB, die aussagekräftig ist und zu möglichst einfachen Ergebnissen führt (quadratische Gleichungen sind tunlichst zu meiden).

EB2 für $x_1(t = T)$ ist hier erfolgversprechend.

$$T \text{ best. hier EB2 für } x_1 \quad L_1 + d_1 = v_1 T$$

$$T = \frac{L_1 + d_1}{v_1}$$

Der letzte Schritt ist das Berechnen der gesuchten Größe. In diesem Fall ist es a_2 . Zur Verfügung stehen der Ausdruck für die Zeit T sowie die aussagekräftige EB2 für $x_2(t = T)$.

$$\text{ges. Größe best. hier } a_2 \quad d_2 = \frac{a_2}{2} T^2 + v_{20} T$$

$$\text{nach } a_2 \text{ auflösen} \quad \frac{a_2}{2} T^2 = d_2 - v_{20} T$$

$$\text{ausklammern} \quad a_2 = \frac{2}{T^2} (d_2 - v_{20} T)$$

$$T \text{ einsetzen} \quad a_2 = 2 \left(\frac{v_1}{L_1 + d_1} \right)^2 \cdot \left(d_2 - v_{20} \frac{L_1 + d_1}{v_1} \right)$$

Kein schönes Ergebnis aber ein Ergebnis.

b) Nun beschleunigt Motorrad (2) so, dass sein Hinterrad am Punkt M das Vorderrad von (1) berührt. Die EBen müssen dahin angepasst werden.

$$\text{EB1} \quad \dot{x}_2(t = T) = ? \quad \dot{x}_1(t = T) = ? \text{ oder } v_1$$

$$\text{EB2} \quad x_2(t = T) = L_2 + d_2 \quad x_1(t = T) = d_1$$

$$T \text{ best. hier EB2 für } x_1 \quad d_1 = v_1 T$$

$$T = \frac{d_1}{v_1}$$

$$\text{ges. Größe best. hier } a_2 \quad L_2 + d_2 = \frac{a_2}{2} T^2 + v_{20} T$$

$$\text{nach } a_2 \text{ auflösen} \quad \frac{a_2}{2} T^2 = L_2 + d_2 - v_{20} T$$

$$\text{ausklammern} \quad a_2 = \frac{2}{T^2} (L_2 + d_2 - v_{20} T)$$

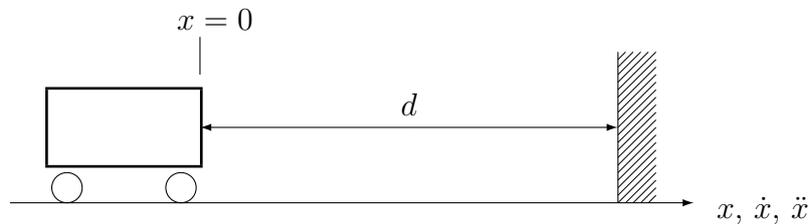
$$T \text{ einsetzen} \quad a_2 = 2 \left(\frac{v_1}{d_1} \right)^2 \cdot \left(L_2 + d_2 - v_{20} \frac{d_1}{v_1} \right)$$

■

1.3.4. Übung, Auto im Nebel

Wie schnell darf ein Auto mit einer Beschleunigung $a_0 = \text{const.}$ bei einer Sichtweite b fahren, um rechtzeitig vor einem Hindernis zum Stehen zu kommen. Die Reaktionszeit sei 0.

Geg: $a_0 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $b = 50 \text{ m}$, Ges: v_0



Lösung

$$\ddot{x} = a_0 = \text{const.}$$

$$2 \text{ mal int.} \quad \dot{x} = a_0 t + c_1$$

$$x = \frac{a_0}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{x}(t=0) = v_0 = ?$$

$$\text{AB2} \quad x(t=0) = 0$$

$$c_{1,2} \text{ best.} \quad c_1 = v_0, \quad c_2 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{x} = a_0 t + v_0$$

$$x = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t$$

$$\text{EB1} \quad \dot{x}(t=T) = 0$$

$$\text{EB2} \quad x(t=T) = b$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \quad T = -\frac{v_0}{a_0}$$

Eine negative Zeit? Abwarten, hier wird abgebremst, a_0 ist negativ. Alles wird gut. Nun wird die gesuchte Größe v_0 berechnet. Die aussagekräftige EB2 und der Ausdruck für T stehen zur Verfügung.

ges. Größe best., hier v_0 $b = \frac{a_0}{2} T^2 + v_0 T$

T einsetzen $b = \frac{a_0}{2} \frac{v_0^2}{a_0^2} - v_0 \frac{v_0}{a_0}$

$$b = -\frac{v_0^2}{2 a_0}$$

nach v_0 auflösen $v_0^2 = -2 b a_0$

$$v_0 = \sqrt{-2 b a_0}$$

$$v_0 = \sqrt{-2 \cdot 50 \cdot (-5)} \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$v_0 = 22,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



2. Kinetik

Bisher, in der Kinematik, wird nur beschrieben, wie ein Massenpunkt sich bewegt. Nach Ursachen wird nicht gefragt. Das ändert sich jetzt in der Kinetik. Wir sehen hier wieder einmal die Unsitte, unterschiedliche Dinge mit leicht verwechselbaren Begriffen zu versehen: konkav–konvex, Stalagmiten–Stalaktiten, Hypothermie–Hyperthermie, Pronation–Supination, insbesondere die Medizin spielt dieses Spiel mit großer Wonne.

Kinetik beschreibt den Zusammenhang zwischen Kräften und Beschleunigungen. Für bewegte Massenpunkte gilt das

2.1. NEWTONsche Axiom

Axiome sind grundlegende Gesetze, die nicht bewiesen werden können aber empirisch abgesichert sind. Sie gelten so lange, bis sie widerlegt werden

$$(I.2.1) \quad \vec{F} = m \vec{a}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Die Masse m ist im Rahmen der klassischen Mechanik eine Proportionalitätskonstante

Dieses Axiom wurde 1687 von Sir Isaac NEWTON in seinem bahnbrechenden Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* aufgestellt und überdauerte unangefochten genau 228 Jahre. Im Jahr 1915 wurde es von Albert EINSTEIN in seiner speziellen Relativitätstheorie widerlegt. Die Masse ist keineswegs eine Konstante. Bewegt sich ein Körper oder Massenpunkt sehr schnell (nahe Lichtgeschwindigkeit), so nimmt seine Masse dramatisch zu. Bei Erreichen der Lichtgeschwindigkeit wäre die Masse des kleinsten Staubkorns unendlich. Somit ist sichergestellt, dass kein massebehafteter Körper Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Die Kräfte die notwendig wären, ihn auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen, müssten ebenfalls unendlich sein. Für uns ändert sich aber nichts. Wir betreiben NEWTONsche oder klassische Mechanik. Die Raserei der relativistischen Mechanik überlassen wir Anderen. So schnell können und wollen wir gar nicht.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, gelten die unwiderlegten Axiome der Statik

$$(I.2.2) \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Gleichung (I.2.1) lautet im kartesischen (x, y, z) Koordinatensystem

$$(I.2.3) \quad X = m \ddot{x}, \quad Y = m \ddot{y}, \quad Z = m \ddot{z}$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ gilt auch $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$.

Gleichung (I.2.3) in natürlicher Zerlegung bei Bewegungen auf Kreisbahnen lautet

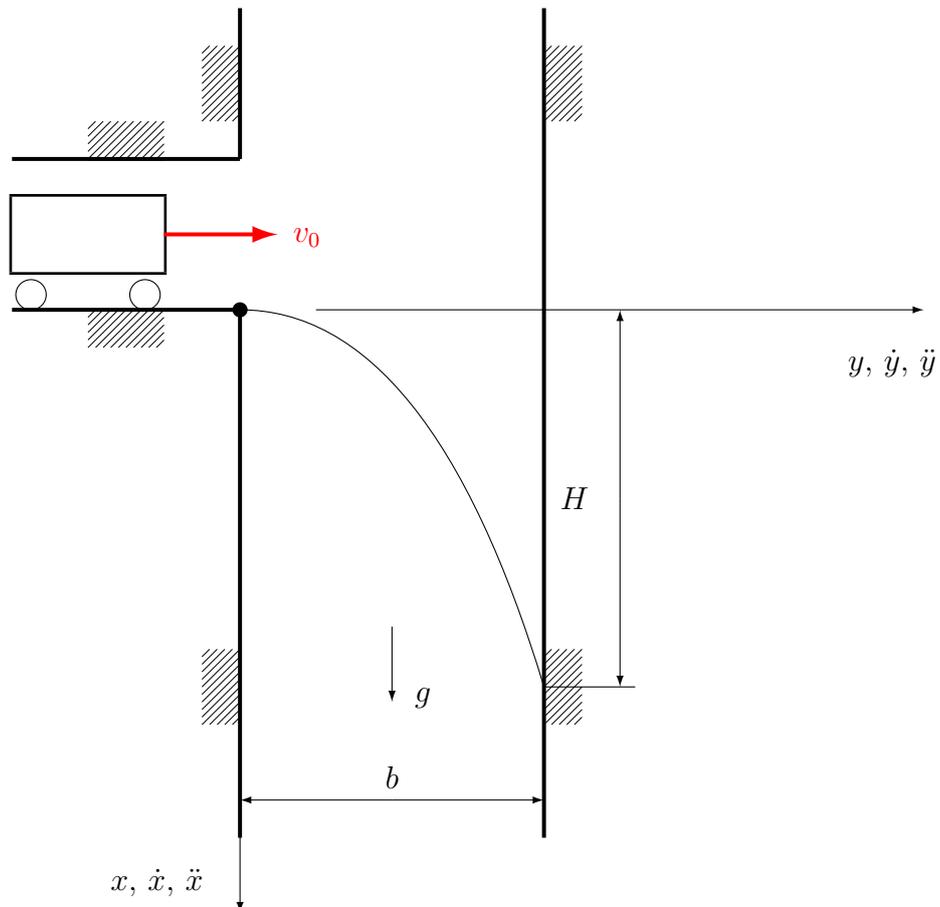
$$(I.2.4) \quad \begin{aligned} F_t &= m r \dot{\omega} = m r \ddot{\varphi} \\ F_n &= m r \omega^2 = m r \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$



2.1.1. Übung, Hunt in den Schacht gefallen

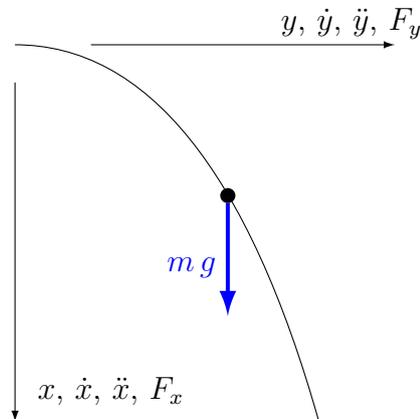
Ein Hunt (Förderwagen) ist in einen seigeren (senkrechten) Schacht gefallen. In einem Abstand H unter der Hängebank (Stollensohle) hat er an der gegenüberliegenden Schachtausmauerung Spuren hinterlassen. Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Wagen in den Schacht gerollt sein? Man betrachte den Wagen als Massenpunkt von beliebiger Masse m , der sich zunächst auf der y -Achse bewegt und dann abstürzt.

Geg.: $H = 20$ m, $b = 4,5$ m, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ges.: v_0 .



Lösung

Anwendung des NEWTONSchen Grundgesetz auf den frei fliegenden Massenpunkt. Welche Kräfte wirken?



Ist $m g$, die Gewichtskraft, wirklich die einzige Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt? Erwarten Sie etwa eine Kraft, die in y -Richtung den Massenpunkt quer durch den Schacht zieht? Wo soll die herkommen? Hauer Karl, der den Wagen schob, konnte zum Glück an der Kante stehen bleiben. Wer soll jetzt noch schieben? Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.

Es liegt eine zweidimensionale Bewegung vor. Das NewtonGG muss daher für beide Richtungen aufgestellt werden.

Wichtig ist nun, dass wir die kinematischen Größen und die kinetischen Größen in jeweils gleicher Richtung positiv annehmen. Hier ist dies erkennbar an der Achsenbeschriftung $x, \dot{x}, \ddot{x}, F_x$ und $y, \dot{y}, \ddot{y}, F_y$.

$$\begin{array}{ll}
 m \ddot{x} = m g & m \ddot{y} = 0 \\
 \ddot{x} = g = \text{const.} & \ddot{y} = 0 \\
 \text{2 mal int.} & \dot{x} = g t + c_1 & \dot{y} = c_3 \\
 & x = \frac{g}{2} t^2 + c_1 t + c_2 & y = c_3 t + c_4 \\
 \text{AB1} & \dot{x}(t=0) = 0 & \dot{y}(t=0) = v_0 \\
 \text{AB2} & x(t=0) = 0 & y(t=0) = 0
 \end{array}$$

Da der Stollen totsöhlig (horizontal) verläuft, gibt es keine Anfangsgeschwindigkeit in x -Richtung. Bereits zurückgelegte Wege zu Beginn der Katastrophe sind uninteressant und können willkürlich zu Null gesetzt werden.

$c_{1,2,3,4}$ best.	$c_1 = 0$	$c_3 = v_0$
	$c_2 = 0$	$c_4 = 0$
tats. BewGl.	$\dot{x} = g t$	$\dot{y} = v_0$
	$x = \frac{g}{2} t^2$	$y = v_0 t$
EB1	$\dot{x}(t = T) = ?$	$\dot{y}(t = T) = ?$ oder v_0
EB2	$x(t = T) = H$	$y(t = T) = b$

Erneut wissen wir nicht, wie die Geschwindigkeiten beim Einschlag in die Schachtwand sind. Bei der y -Richtung könnte man darauf kommen, dass v_0 ansteht. Notwendig ist diese Erkenntnis hingegen nicht.

Jetzt muss der Zeitpunkt T bestimmt werden. Wieder vermeiden wir EBen für Gleichungen, bei denen t quadratisch auftaucht. EB2 für y ist hervorragend geeignet.

$$T \text{ bestimmen} \quad b = v_0 T$$

$$T = \frac{b}{v_0}$$

Mit der verbliebenen aussagekräftigen EB2 für x und der Zeit T wird abschließend die gesuchte Größe v_0 berechnet

$$\text{ges. Größe best.} \quad H = \frac{g}{2} T^2$$

$$H = \frac{g}{2} \frac{b^2}{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{g}{2} \frac{b^2}{H}$$

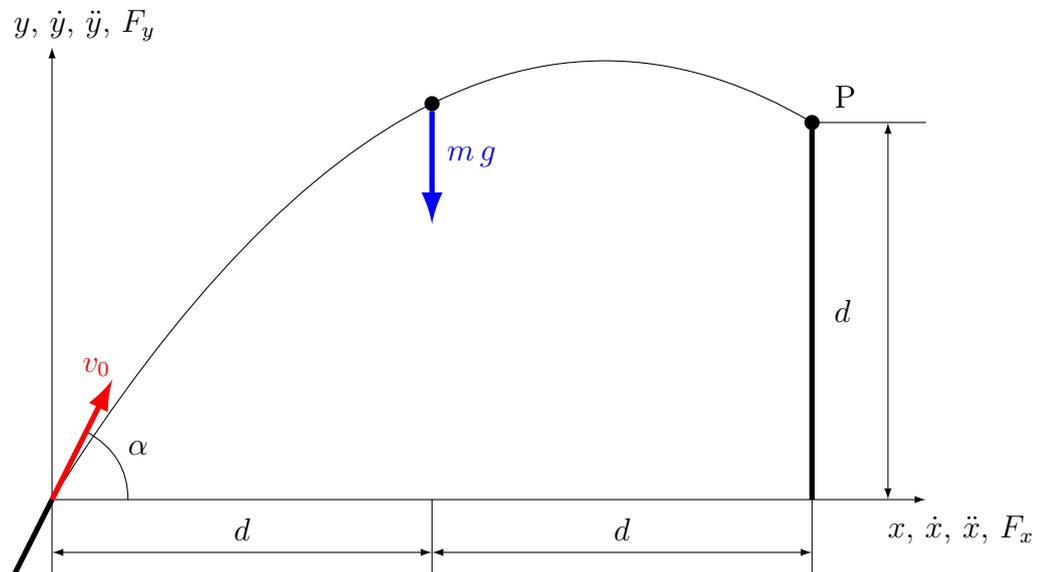
$$v_0 = \sqrt{\frac{g b^2}{2 H}}$$

$$v_0 = 2,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tja, mit etwa $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ war Hauer Karl unerlaubterweise schneller als mit Schrittgeschwindigkeit unterwegs. Das gibt Mecker vom Obersteiger (Grubenaufseher). ■

2.1.2. Übung, schräger Schuss

Mit einem Geschütz mit vorgegebener Elevation α soll auf den Punkt P geschossen werden. Welche Mündungsgeschwindigkeit v_0 ist notwendig?



Geg.: d, g, α, m (beliebig), kein Luftwiderstand. Ges.: v_0

Die Frage erscheint ungewöhnlich und praxisfremd. Realistischer ist doch die Frage, wie hoch man zielen muss, denn die Munition und damit das v_0 dürfte doch gegeben sein. Leider ist diese Aufgabenstellung analytisch nicht lösbar. Sie können spaßeshalber versuchen, das Ergebnis nach α aufzulösen. Das ist hoffnungslos, wir bekommen eine transzendente Gleichung, sie ist nicht auflösbar. Lediglich Iterationen sind möglich (so etwas nennt man dann Maschinengewehr). Also bleiben wir bei der Suche nach v_0

Lösung

Anwendung des NEWTONschen Grundgesetz auf das frei fliegende Projektil. Erneut liegt eine zweidimensionale Bewegung vor. Das NewtonGG muss daher für beide Richtungen aufgestellt werden.

$$\begin{array}{ll}
 m \ddot{x} = 0 & m \ddot{y} = -m g \\
 \ddot{x} = 0 = \text{const.} & \ddot{y} = -g = \text{const.} \\
 \text{2 mal int.} & \dot{x} = c_1 & \dot{y} = -g t + c_3 \\
 & x = c_1 t + c_2 & y = -\frac{g}{2} t^2 + c_3 t + c_4 \\
 \text{AB1} & \dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha & \dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha \\
 \text{AB2} & x(t=0) = 0 & y(t=0) = 0
 \end{array}$$

Hier muss die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit in ihre x - und y -Komponente zerlegt werden. Der bisher zurückgelegte Weg z.B. der im Lauf ist erneut uninteressant. Der betrachtete Schuss beginnt für uns, wenn das Projektil den Lauf verlassen hat. Die Gaskräfte, die das Projektil ausgestoßen haben, wirken schon nicht mehr.

$$\begin{array}{ll}
 c_{1,2,3,4} \text{ best.} & c_1 = v_0 \cos \alpha & c_3 = v_0 \sin \alpha \\
 & c_2 = 0 & c_4 = 0 \\
 \text{tats. BewGl.} & \dot{x} = v_0 \cos \alpha & \dot{y} = -g t + v_0 \sin \alpha \\
 & x = v_0 \cos \alpha t & y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin \alpha t \\
 \text{EB1} & \dot{x}(t=T) = ? & \dot{y}(t=T) = ? \\
 \text{EB2} & x(t=T) = 2 d & y(t=T) = d
 \end{array}$$

Erneut wissen wir nicht, wie die Geschwindigkeiten beim Einschlag in Punkt P sind. Jetzt muss der Zeitpunkt T bestimmt werden. Wieder vermeiden wir EBen für Gleichungen, bei denen t quadratisch auftaucht. EB2 für x ist geeignet.

$$T \text{ bestimmen} \quad 2 d = v_0 \cos \alpha T$$

$$T = \frac{2 d}{v_0 \cos \alpha}$$

Mit der verbliebenen aussagekräftigen EB2 für y und der Zeit T wird abschließend die gesuchte Größe v_0 berechnet.

$$d = -\frac{g}{2} T^2 + v_0 \sin \alpha T$$

$$d = -\frac{g}{2} \frac{4 d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{2 d}{v_0 \cos \alpha}$$

$$d = -\frac{2 g d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + 2 d \tan \alpha$$

$$\frac{2 g d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 2 d \tan \alpha - d$$

$$v_0^2 = \frac{2 g d^2}{\cos^2 \alpha (2 d \tan \alpha - d)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 g d}{\cos^2 \alpha (2 \tan \alpha - 1)}}$$

Versuchen Sie es gar nicht erst, das Ergebnis nach α aufzulösen. Darüber werden Sie alt und grau. Es liegt nicht daran, dass Ihnen die Fähigkeiten fehlten, es geht einfach nicht.

Sollte der Winkel α nicht groß genug sein, wird der Nenner negativ, die Wurzel komplex.

Wenn

$$\tan \alpha < \frac{1}{2},$$

dann zielen Sie zu tief; die Geschwindigkeit bekommt ein komplexes Ergebnis. Ein Treffer ist nicht mehr möglich. Bei

$$\tan \alpha = \frac{1}{2},$$

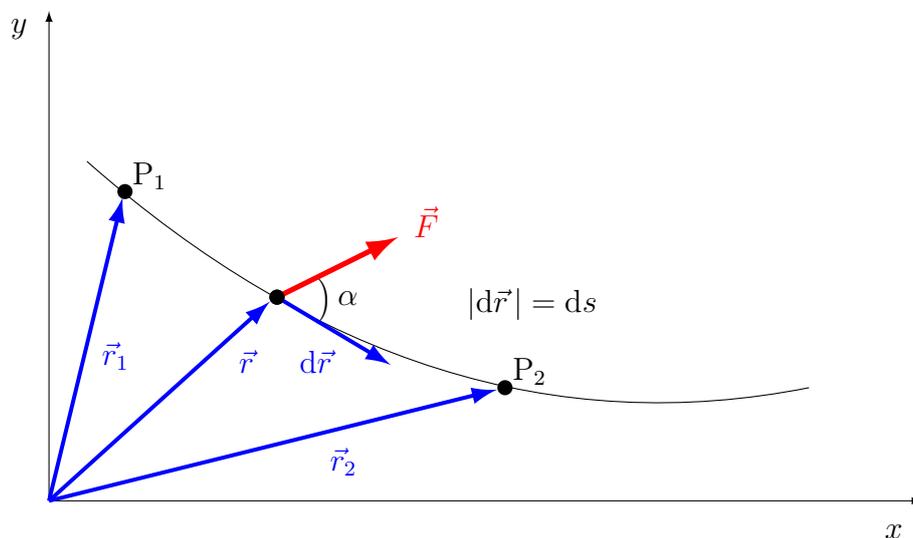
könnten Sie durch den Lauf den Zielpunkt sehen, sie halten genau drauf. Der Nenner wird Null und Sie müssten mit unendlich großer Geschwindigkeit schießen. Einstein schüttelt in diesem Fall weise den Kopf oder streckt Ihnen die Zunge heraus. Das Schießen – oder besser das Treffen – ist in der Realität noch viel schwieriger. Der Luftwiderstand macht die Sache erst richtig kompliziert.

■

2.2. Arbeit am Massenpunkt

Wird ein Massenpunkt durch eine Kraft \vec{F} auf seiner Bahnkurve um einen differentiellen Weg $d\vec{r}$ bewegt, so wird ihm eine differentielle Arbeit zugeordnet.

$$(I.2.5) \quad dW = \vec{F} d\vec{r} = F ds \cos \alpha.$$



Längs eines endlichen, bestimmten Wegs $P_1(\vec{r}_1) \rightarrow P_2(\vec{r}_2)$ auf der Bahnkurve ist die von der Kraft \vec{F} verrichtete Arbeit

$$(I.2.6) \quad W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

$$\dim [W] = \text{Kraft} \cdot \text{Länge}, \quad \text{Einheit: Nm} = \text{Ws} = \text{J}$$

Drei Bemerkungen:

1. Vermeiden Sie den Ausdruck „Arbeit wird geleistet“. Arbeit wird immer verrichtet. Im Zusammenhang mit Arbeit das Verb „leisten“ zu verwenden, ist irreführend, da Leistung eine eigene physikalische Größe ist.
2. Die Einheit Nm ist ein alter Bekannter. Bisher kennen wir sie als Einheit für Momente. Es liegt hier einer der seltenen Fälle vor, dass zwei verschiedene physikalische Größen die gleiche Einheit haben. Später kommt noch eine dritte hinzu. Eine Größe namens Drehfedersteifigkeit wird auch in Nm angegeben. Wir müssen also aufpassen, wofür es gerade geht.
3. Die Arbeit ist die frei konvertierbare Währung zwischen den Disziplinen der Physik: Mechanik (Nm), Elektrotechnik (Ws), Thermodynamik (J). Es gilt

$$1\text{Nm} = 1\text{Ws} = 1\text{J}.$$

Gleichung (I.2.6) ist ein Kurvenintegral, welches für jeden Einzelfall in ein RIEMANN¹ches Integral umgewandelt werden muss.

2.3. Leistung am Massenpunkt

$$(I.2.7) \quad P = \frac{dW}{dt}.$$

Bei konstanter Kraft \vec{F} vereinfacht sich die Leistung zu

$$P = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

$$\dim [P] = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \text{W}.$$

Aus (I.2.6) und (I.2.7) folgt durch Integration über die Zeit

$$(I.2.8) \quad W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

Das Vorzeichen der Arbeit wird dabei durch die Größe

$$\cos \alpha = \cos \left(\angle \vec{F}, d\vec{r} \right)$$

bestimmt. Siehe auch Gleichung (I.2.5). Das bedeutet, dass es für die Arbeit folgende Möglichkeiten gibt:

$$W \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$$

Das ist wahrlich eine fundamentale Erkenntnis. Arbeit kann positiv oder negativ sein. Die Arbeit ist positiv, wenn das betrachtete Teilsystem Arbeit „bekommt“. Denken Sie an einen Bollerwagen, den Sie den Berg hochziehen, er bekommt Arbeit. Zugkraft und zurückgelegter Weg zeigen tendenziell in die gleiche Richtung bzw. der Winkel zwischen Kraft und Weg ist kleiner 90° . Das Skalarprodukt ist positiv. Bei negativer Arbeit denken Sie an ein Gewicht, das Sie mit einer Leine abseilen wollen. Weg (nach unten) und Kraftrichtung (nach oben) sind entgegengesetzt. Hier gibt die Last Arbeit ab. Es gibt aber auch Kräfte, die verrichten gar keine Arbeit, dann wird die Arbeit Null sein.

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 bis 1866, bedeutender Mathematiker, er lehrte in Göttingen.

Beispiele

1. Kräfte, die keine Arbeit verrichten, d.h.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

- a) Kraftangriffspunkte ruhen: $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ bzw. $d\vec{r} = 0$. Das gilt für

- Lagerkräfte
- Haftreibungskräfte
- Reaktionskräfte an den Berührstellen rollender Körper

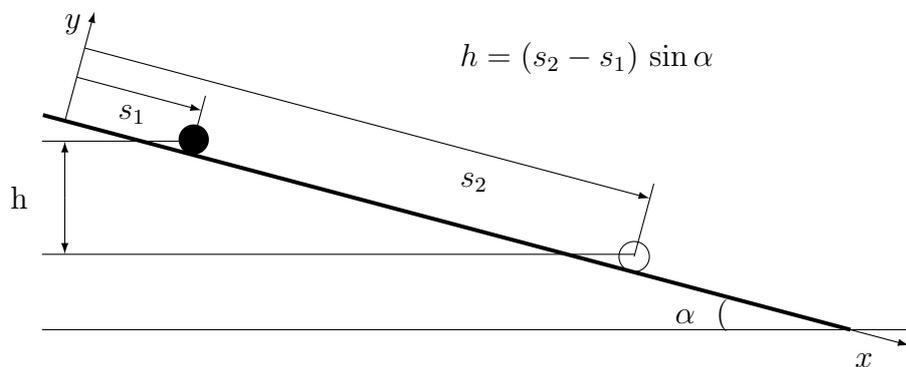
- b) Kräfte, die senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor stehen

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{F} \perp d\vec{r}$$

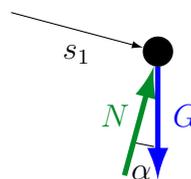
Das gilt immer für Normalkräfte.

2. Einfache Berechnung der Arbeit

- a) Massenpunkt auf glatter Ebene auf dem Weg von s_1 nach s_2 .



Massenpunkt von der Ebene abgeschnitten



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} G \sin \alpha \\ N - G \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} \begin{pmatrix} G \sin \alpha \\ N - G \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{s_1}^{s_2} G \sin \alpha dx.$$

Nummehr gilt

$$W_{1 \rightarrow 2} = G \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} dx = G \sin \alpha (s_2 - s_1)$$

und wegen $h = (s_2 - s_1) \sin \alpha$ folgt in diesem besonderen Fall

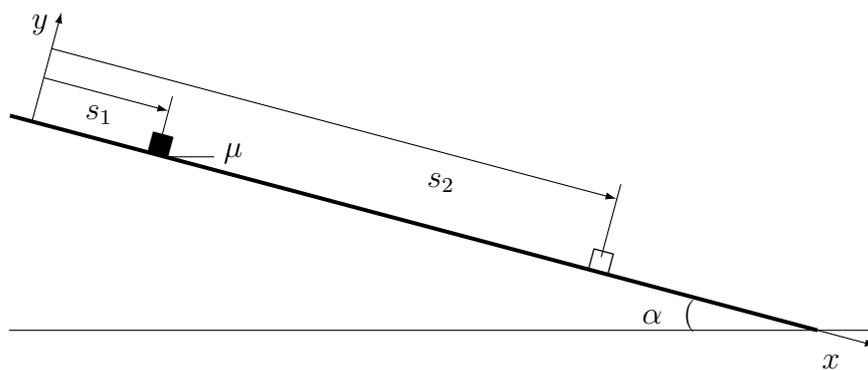
$$W_{1 \rightarrow 2} = G h.$$

Wir stellen fest, dass der Winkel α im Ergebnis keine Rolle mehr spielt. Die Bahn zwischen den Positionen s_1 und s_2 könnte auch ganz anders aussehen. Sie könnte wie die Rutsche eines Spaßbades kurvig sein und Hügel und Senken haben.

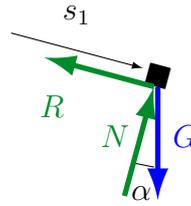
Dieses einfache Ergebnis ist eine Merkmal für konservative Systeme.

Konservativ ist hier keine politische Aussage; vielmehr beschreibt der Begriff die Reibungsfreiheit. Die Energie im System wird bewahrt und nicht in Wärme umgesetzt.

- b) Massenpunkt auf rauher Ebene (Gleitreibungskoeffizient μ) auf dem Weg von s_1 nach s_2 .



Massenpunkt von der Ebene abgeschnitten



$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} G \sin \alpha - R \\ N - G \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \begin{pmatrix} G \sin \alpha - R \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{s_1}^{s_2} (G \sin \alpha - R) dx.$$

Wegen $R = \mu N$ und $N = G \cos \alpha$, folgt $R = \mu G \cos \alpha$. Somit ist

$$W_{1 \rightarrow 2} = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \int_{s_1}^{s_2} dx = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) (s_2 - s_1).$$

In diesem Beispiel lassen sich nicht – wie in Beispiel 2a) – der Winkel α und $(s_2 - s_1)$ gleichzeitig eliminieren. Hier ist die Arbeit abhängig von der speziellen Form der Bahn.

Das ist einleuchtend. Wäre die Bahn von s_1 nach s_2 kurvenreich, so würde der Weg erheblich länger; der Einfluss der Reibkraft R nähme zu. Wäre der Weg eine Berg-und-Talbahn, wäre der Winkel α von x abhängig und müsste im Integral bleiben; auch das hätte Einfluss auf die Arbeit.

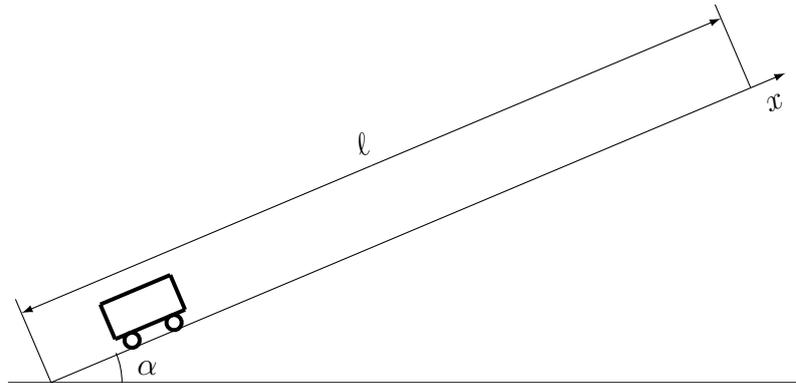
■

2.3.1. Übung, Schrägaufzug, Förderarbeit

Ein Schrägaufzug hat eine Steigung von $\alpha = 23^\circ$ und ist 38 m lang. Ein Wagen mit der Masse 2500 kg wird mit konstanter Geschwindigkeit gefördert.

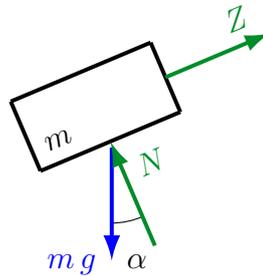
Gesucht:

- Zugkraft, parallel zur Förderebene (kein Fahrwiderstand),
- Förderarbeit für eine Fahrt.



Lösung

a) Zugkraft



NEWTONsches Grundgesetz:

$$\sum X_i = m \ddot{x}, \quad \text{da } v = \text{const.} \rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$Z - m g \sin \alpha = 0$$

$$Z = m g \sin \alpha$$

$$Z = 9,58 \text{ kN.}$$

b) Förderarbeit

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r},$$

hier
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x=0}^{x=\ell} Z dx,$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = Z x \Big|_{x=0}^{x=\ell},$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = Z \ell = m g \sin \alpha \cdot \ell,$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ N m} = 364 \text{ kJ.}$$

■

2.4. Leistung bei stationären Bewegungen

Gemäß (I.2.7) gilt bei Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bzw. konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$(I.2.9) \quad \begin{array}{ll} P = F \cdot v = F \cdot \dot{x} & \text{(translatorische Bewegung),} \\ P = M \cdot \omega = M \dot{\varphi} & \text{(rotatorische Bewegung).} \end{array}$$

Zu (I.2.9) gibt es eine praktische Faustformel für Rotationen mit der Drehzahl n :

$$P = M \frac{\pi n}{30} \approx \frac{M n}{10}.$$

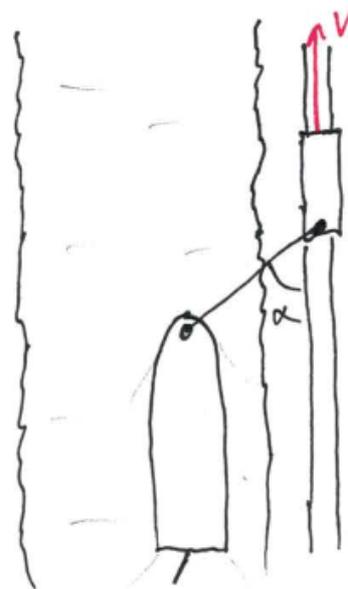


2.4.1. Übung, Treideln eines Schiffs

Ein Schiff wird durch eine Lok getreidelt. Die Schleppleinenkraft beträgt $S = 8 \text{ kN}$. Sie hat einen Winkel $\alpha = 28^\circ$.

Gesucht:

- Arbeit der Lok für Weg $\ell = 3 \text{ km}$,
- Zugleistung für eine Geschwindigkeit v von etwa 5 km (genau $2,5 \text{ m/s}$).



Lösung

Zwischen der Vorausrichtung der Lok (x , bzw. v) und der Zugrichtung der Schleppleine liegt der Winkel $\beta = \pi - \alpha$.

a)

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r},$$

hier
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x=0}^{x=\ell} S \cos \beta dx,$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = S \ell \cos(\pi - \alpha),$$

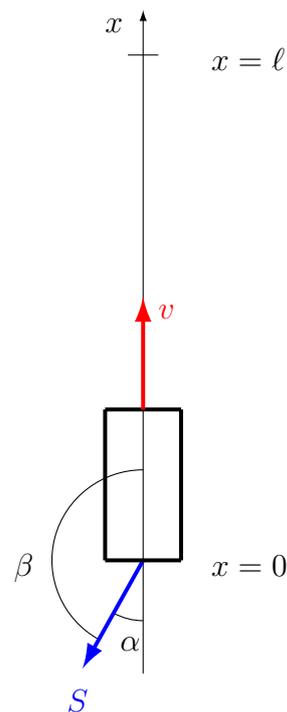
$$W_{1 \rightarrow 2} = -2,12 \cdot 10^7 \text{ Nm} = -21,2 \text{ MJ}.$$

b)

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v},$$

$$P = S v \cos(\pi - \alpha),$$

$$P = -17,7 \cdot 10^3 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = -17,7 \text{ kW}.$$



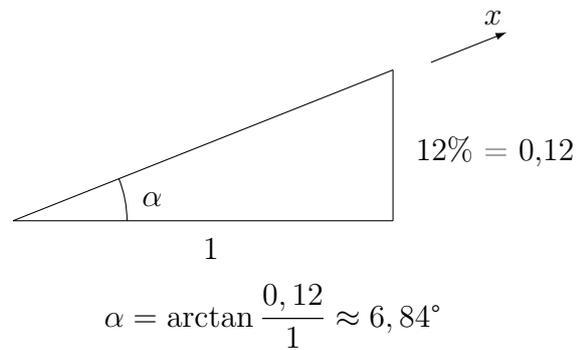
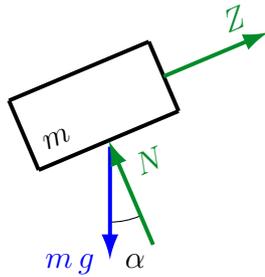
Da die Fahrtrichtung und die Krafrichtung von S in nahezu entgegengesetzte Richtung zeigen, sind Arbeit und Leistung negativ. Die Lok gibt Arbeit und Leistung ans Schiff ab. ■

2.4.2. Übung, Schrägaufzug mit Angabe der Leistung

Der Wagen eines Schrägaufzugs hat eine Masse von 1800 kg. Die Steigung beträgt 12%. Es ist ein Motor mit einer Leistung von 4,5 kW installiert.

Gesucht ist die gleichförmige Fahrgeschwindigkeit bei Nennleistung ohne Fahrwiderstände.

Lösung



NEWTONSches Grundgesetz in x -Richtung bei gleichförmiger Geschwindigkeit.

$$Z - m g \sin \alpha = m \ddot{x} = 0, \quad \text{da } v = \text{const}$$

$$Z = m g \sin \alpha$$

$$P = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}, \quad \text{hier } P = Z v$$

$$v = \frac{P}{Z} = \frac{P}{m g \sin(\arctan 0,12)}$$

$$v = 2,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■

2.5. Arbeitssatz für Massenpunkte

Aus dem NEWTONschen Axiom (Gleichung (I.2.1)) kann durch Integration über die Zeit der Arbeitssatz entwickelt werden.

$$(I.2.10) \quad \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \, d\vec{r}}_{W_{1 \rightarrow 2}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_2^2}_{E_{\text{kin}2}} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_1^2}_{E_{\text{kin}1}}.$$

Die Ausdrücke $\frac{1}{2} m v^2$ werden „kinetische Energie“ genannt.

$$E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2} m v_1^2: \text{Kinetische Energie in der Position 1,}$$

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2} m v_2^2: \text{Kinetische Energie in der Position 2.}$$

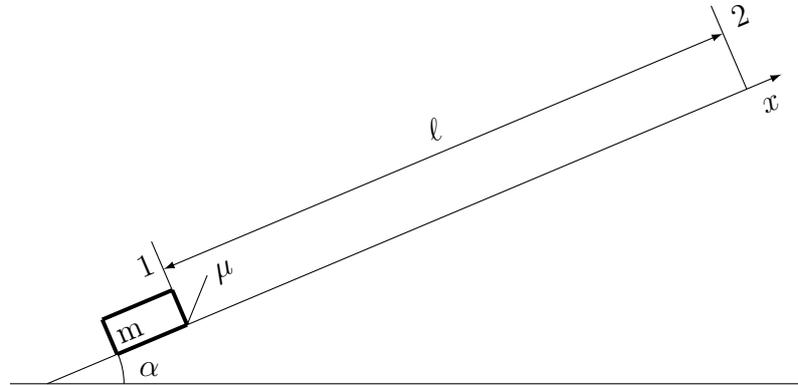
Gleichung (I.2.10) ist gleichzeitig der Arbeitssatz für einen Massenpunkt

$$(I.2.11) \quad W_{1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin}2} - E_{\text{kin}1}.$$

In Worten: Die am Massenpunkt verrichtete Arbeit ist gleich der Änderung der Kinetischen Energie. ■

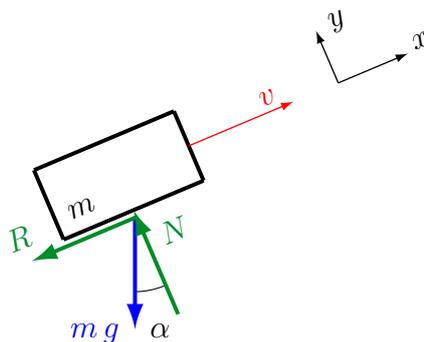
2.5.1. Übung, Reibung mit Arbeitssatz

Eine Masse wird mit v_1 an Position 1 abgeschossen. Zwischen Masse und Unterlage besteht Reibung. Welche Geschwindigkeit hat die Masse an Position 2?



Gegeben: $m, \ell, \alpha, \mu, v_1, g$

Lösung



Arbeitssatz für Massenpunkte

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = E_{\text{kin}2} - E_{\text{kin}1}.$$

Beteiligte Vektoren

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -R - m g \sin \alpha \\ N - m g \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kinetische Energien

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2} m v_2^2; \quad E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Reibung

$$R = \mu N; \quad N = m g \cos \alpha; \quad R = \mu m g \cos \alpha.$$

Der Vektor dr zeigt, dass nur die x -Positionen der Vektoren von Einfluss sind. Daher:

$$\int_0^{\ell} (-\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha) dx = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

Integrieren, Grenzen einsetzen

$$(-\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha) \ell = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

$$-m g \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

m kürzen, nach v_2 auflösen:

$$v_2^2 = v_1^2 - 2 g \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2 g \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

■

3. Hauptsätze der Körperdynamik

Bisher: Behandlung von Massenpunkten ohne Ausdehnung.

Jetzt: Betrachtung von ausgedehnten Körpern.

Nahezu unverändert gültig bleibt das NEWTONsche Axiom bzw. der Arbeitssatz.

Es erfolgt lediglich eine Namensänderung gleich im Folgekapitel

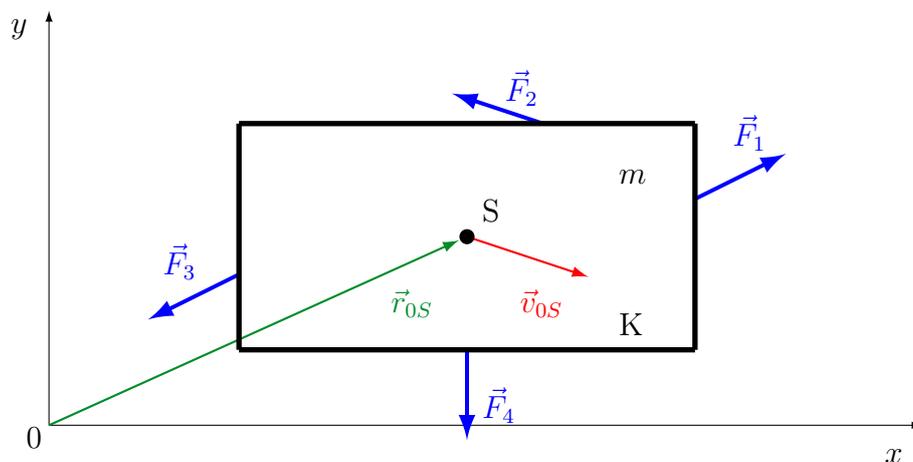
Neu und zusätzlich zu berücksichtigen: Drehbewegungen um einen Lagerungspunkt oder um den Schwerpunkt.

3.1. Schwerpunktsatz

Durch eine längere Herleitung ist beweisbar, dass zur Beschreibung der translatorischen Bewegung eines Körpers ähnliche Gesetze aufgestellt werden können, wie bei der Bewegung von Massenpunkten.

Das ist wenig überraschend, da Massenpunkte ausschließlich translatorisch unterwegs sind. Drehbewegungen von Massenpunkten sind mangels Ausdehnung irrelevant.

Voraussetzung: Stellvertretend für den Gesamtkörper K wird Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körperschwerpunkt S betrachtet.



Der Schwerpunktsatz lautet

$$(I.3.1) \quad \sum \vec{F}_i = \vec{F} = m \ddot{\vec{r}}_{0S} = m \dot{\vec{v}}_{0S}.$$

mit

\vec{r}_{0S} : Ortsvektor vom Koordinatenursprung 0 zum Schwerpunkt S.

$\ddot{\vec{r}}_{0S}$: zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit.

\vec{v}_{0S} : Geschwindigkeitsvektor von Schwerpunkt S im Koordinatensystem mit Ursprung 0 (zeigt nicht von 0 nach S).

Weiterführender Hinweis: Der Schwerpunktsatz ist ein Spezialfall des Impulssatzes. Der Impulssatz gilt für alle Körper (fest, flüssig, gasförmig). Der Schwerpunktsatz gilt nur für feste Körper.

$$(I.3.2) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{I}_0}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{I}_0 = \int_K \vec{v}_{0m} dm$$

3.2. Impulsmomentensatz

Im Gegensatz zum Massenpunkten können am ausgedehnten Körper Kräfte so angreifen, dass sie bezüglich eines beliebigen Körperpunktes (z.B. Schwerpunkt) ein Moment erzeugen. Ausgedehnte Körper können also in Drehung versetzt werden (\rightarrow rotatorische Bewegung). Zwei Fälle sind möglich:

1. Der Körper muss sich um einen bestimmten Punkt oder um eine bestimmte Achse drehen, da eine Lagerung vorhanden ist.
2. Der Körper kann sich frei bewegen (Raumschiff im All, Puck auf dem Eis); in diesem Fall erfolgt die rotatorische Bewegung immer um den Körperschwerpunkt.

Eine translatorische Bewegung kann in beiden Fällen überlagert sein.

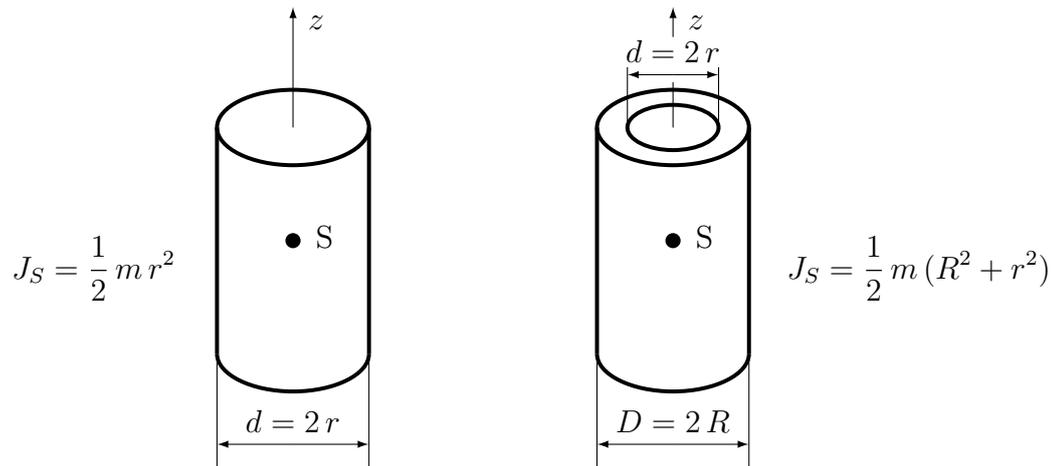
Analogie

Bekannt: Kraft \sim Beschleunigung. Proportionalitätsfaktor Masse m .

Neu: Moment \sim Drehbeschleunigung bzw. Winkelbeschleunigung. Proportionalitätsfaktor ist noch zu klären.

Vereinfachung: Es werden ausschließlich Bewegungen in der x - y -Ebene betrachtet. Als Proportionalitätsfaktor wird die Größe Massenträgheitsmoment J eingeführt. Es beschreibt die Trägheit gegenüber Drehbewegungen um eine bestimmte Achse, hier um die z -Achse.

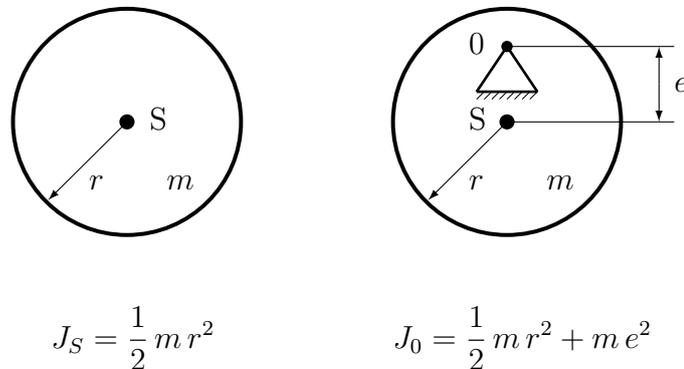
Beispiele für Massenträgheitsmomente (MTM) bei Bewegungen um den Schwerpunkt.



Beim Hohlzylinder mit $J_S = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$ verwundert das Pluszeichen. Wäre m die Masse des ursprünglichen Vollzylinders, dann müsste erwartungsgemäß $J_S = \frac{1}{2} m (R^2 - r^2)$ erscheinen. Bei m handelt es sich aber um die geringere Masse des Hohlzylinders. Aus diesem Grund ist das Pluszeichen richtig.

Noch etwas ist verwunderlich: Die Höhe des Zylinders spielt keine Rolle. Das MTM eines Bierdeckels oder Kreissägeblatts ist ebenfalls $J_S = \frac{1}{2} m r^2$.

Ist ein Körper außerhalb des Schwerpunkts gelagert, z.B. im Punkt 0, vergrößert sich das Massenträgheitsmoment.



Für beliebige Körper gilt bei Drehachsen außerhalb des Schwerpunkts der STEINERSche² Satz:

$$(I.3.3) \quad J_0 = J_S + m e^2, \quad e : \text{Exzentrizität}$$

mit

²Jakob Steiner 1796 bis 1863, Schweizer Mathematiker

J_0 : Trägheitsmoment um feste Achse bei 0,

J_S : Trägheitsmoment um Achse bei S,

e : Abstand feste Achse zum Schwerpunkt.

Der Impulsmomentensatz für Drehung um den Schwerpunkt lautet

$$(I.3.4) \quad \sum M_{i[S]} = J_S \ddot{\varphi} = J_S \dot{\omega}.$$

mit

$\sum M_{i[S]}$: Summe aller Momente um S,

J_S : Massenträgheitsmoment um den selben Punkt S.

$\ddot{\varphi}$: Winkelbeschleunigung.

Gültig für frei bewegliche Körper ([Puck auf dem Eis](#)) und im Schwerpunkt gelagerte Körper.

Bei fester Lagerung außerhalb des Schwerpunkts im Punkt 0 lautet der Impulsmomentensatz

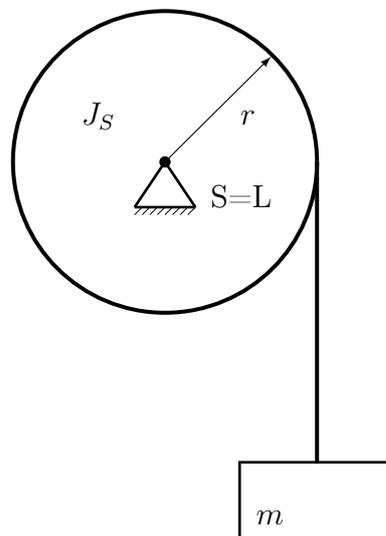
$$(I.3.5) \quad \sum M_{i[0]} = J_0 \ddot{\varphi} = J_0 \dot{\omega}.$$

Der Index bei J und der Momentenbezugspunkt müssen immer gleich sein. Die Bezeichnungen können variieren, z.B 0 wie Koordinatenursprung, P wie Punkt oder L wie Lager.

Hinweis: Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz müssen bei ausgedehnten Körpern erfüllt werden. Die Kräfte- und Momentengleichgewichte der Statik sind die „beschleunigungslosen“ Sonderfälle von Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz. ■

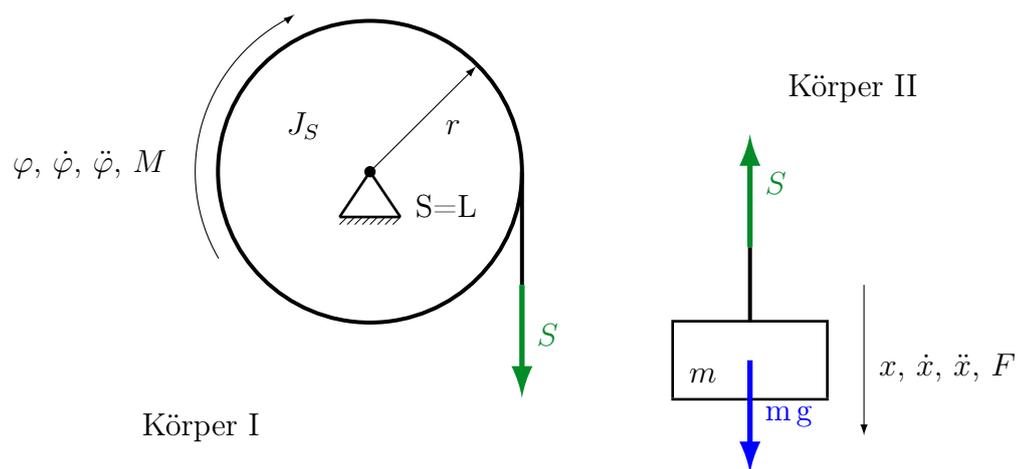
3.2.1. Übung, Zweikörpersystem

Gegeben ist eine reibungsfrei gelagerte Seiltrommel mit masselosem Seil und einer Last, ferner J_S , m , r .



Gesucht: Beschleunigung der Masse m und die Winkelbeschleunigung der Scheibe J_S .

Zerschneiden



Wichtig ist bei Mehrkörpersystemen, dass die zu erwartenden Bewegungsrichtungen kompatibel eingezeichnet werden. Die Masse wird sich nach unten bewegen, infolgedessen die Seiltrommel im Uhrzeigersinn. Erneut müssen die kinematischen Größen und die kinetischen Größen in jeweils gleicher Richtung positiv angenommen werden. Hier ist dies erkennbar an der Beschriftung x , \dot{x} , \ddot{x} , F und φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, M .

Verabschieden müssen wir uns von einer Vereinbarung aus der ebenen Statik, in der Momente gegen den Uhrzeigersinn positiv sind. Hier gilt etwas anderes: Momente in Bewegungsrichtung sind positiv.

Hauptsätze der Körperdynamik, SwS, IMS

Körper I, IMS

$$\begin{aligned}\sum M_i[L] &= J_S \ddot{\varphi}, \\ S r &= J_S \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Körper II, SwS

$$\begin{aligned}\sum F_i &= m \ddot{x}, \\ m g - S &= m \ddot{x}.\end{aligned}$$

Kinematische Koppelung

Mehrkörpersysteme können sich nicht unabhängig voneinander bewegen. Wenn die Masse ein bestimmtes Stück Weg x zurücklegt, wird ein genau so langes Stück Seil abgewickelt. Die Scheibe muss sich also um einen dazugehörigen Winkel φ weiterdrehen. Der Zusammenhang zwischen Weg und Winkel ist die kinematische Koppelung. Sie lautet

$$\begin{aligned}x &= r \varphi \\ \dot{x} &= r \dot{\varphi} \\ \ddot{x} &= r \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Die erste Zeile kann an Hand des Umfangs eines Kreises gut veranschaulicht werden. $U = r \cdot 2\pi$. Die zwei weiteren Zeilen werden durch formales Ableiten erzeugt.

Unerwünschte Größen eliminieren, gesuchte Größen bestimmen

Nach der Seilkraft S wird nicht gefragt, sie ist zu eliminieren. Eine der beiden Beschleunigungen (hier $\ddot{\varphi}$) wird auch zunächst eliminiert. Die andere Beschleunigung \ddot{x} wird

berechnet.

$$\begin{aligned}S &= \frac{J_S \ddot{\varphi}}{r} \\m g - \frac{J_S \ddot{\varphi}}{r} &= m \ddot{x} \\m g - \frac{J_S \ddot{x}}{r^2} &= m \ddot{x} \\m g &= \ddot{x} \left(m + \frac{J_S}{r^2} \right) \\\ddot{x} &= \frac{m g}{m + \frac{J_S}{r^2}} = \frac{m g r^2}{m r^2 + J_S}.\end{aligned}$$

Es ist auch nach der Winkelbeschleunigung gefragt. Mit der kinematischen Koppelung in der Form $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$ geht das leicht vonstatten.

$$\ddot{\varphi} = \frac{m g r}{m r^2 + J_S}.$$

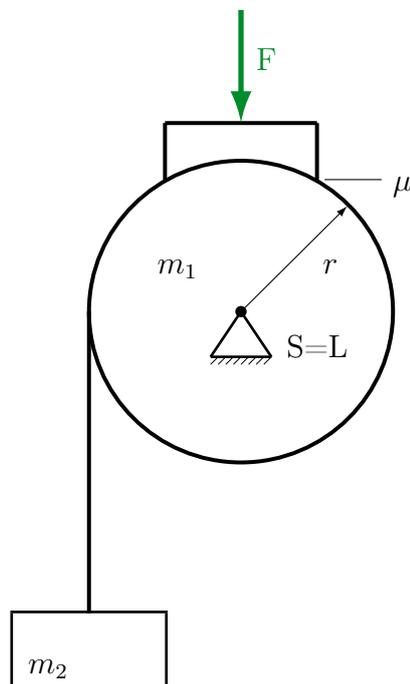
■

3.2.2. Übung, gebremster Förderkorb

Bei Abwärtsfahrt soll ein Förderkorb (Masse m_2) mit bekannter Beschleunigung a aus der Ruhe auf die Endgeschwindigkeit v_e gebracht werden. Dabei wird die Seiltrommel (Vollzylinder, Masse m_1) gebremst.

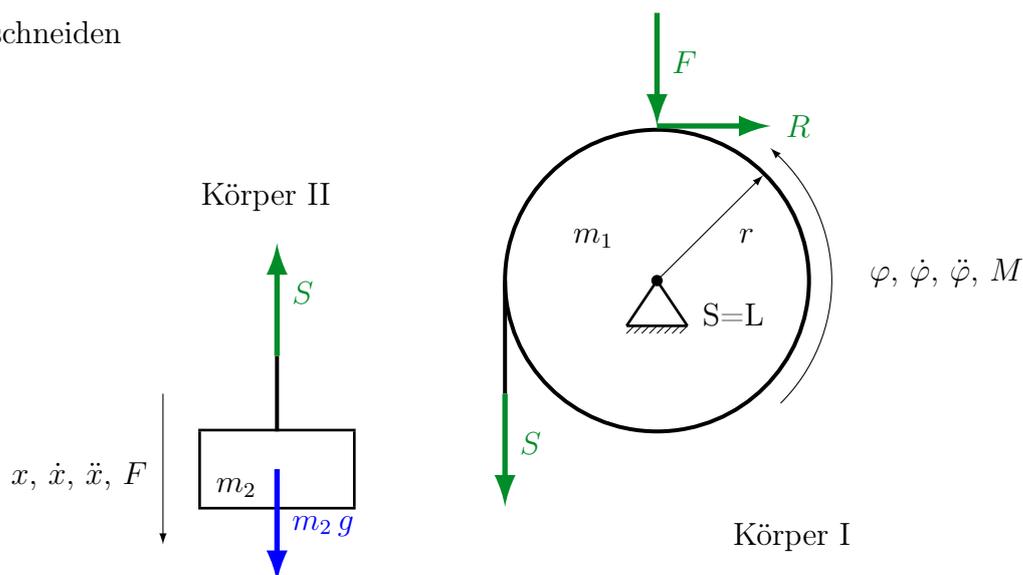
Gegeben: $a = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $v_e = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $m_1 = 500 \text{ kg}$, $m_2 = 2000 \text{ kg}$, $r = 1,5 \text{ m}$, $\mu = 0,35$

- Wie groß muss die Kraft F sein?
- Wie lange dauert die beschleunigte Fahrt?
- Wie groß muss die Kraft F sein, wenn anschließend mit $v_e = \text{const.}$ weitergefahren wird?



Lösung

Zerschneiden



Hauptsätze der Körperdynamik, SwS, IMS

$$\begin{array}{ll} \text{Körper I, IMS} & \sum M_i[L] = J_S \ddot{\varphi}, \\ & S r - R r = J_S \ddot{\varphi} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Körper II, SwS} & \sum F_i = m_2 \ddot{x}, \\ & m_2 g - S = m_2 \ddot{x} \end{array}$$

$$\text{Kinematische Koppelung} \quad x = r \varphi, \quad \ddot{x} = r \ddot{\varphi}$$

$$\text{Reibung} \quad R = \mu F$$

$$\text{Massenträgheitsmoment} \quad J_S = \frac{1}{2} m_1 r^2$$

Da translatorische Größen (a , v_e) gegeben sind, wird $\ddot{\varphi}$ eliminiert, ebenso die Seilkraft S , da sie uninteressant ist. Hierzu lösen wir den SwS von Körper II nach S auf.

$$S = m_2 (g - \ddot{x})$$

Diese Seilkraft S und die Kinematik in der Form $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$ wird in den IMS von Körper I eingesetzt

$$(S - \mu F) r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$S - \mu F = \frac{1}{2} m_1 \ddot{x}$$

$$m_2 g - m_2 \ddot{x} - \mu F = \frac{1}{2} m_1 \ddot{x}$$

a) Wie groß ist F bei $\ddot{x} = a = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

$$\mu F = m_2 g - \ddot{x} \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)$$

$$F = \frac{m_2 g}{\mu} - \frac{\ddot{x}}{\mu} \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)$$

$$F = 36,7 \text{ kN.}$$

b) Wie lange dauert die beschleunigte Fahrt?

$$\ddot{x} = a = \text{const.}$$

$$1 \text{ mal int. reicht } \dot{x} = a t + c_1$$

$$\text{AB } \dot{x}(t=0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\text{tats. BewGl. } \dot{x} = a t$$

$$\text{EB } \dot{x}(t=T) = v_e$$

$$T \text{ best. } T = \frac{v_e}{a}$$

$$T = 4 \text{ s.}$$

c) Wie groß ist F bei Fahrt mit $\dot{x} = v_e = \text{const}$?

Was glauben Sie, wird die Kraft größer oder kleiner werden?

Wenn mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird, ist die Beschleunigung $\ddot{x} = 0$.

$$F = \frac{m_2 g}{\mu} - \frac{\ddot{x}}{\mu} \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)$$

$$F = \frac{m_2 g}{\mu}$$

$$F = 56,1 \text{ kN.}$$

Na klar, wenn der Förderkorb nicht noch schneller werden soll, muss stärker gebremst werden, F wird größer.

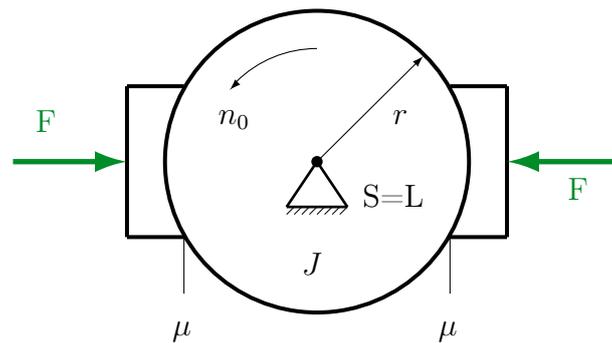


3.2.3. Übung, Wäscheschleuder

Aus Sicherheitsgründen wird eine Wäscheschleuder so abgebremst, dass sie nach einer Sekunde zum Stillstand kommt.

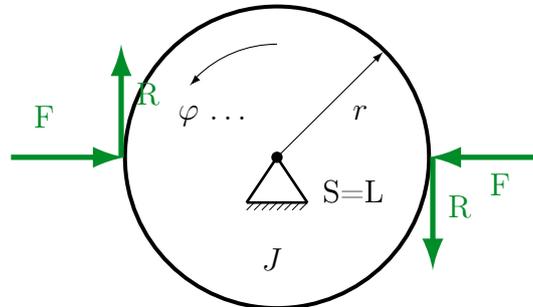
- Wie groß muss F bei einer Drehzahl n_0 sein?
- Wieviele Umdrehungen werden beim Bremsvorgang ausgeführt?

Gegeben: $n_0 = 1000$ U/min, $r = 0,2$ m, $J = 0,4$ kg m², $\mu = 0,35$.



Lösung

Freischneiden

a) Wie groß ist F ?

Hauptsatz der Körperdynamik, IMS

$$\sum M_i[L] = J_S \ddot{\varphi},$$

$$-2 R r = J_S \ddot{\varphi} \quad \text{mit} \quad R = \mu F$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2 \mu F r}{J_S} = \alpha$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2 \mu F r}{J_S} = \text{const.}$$

$$2 \text{ mal int.} \quad \dot{\varphi} = -\frac{2 \mu F r}{J_S} t + c_1$$

$$\varphi = -\frac{\mu F r}{J_S} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{60}$$

$$\text{AB2} \quad \varphi(t=0) = 0$$

$$c_{1,2} \text{ best.} \quad c_1 = \frac{\pi n_0}{30}, \quad c_2 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{\varphi} = -\frac{2\mu F r}{J_S} t + \frac{\pi n_0}{30}$$

$$\varphi = -\frac{\mu F r}{J_S} t^2 + \frac{\pi n_0}{30} t$$

$$\text{EB1} \quad \dot{\varphi}(t = T) = 0$$

$$\text{EB2} \quad \varphi(t = T) = \varphi_e = ?$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \quad 0 = -\frac{2\mu F r}{J_S} T + \frac{\pi n_0}{30}$$

$$T = \frac{\pi n_0 J_S}{60 \mu F r}$$

$$F \text{ ist gesucht, bei } T = 1 \text{ s} \quad F = \frac{\pi n_0 J_S}{60 \mu T r}$$

$$F = 300 \text{ N.}$$

b) Wieviele Umdrehungen werden zurückgelegt? Wir fragen zunächst nach dem zurückgelegten Winkel φ_e .

$$\varphi_e = -\frac{\mu F r}{J_S} T^2 + \frac{\pi n_0}{30} T$$

$$F \text{ eingesetzt} \quad \varphi_e = -\frac{\mu r \pi n_0 J_S}{60 \mu T r J_S} T^2 + \frac{\pi n_0}{30} T$$

$$\varphi_e = -\frac{\pi n_0}{60} T + \frac{\pi n_0}{30} T$$

$$\varphi_e = \frac{\pi n_0}{60} T$$

$$\varphi_e = 52,3 \quad \text{Bogenmaß!}$$

Die Zahl der Umdrehungen ist

$$\frac{52,3}{2\pi} = 8,3 \text{ Umdrehungen}$$



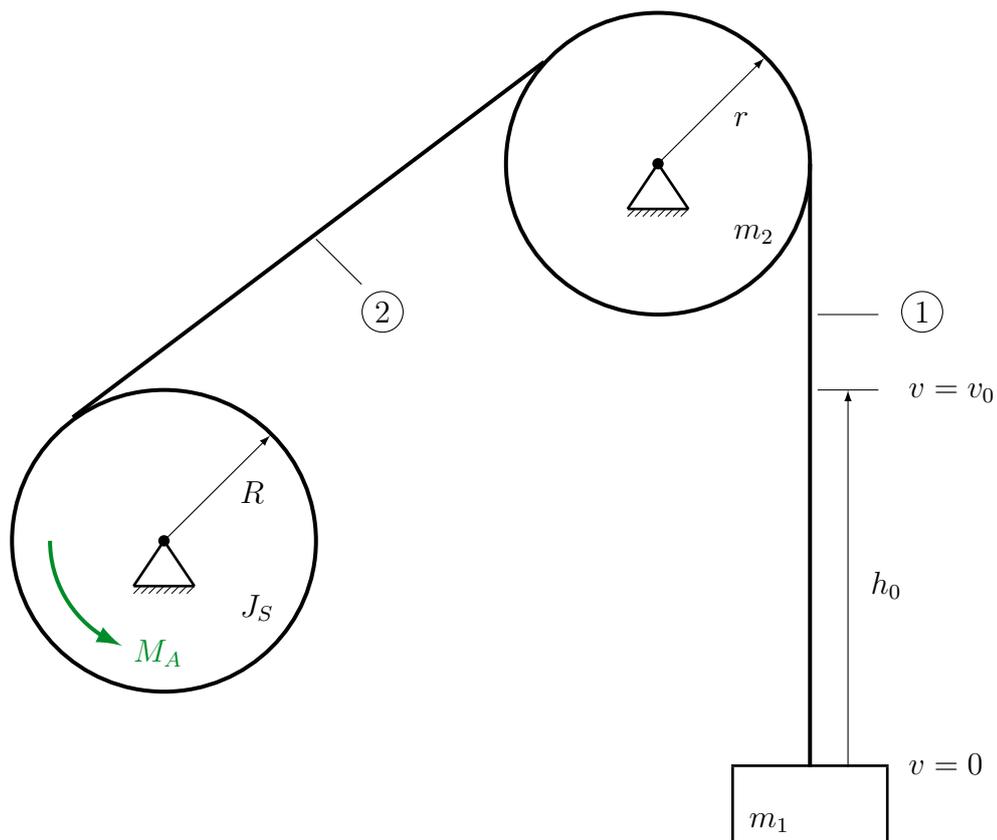
3.2.4. Übung, Förderkorb, Seilkräfte

Ein Förderkorb fährt zu Tage. Er wird mit konstanter Beschleunigung auf einer Strecke h_0 auf v_0 beschleunigt.

Gegeben: h_0 , v_0 , m_1 , m_2 (Vollscheibe), r , R , J_S

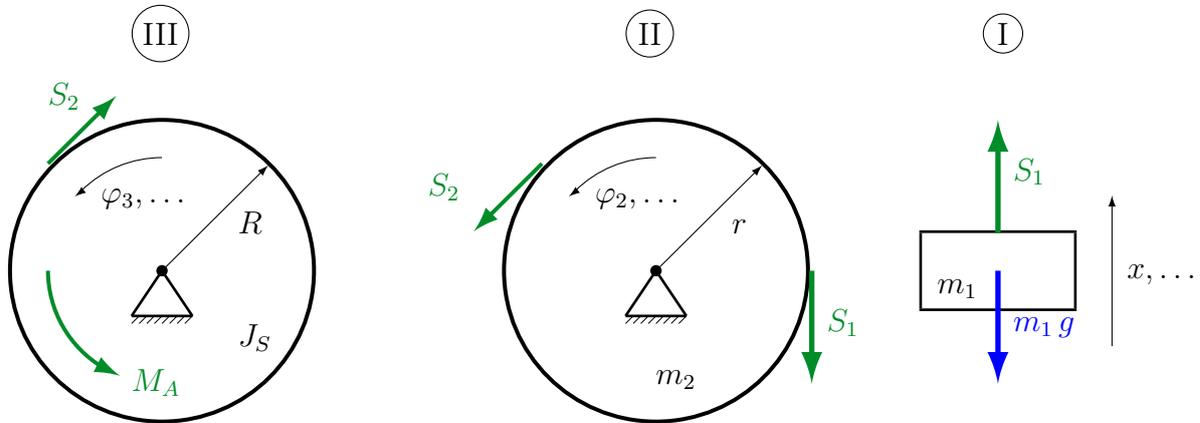
a) Wie groß ist die Seilkraft ①

b) Wie groß ist die Seilkraft ②



Lösung

Freischneiden



Hauptsätze der Körperdynamik

$$\text{Körper I, SwS} \quad S_1 - m_1 g = m_1 \ddot{x}$$

$$\text{Körper II, IMS} \quad S_2 r - S_1 r = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi}_2$$

$$\text{Körper III, IMS} \quad M_A - S_2 R = J_S \ddot{\varphi}_3$$

Kinematische Koppelung

$$x = r \varphi_2 = R \varphi_3; \quad \ddot{x} = r \ddot{\varphi}_2 = R \ddot{\varphi}_3$$

Um die Seilkräfte angeben zu können müssen die (Winkel-)Beschleunigungen bekannt sein. Informationen über translatorische Wege und Geschwindigkeiten liegen vor, daher ist \ddot{x} von primärem Interesse.

$$\ddot{x} = a = \text{const.}$$

$$\dot{x} = a t + c_1$$

$$x = \frac{a}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\text{AB2} \quad x(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

tats. BewGl.	$\dot{x} = a t$
	$x = \frac{a}{2} t^2$
EB1	$\dot{x}(t = T) = v_0$
EB2	$x(t = T) = h_0$
T best. EB1	$T = \frac{v_0}{a}$
ges. Größe a bestimmen	$h_0 = \frac{a}{2} T^2$
	$h_0 = \frac{a}{2} \frac{v_0^2}{a^2}$
	$a = \frac{v_0^2}{2 h_0} = \ddot{x}$

Aus Körper I ist die Seilkraft S_1 berechenbar.

$$S_1 = m_1 (\ddot{x} + g)$$

$$S_1 = m_1 \left(\frac{v_0^2}{2 h_0} + g \right)$$

Aus Körper II ist die Seilkraft S_2 berechenbar. Hierzu muss $\ddot{\varphi}_2$ eliminiert werden.

$$S_2 r - S_1 r = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi}_2$$

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2} m_2 r \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} m_2 \ddot{x} + m_1 (\ddot{x} + g)$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} m_2 + m_1 \right) \ddot{x} + m_1 g$$

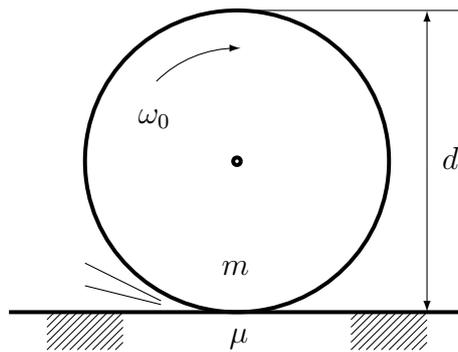
$$S_2 = \left(\frac{1}{2} m_2 + m_1 \right) \frac{v_0^2}{2 h_0} + m_1 g.$$

Aus Körper III könnte das noch unbekannte Antriebsmoment M_A berechnet werden. Danach ist aber nicht gefragt. ■

3.2.5. Übung, Grinding disk goes berserk

Eine homogene Schleifscheibe (Durchmesser d) löst sich bei einer Kreisfrequenz ω_0 von der Welle und fällt senkrecht zu Boden. Wir nehmen an, dass die Scheibe beim Aufprall nicht springt (Gleitreibung μ). Gegeben: $d = 300 \text{ mm}$, $\omega_0 = 90 \frac{1}{\text{s}}$, $\mu = 0,5$, Masse m beliebig.

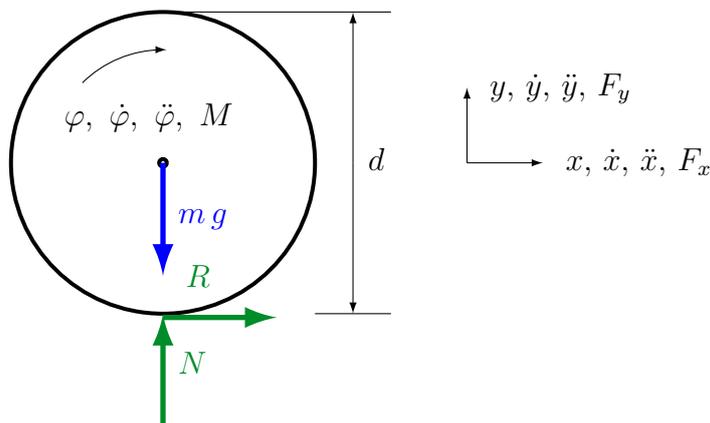
Welche Geschwindigkeit v_1 erreicht der Schwerpunkt der Scheibe auf horizontaler Ebene?



Lösung

Die Scheibe wird kurzzeitig auf der Stelle rotieren, Reibkräfte werden wirken und die Scheibe wird sich alsbald translatorisch beschleunigt bewegen. Gleichzeitig wird die Winkelgeschwindigkeit abnehmen. Zu einem späteren Zeitpunkt wird die Scheibe in reines Rollen übergehen. Dann ist die gesuchte Geschwindigkeit v_1 erreicht.

Freischneiden



Hauptsätze der Körperdynamik. In diesem Fall hat ein Körper sowohl eine translatorische als auch eine rotatorische Bewegung.

$$y\text{-Richtung, SwS} \quad N - m g = m \ddot{y} = 0 \quad (\text{kein Springen})$$

$$N = m g, \quad R = \mu m g$$

$$x\text{-Richtung, SwS} \quad R = m \ddot{x}$$

$$\mu m g = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \mu g$$

$$\text{IMS} \quad -R \frac{d}{2} = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{4} \ddot{\varphi}$$

$$- \mu g = \frac{d}{4} \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{4 \mu g}{d}$$

Nicht zu fassen, eine Reibkraft treibt etwas an. Manchmal ist das wirklich der Fall.

Kinematik

$$\ddot{x} = \mu g \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d}$$

$$\dot{x} = \mu g t + c_1 \qquad \dot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d} t + c_3$$

$$x = \frac{\mu g}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \qquad \varphi = -\frac{4\mu g}{2d} t^2 + c_3 t + c_4$$

$$\text{AB1} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \qquad \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 \rightarrow c_3 = \omega_0$$

$$\text{AB2} \quad x(t=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \qquad \varphi(t=0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{x} = \mu g t \qquad \dot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d} t + \omega_0$$

$$x = \frac{\mu g}{2} t^2 \qquad \varphi = -\frac{4\mu g}{2d} t^2 + \omega_0 t$$

Den Endbedingungen kommt nun eine besondere Bedeutung zu. Wenn ein rotierender Körper rollt (und nicht rutscht/durchdreht), haben translatorische Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit ein Verhältnis zueinander, das wir als kinematische Koppelung kennen.

$$\dot{x}(t=T) = \frac{d}{2} \dot{\varphi}(t=T) = v_1$$

Das erinnert ein wenig an eine Übergangsbedingung bei der Balkenbiegung. Es geht hier auch um einen Übergang, den vom Durchdrehen zum Rollen.

$$T \text{ bestimmen} \quad \mu g T = \frac{d}{2} \left(-\frac{4\mu g}{d} T + \omega_0 \right)$$

$$\mu g T + 2\mu g T = \frac{d}{2} \omega_0$$

$$T = \frac{\omega_0 d}{6\mu g}$$

Mit der Zeit T kann mittels $\dot{x}(t=T) = v_1$ die gesuchte Größe v_1 ausgerechnet werden.

$$v_1 = \mu g T$$

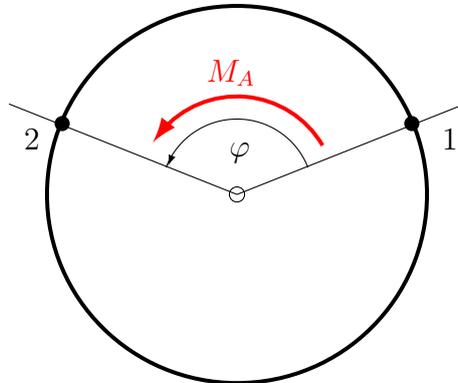
$$v_1 = \mu g \frac{\omega_0 d}{6\mu g}$$

$$v_1 = \frac{\omega_0 d}{6}, \quad v_1 = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

■

3.3. Arbeit und Leistung bei rotatorischen Bewegungen

Zur Vereinfachung werden Bewegungen mit konstanten Antriebsmomenten betrachtet. In Analogie zu Gleichung (I.2.6) berechnet sich die Arbeit bei einer rotatorischen Bewegung vom Zustand 1 zum Zustand 2



$$(I.3.6) \quad W_{M1 \rightarrow 2} = \pm M_A \varphi$$

mit

$$W_{M1 \rightarrow 2} = +M_A \varphi, \text{ wenn } M_A \text{ und } \varphi \text{ gleichsinnig und}$$

$$W_{M1 \rightarrow 2} = -M_A \varphi, \text{ wenn } M_A \text{ und } \varphi \text{ gegensinnig.}$$

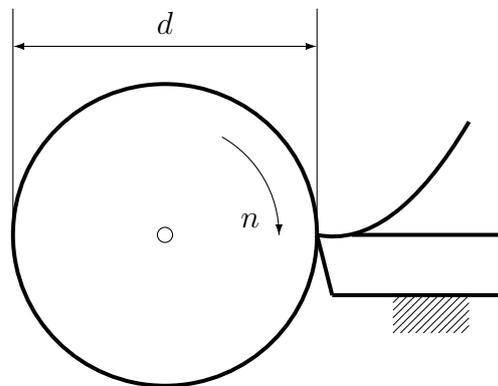
Die Leistung P berechnet sich bei konstanter Winkelgeschwindigkeit zu

$$(I.3.7) \quad P = M \omega = M \frac{\pi n}{30} \approx \frac{M n}{10}.$$

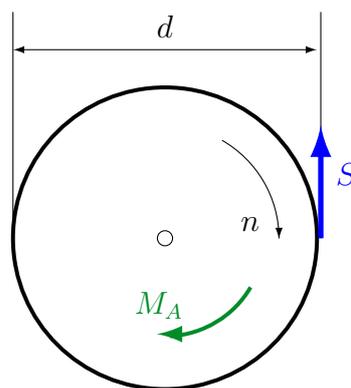
Siehe auch Gleichungen (I.2.9) und (I.1.9). ■

3.3.1. Übung, Schnittleistung

An einem Werkstück mit Durchmesser $d = 60$ mm wird gedreht. Die Schnittkraft beträgt $1,8$ kN. Wie groß ist die Schnittleistung bei einer Drehzahl von $n = 250$ 1/min?



Lösung



$$\text{IMS} \quad M_A - S \frac{d}{2} = J\dot{\varphi} = 0, \quad \text{da } n = \text{const.}$$

$$M_A = S \frac{d}{2}$$

$$\text{Leistung} \quad P = M\omega = S \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi n}{30}$$

$$P = \frac{1800 \cdot 0,06 \cdot \pi \cdot 250}{60} \frac{\text{N m}}{\text{s}} = \text{W}$$

$$P = 1,41 \text{ kW}$$



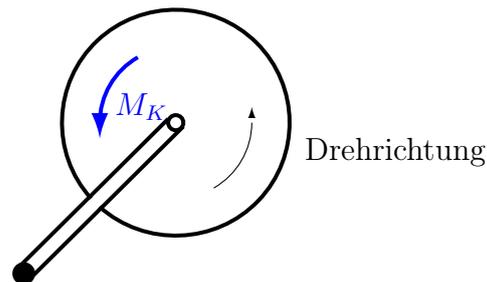
3.3.2. Übung, Arbeit an der Kurbel

An einer Seilwinde mit Handkurbel wirkt ein Kurbelmoment M_K von 45 Nm. Es werden $m = 127,5$ Umdrehungen gemacht, dabei wird die Last um die Strecke $x = 25$ m angehoben. Es treten keine nennenswerten Beschleunigungen auf. Wie groß ist

- die Dreharbeit an der Kurbel,
- der Betrag der Seilkraft?

Lösung

a)



$$\begin{aligned} \text{Kurbelarbeit} \quad W_K &= M_K \varphi = M_K m \cdot 2\pi \\ W_K &= 45 \cdot 127,5 \cdot 2\pi \text{ Nm} \\ W_K &= 36,1 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

b)

$$W_{\text{Kurbel}} + W_{\text{Seil}} = 0$$

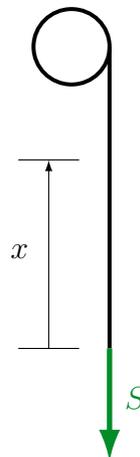
$$M_K \varphi + x(-S_1) = 0$$

$$S = \frac{M_K \varphi}{x}$$

$$S = \frac{M_K m \cdot 2\pi}{x}$$

$$S = \frac{45 \cdot 127,5 \cdot 2\pi}{25} \text{ N}$$

$$S = 1,44 \text{ kN.}$$



■

3.3.3. Übung, Lokschuppendrehscheibe

Eine Lokschuppendrehscheibe dreht sich in 40 s um 180° . Zur Überwindung der Reibung ist ein Drehmoment von 30 000 Nm nötig.

Wie groß ist die Antriebsleistung?

Lösung

$$\text{Leistung} \quad P = M \omega$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{hier} \quad \omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$P = M \frac{\varphi}{t}$$

$$\text{Bogenmaß!} \quad P = 30 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{40} \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$P = 2,36 \text{ kW.}$$



3.4. Arbeitssatz bei Drehung um eine feste Achse

Analog zu den Gleichungen (I.2.10) kann der Arbeitssatz für Drehbewegungen hergeleitet werden.

$$(I.3.8) \quad W_{M1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} J_D \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_D \omega_1^2.$$

mit

$W_{M1 \rightarrow 2}$: Arbeit eines Moments bei einer Verdrehung um eine feste Achse von Zustand 1 zu Zustand 2,

ω_1 : Winkelgeschwindigkeit beim Zustand 1,

ω_2 : Winkelgeschwindigkeit beim Zustand 2.

oder kurz

$$(I.3.9) \quad W_{M1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin rot}2} - E_{\text{kin rot}1}.$$

■

3.4.1. Übung, Wäscheschleuder mit Arbeitssatz

Aus Sicherheitsgründen wird eine Wäscheschleuder so abgebremst, dass sie nach einer Umdrehung zum Stillstand kommt.

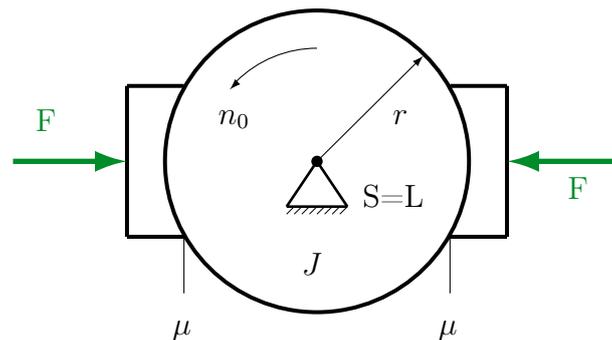
Wie groß muss F bei einer Drehzahl n_0 sein?

Eine ganz ähnliche Aufgabe wurde schon als Übungsaufgabe 3.2.3 auf Seite 51 mittels IMS gelöst.

Die damalige Forderung lautete, dass die Wäscheschleuder nach einer Sekunde zum Stillstand kommt. Da im Arbeitssatz keine Zeiten t auftauchen, wird die Fragestellung für den Arbeitssatz angepasst.

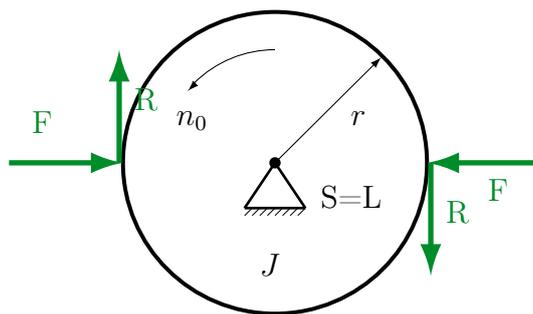
Merke: SwS und IMS gelingen immer und liefern Ergebnisse für alle Lebenslagen. Wenn nach Wegen/Winkeln, Kräften/Momenten und/oder (Winkel-)Geschwindigkeiten gefragt wird, liefert der Arbeitssatz einen schnelleren Rechenweg.

Gegeben: $n_0 = 1000 \text{ U/min}$, $r = 0,2 \text{ m}$, $J = 0,4 \text{ kg m}^2$, $\mu = 0,35$.



Lösung

Freischneiden



$$\text{Arbeitssatz} \quad W_{M1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin rot}2} - E_{\text{kin rot}1}$$

$$M \varphi = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

Es wirken die Momente $R r$ an zwei Stellen, entgegen der Drehrichtung. Es wird eine Umdrehung ($\varphi = 2\pi$) zurückgelegt.

$$W_{M1 \rightarrow 2} = -2 R r \cdot 2\pi$$

$$R = \mu N = \mu F$$

$$W_{M1 \rightarrow 2} = -4 \mu F r \pi$$

$$\text{Position 1:} \quad \omega_1 = \frac{\pi n_0}{30}$$

$$\text{Position 2:} \quad \omega_2 = 0 \quad (\text{Stillstand})$$

$$E_{\text{kin rot}2} = \frac{1}{2} J \cdot 0 = 0$$

$$E_{\text{kin rot}1} = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} J \frac{\pi^2 n_0^2}{30^2}$$

$$\text{in Arbeitssatz} \quad -4 \mu F r \pi = 0 - \frac{1}{2} J \frac{\pi^2 n_0^2}{30^2}$$

$$F = \frac{J \pi^2 n_0^2}{4 \mu r \pi \cdot 2 \cdot 30^2}$$

$$F = \frac{0,4 \cdot \pi \cdot 1000^2}{4 \cdot 0,35 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 30^2} \text{ N}$$

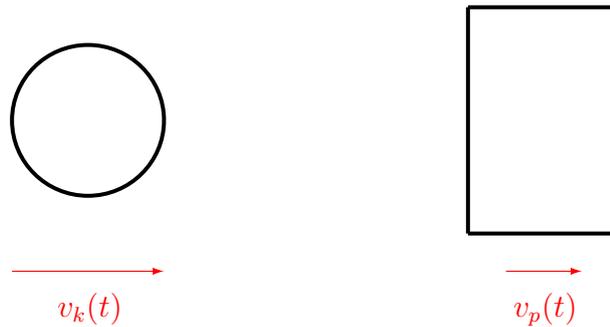
$$F = 2493 \text{ N}$$

■

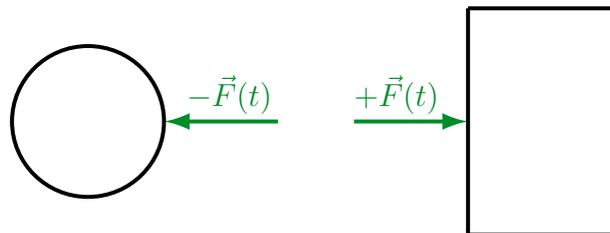
4. Stoßvorgänge

Beim Zusammenprall zweier Körper entstehen sehr schnell Deformationen, die vorübergehend oder bleibend sein können. Dabei treten erheblich Kräfte auf, deren zeitliche Verläufe i. A. nicht bekannt sind.

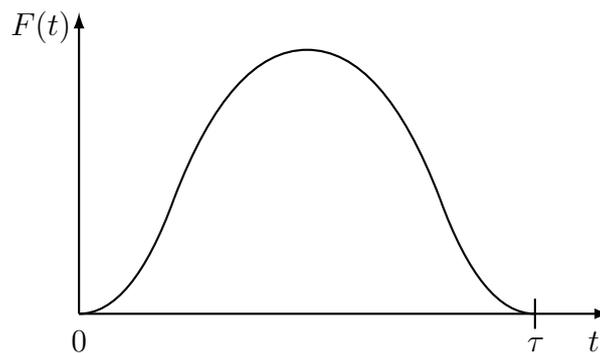
Beispiel: Eine Kugel prallt auf eine Platte. Beide Körper können Geschwindigkeiten v haben.



Während des Kontakts wird das System zerschnitten.



Kraftverlauf von $|\vec{F}(t)| = F(t)$:



$t = 0$: Zeitpunkt unmittelbar vor dem Stoßkontakt

$t = \tau$: Zeitpunkt unmittelbar nach Ablauf des Stoßvorgangs. Die Körper können sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten oder mit einer gemeinsamen weiterbewegen (noch zu klären). Die Fläche unter der Stoßkurve berechnet sich zu

$$S = \int_0^{\tau} F(t) dt \quad \text{mit } \tau: \text{Stoßzeit.}$$

$F(t)$ bzw. $\vec{F}(t)$ sind i.A. nicht bekannt. Es genügt das Integral der Kraft zu betrachten. Hierzu wird die vektorielle Größe Stoßantrieb \vec{S} vereinbart

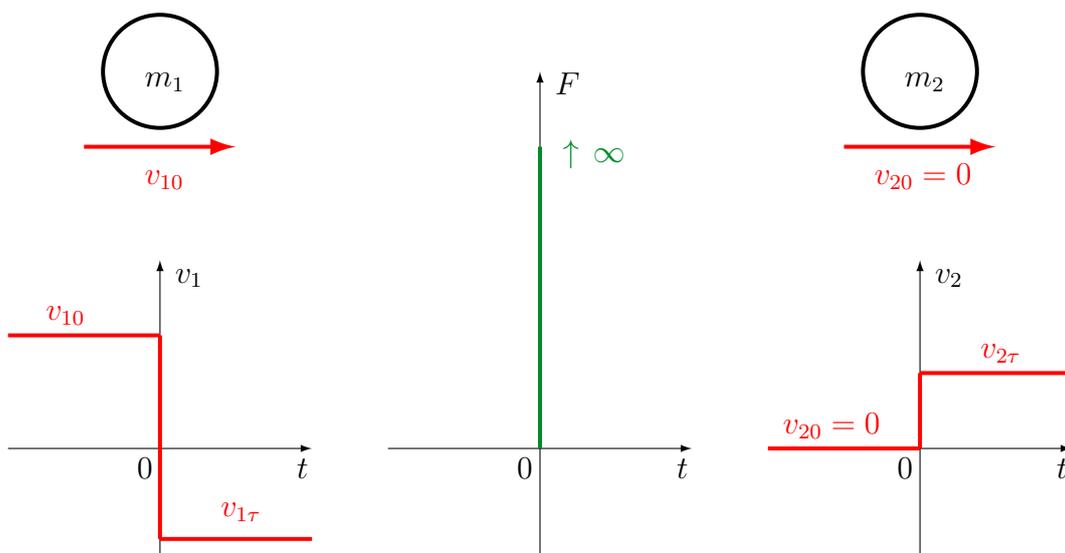
$$(I.4.1) \quad \vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt$$

τ ist typischerweise sehr klein, die Kräfte $F(t)$ bzw. $\vec{F}(t)$ sehr groß. Es wird vereinfachend angenommen dass τ gegen Null strebt und die Größe

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt \quad \text{endlich ist.}$$

Bei dem hier angesprochenen Problem „Null mal Unendlich“ sind prinzipiell alle Ergebnisse möglich. Von Null über endliche Werte bis Unendlich. Hier ist ein endlicher Wert zu erwarten.

Folge: Die Körper behalten während des Stoßes ($0 \leq t \leq \tau$) ihre Lage bei, ihre Geschwindigkeiten ändern sich unstetig.



Indizierung der Geschwindigkeiten v_{10} , $v_{1\tau}$, v_{20} , $v_{2\tau}$.

erster Index: Körper

zweiter Index: 0 unmittelbar vor dem Stoß, τ unmittelbar nach dem Stoß.

Zur weiteren Betrachtung wird der Impulssatz (s. Gleichung (I.3.2)) benötigt.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Nebenbemerkung: Bei starren Körpern mit konstanter Masse wird daraus

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_S}{dt} = m \vec{a}_S$$

$$\dim [I, \vec{I}] = \frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}} = 1 \text{ Ns}$$

Durch formale Integration über die Stoßdauer τ folgt

$$\int_0^\tau \vec{F}(t) dt = \int_0^\tau \frac{d\vec{I}}{dt} dt = \int_0^\tau d\vec{I} = \vec{I}(t = \tau) - \vec{I}(t = 0).$$

Mit der Definition des Stoßantriebs s. Gl. (I.4.1) gilt

$$\vec{S} = \int_0^\tau m \frac{d\vec{v}_S}{dt} dt = m [\vec{v}_S(t = \tau) - \vec{v}_S(t = 0)].$$

Zusammengefasst

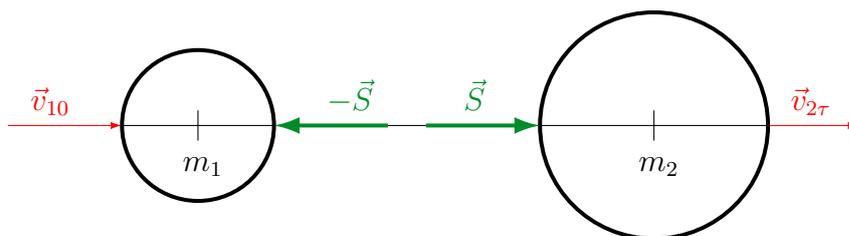
$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{I}(\tau) - \vec{I}(0) \\ \text{(I.4.2)} \quad \vec{S} &= m [\vec{v}_S(\tau) - \vec{v}_S(0)]. \end{aligned}$$

v_S beschreibt die Schwerpunktgeschwindigkeit eines Körpers. Der Hinweis auf den Schwerpunkt wird, weil selbstverständlich, alsbald weggelassen.

Stoßantriebe \vec{S} zwischen zwei Körpern werden mit der gleichen Methodik freigelegt, wie Kräfte. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{(I.4.3)} \quad -\vec{S} &= m_1 (\vec{v}_{1\tau} - \vec{v}_{10}) && \text{Körper 1} \\ \vec{S} &= m_2 (\vec{v}_{2\tau} - \vec{v}_{20}) && \text{Körper 2} \end{aligned}$$

Vereinfachend wird hierbei angenommen, dass die Wirkungslinien der Stoßantriebe \vec{S} und die Richtungen der von Null verschiedenen Geschwindigkeiten \vec{v}_{xy} mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte zusammenfällt.



Bei einem solchen geraden, zentrischen Stoß können keine Drehbewegungen entstehen.

Die Gleichungen (I.4.3) können zu einer Gleichung, der Impulserhaltung zusammengefasst werden

$$(I.4.4) \quad m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}.$$

4.1. Völlig elastischer Stoß

Die kinetischen Energien der beiden Körper bleiben erhalten

$$(I.4.5) \quad E_{\text{kin}1\tau} + E_{\text{kin}2\tau} = E_{\text{kin}10} + E_{\text{kin}20}$$

Ein vollkommen elastischer Flummi erreicht nach dem Stoß exakt die Höhe, aus der er losgelassen wurde. Die Realität ist ein wenig anders.

4.2. Völlig unelastischer Stoß

Die Körper trennen sich nach dem Stoß nicht mehr, ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind gleich.

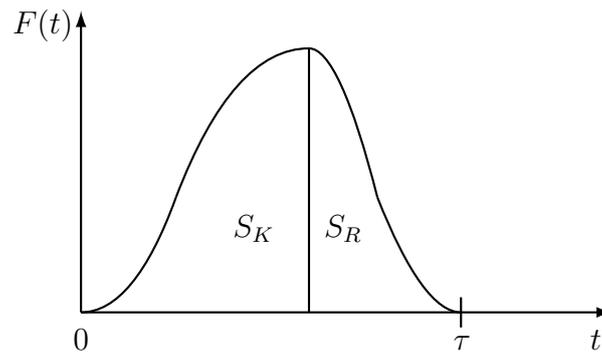
$$(I.4.6) \quad v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

Ein fallengelassener Klumpen aus Plastilin (Knetgummi) spring gar nicht hoch. Die Erde und der Klumpen haben nach dem Stoß eine gemeinsame Geschwindigkeit.

4.3. Teilelastischer (realer) Stoß

Definition einer experimentell zu ermittelnden Stoßzahl κ (kappa).

$$\kappa = \frac{S_R}{S_K}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$



S_K : Stoßantrieb der Kompressionsphase,

S_R : Stoßantrieb der Restitutionsphase,

Es gilt

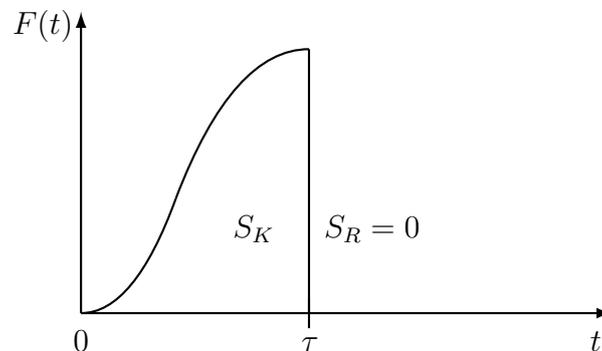
$$S_K + S_R = S = \int_0^{\tau} F(t) dt$$

Bei einem vollkommen elastischen Stoß gilt

$$\kappa = 1; \quad S_K = S_R$$

Bei einem vollkommen unelastischen Stoß gilt

$$\kappa = 0; \quad S_R = 0$$



Es gilt beim geraden zentrischen Stoß

$$(I.4.7) \quad \kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1.$$

Reale Stöße sind immer teilelastisch. Die beiden idealen Stoßarten können mit diesem Kalkül auch abgebildet werden.

4.4. Zusammenfassung

Beim geraden, zentrischen Stoß gilt immer:

1) Die Impulserhaltung

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$$

sowie eine zweite Bedingung, die von der Stoßart abhängig ist.

2a) Vollkommen elastischer Stoß: Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\tau}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\tau}^2$$

2b) Vollkommen unelastischer Stoß: Die Körper bleiben beieinander

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

2c) Teilelastischer (realer) Stoß: Stoßzahl κ

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

Wer die Energieerhaltung des vollkommen elastischen Stoßes scheut, kann die Bedingung des teilelastischen Stoßes anwenden. Es gilt dann $\kappa = 1$. ■

4.4.1. Übung, Stoß zweier Klötze

Gegeben: $v_{10} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $m_1 = 100 \text{ g}$, $m_2 = 20 \text{ g}$.

Gesucht: v_{20} damit Körper 1 nach dem Stoß zum Stillstand kommt ($v_{1\tau} = 0$) bei

- vollkommen unelastischem Stoß,
- vollkommen elastischem Stoß,
- realem Stoß mit $\kappa = 0,7$.

Lösung

Bei Stoßvorgängen gilt immer die Impulserhaltung

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$$

In dieser Aufgabe gilt für alle drei Fragestellungen $v_{1\tau} = 0$. Somit vereinfacht sich die Impulserhaltung zu

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_2 v_{2\tau}$$

a) vollkommen unelastischer Stoß

es gilt	$v_{1\tau} = v_{2\tau}$
hier daher	$v_{1\tau} = 0, \quad v_{2\tau} = 0$
in Impulserhaltung	$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0$
v_{20} ist gefragt	$v_{20} = -\frac{m_1}{m_2} v_{10}$
	$v_{20} = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) vollkommen elastischer Stoß

es gilt	$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\tau}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\tau}^2$
hier mit $v_{1\tau} = 0$	$m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2 = m_2 v_{2\tau}^2$

Es bleiben die Unbekannten v_{20} und $v_{2\tau}$. Letztere ist uninteressant und wird daher eliminiert.

Impulserhaltung	$v_{2\tau} = \frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20}$
Energieerhaltung	$m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2 = m_2 v_{2\tau}^2$
	$\frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + v_{20}^2 = v_{2\tau}^2$
$v_{2\tau}$ einsetzen	$\frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + v_{20}^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \right)^2$
	$\frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + v_{20}^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} v_{10}^2 + v_{20}^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} v_{10} v_{20}$
	$\frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} v_{10}^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} v_{10} v_{20} \quad \left \cdot \frac{m_2}{m_1} \right.$

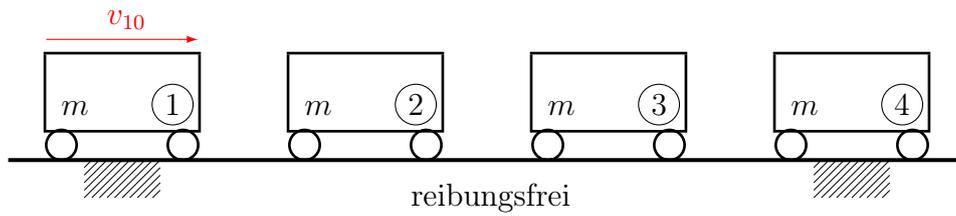
$$\begin{aligned}
v_{10}^2 &= \frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + 2 v_{10} v_{20} & | : v_{10} \\
v_{10} &= \frac{m_1}{m_2} v_{10} + 2 v_{20} \\
2 v_{20} &= v_{10} - \frac{m_1}{m_2} v_{10} \\
v_{20} &= \frac{1}{2} v_{10} \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \\
v_{20} &= -1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

c) realer Stoß, $\kappa = 0,7$

$$\begin{aligned}
\text{erneut Impulserhaltung} & \quad v_{2\tau} = \frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \\
\text{realer Stoß} & \quad \kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}} \\
\text{mit } v_{1\tau} = 0 & \quad \kappa = -\frac{v_{2\tau}}{v_{20} - v_{10}} \\
\text{einsetzen} & \quad \kappa = -\frac{\frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20}}{v_{20} - v_{10}} \\
\text{nach } v_{20} & \quad \kappa (v_{20} - v_{10}) = -\left(\frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \right) \\
& \quad \kappa v_{20} + v_{20} = -\frac{m_1}{m_2} v_{10} + \kappa v_{10} \\
& \quad v_{20} (\kappa + 1) = v_{10} \left(\kappa - \frac{m_1}{m_2} \right) \\
& \quad v_{20} = v_{10} \frac{\kappa - \frac{m_1}{m_2}}{\kappa + 1} \\
& \quad v_{20} = -1,265 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

Die Aufgabenteile a) und b) sind bei vorhandener Lösung für c) ein Kinderspiel. Bei Aufgabenteil a) gilt $\kappa = 0$ und bei Aufgabenteil b) gilt $\kappa = 1$. Probieren Sie es aus! Wenn alle drei Fälle gefragt sind, so berechnen Sie den realen Stoß als erstes und wenden anschließend diesen Trick an. ■

4.4.2. Übung, vier Eisenbahnwagen



Vier gleiche Eisenbahnwagen stehen auf ebener Schiene. Wagen ① stößt mit v_{10} auf den ruhenden Wagen ②. Weitere Stöße folgen. Wie groß ist zum Schluss v_{4r} , wenn alle Stöße

- vollkommen unelastisch,
- vollkommen elastisch,
- teilelastisch mit Stoßzahl κ sind?

Auf Grund der schlechten Erfahrung in der letzten Aufgabe werden wir als erstes den Aufgabenteil c) behandeln. Wenn dieses Ergebnis vorliegt, werden die Aufgabenteile a) und b) im Handumdrehen erledigt.

Lösung

Bei Stoßvorgängen gilt immer die Impulserhaltung

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}.$$

Bei teilelastischen (realen) Stößen gilt

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1.$$

Gesucht ist $v_{2\tau}$, uninteressant, daher zu eliminieren ist $v_{1\tau}$. Im vorliegenden Fall gilt $v_{20} = 0$, alle Massen sind gleich.

Impulserhaltung hier	$v_{10} = v_{1\tau} + v_{2\tau}$
teilelastisch hier	$\kappa = \frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{10}}$
$v_{1\tau}$ uninteressant	$v_{1\tau} = v_{10} - v_{2\tau}$
einsetzen	$\kappa = \frac{v_{2\tau} - v_{10} + v_{2\tau}}{v_{10}}$
nach $v_{2\tau}$	$2v_{2\tau} - v_{10} = \kappa v_{10}$
	$v_{2\tau} = \frac{1}{2} v_{10} (1 + \kappa).$

Jetzt stößt Wagen (2) auf (3). Aus der alten Geschwindigkeit $v_{2\tau}$ wird die neue v_{20} . Das vorherige Ergebnis wird angepasst

$$v_{3\tau} = \frac{1}{2} v_{20} (1 + \kappa)$$

mit v_{20} $v_{3\tau} = \frac{1}{4} v_{10} (1 + \kappa)^2$

Wagen (3) auf (4). Dabei wird aus $v_{3\tau}$ ein neues v_{30} .

$$v_{4\tau} = \frac{1}{2} v_{30} (1 + \kappa)$$

mit v_{30} $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10} (1 + \kappa)^3$

- | | |
|---|---|
| a) vollkommen unelastisch, $\kappa = 0$ | $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10}$ |
| b) vollkommen elastisch, $\kappa = 1$ | $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10} 2^3 = v_{10}$ |
| c) teilelastisch, $\kappa = 0,7$ | $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10} \cdot 1,7^3 = 0,614 \cdot v_{10}$ |



Teil II.

Akustik

Etwas abrupt wird an dieser Stelle ein thematisch abweichendes, abgeschlossenes Thema eingeschoben.

1. Schall

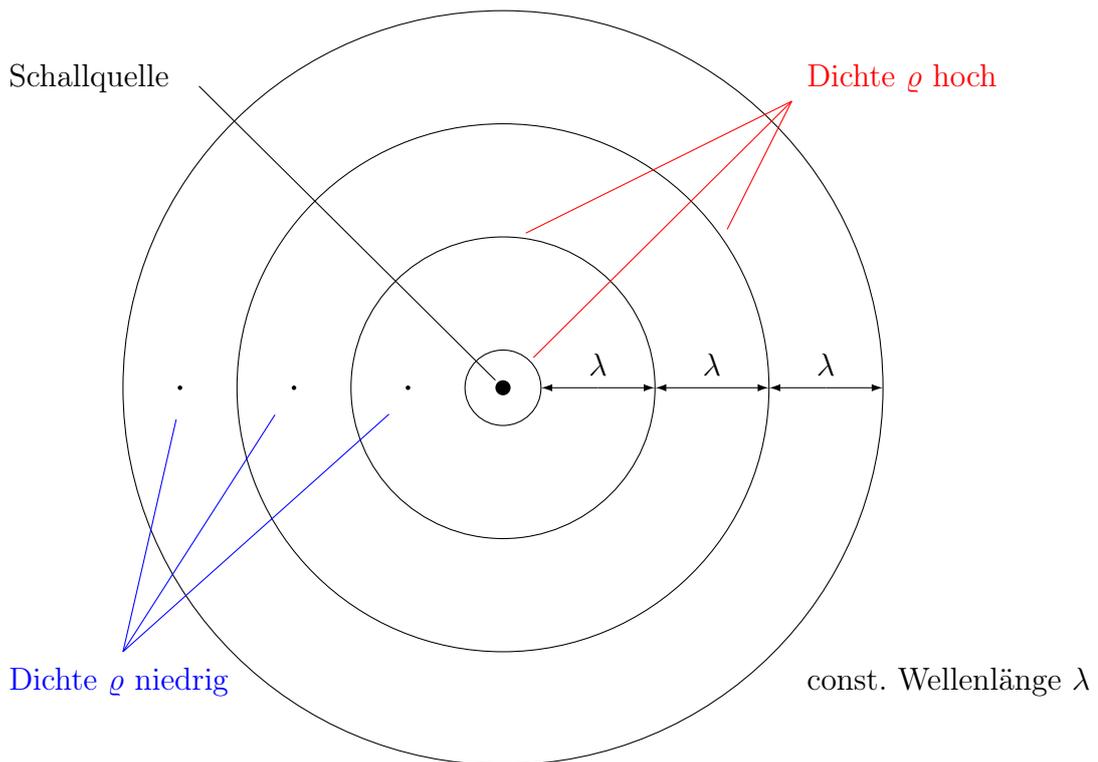
Schall ist ein Oberbegriff mechanischer Schwingungen elastischer Medien im Frequenzbereich zwischen 16 Hz und 16 kHz. Bisweilen lautet die Definition 20 Hz bis 20 kHz. Die elastischen Medien können sein:

- Feststoffe → Körperschall
- Flüssigkeiten → Flüssigkeitsschall
- Gase → Luftschall

Körperschall können wir auch hören. Wenn Sie eine Armbanduhr haben, die tickt, können Sie folgendes ausprobieren: Halten Sie die Uhr zwischen den Zähnen fest, ohne das Uhrglas zu zerbeißen. Wenn Sie sich nun die Ohren zuhalten, hören Sie es im Inneren Ihres Kopfes ticken. Der Körperschall überträgt sich vom Uhrglas oder Gehäuseboden über die oberen Schneidezähne, den Schädelknochen bis ins Innenohr.

Auch Flüssigkeitsschall können wir hören. Sie schwimmen in einem Gewässer und sehen weit entfernt ein Motorboot fahren. Es ist so weit weg, dass Sie es kaum hören können. Nun tauchen Sie den Kopf unter Wasser. Erstaunlich laut hören Sie das Kreischen des Propellers. Erschreckend ist erneut der Eindruck, dass das Motorboot in Ihrem Kopf ist. Das liegt daran, dass bei Körper- und Flüssigkeitsschall unsere Richtungsorientierung versagt. Bei Luftschall berechnen wir unbewusst aus dem Laufzeitunterschied zwischen linkem und rechtem Ohr die grobe Richtung aus der der Schall zu uns kommt. Bei Körper- und Flüssigkeitsschall ist die Schallgeschwindigkeit erheblich größer, so dass die Laufzeitdifferenz viel zu gering ist. Wenn an beiden Ohren der Schall gleichzeitig ankommt, auch wenn wir den Kopf drehen, wo ist dann die Geräuschquelle? Scheinbar zwischen den Ohren.

Hier betrachten wir ausschließlich Luftschall. Es sind Schwankungen der Luftdichte. Es folgen Druckschwankungen, die sich örtlich und zeitlich ausgleichen wollen. Wir wählen einen Ton mit der Frequenz $f = \text{const}$.



Es gilt

$$c = \lambda f$$

mit

c : Schallgeschwindigkeit $c \approx 343$ m/s, **genauerer später**

λ : Wellenlänge

In Gasen und Flüssigkeiten erfolgt die Wellenausbreitung als Längs- oder Longitudinalwellen nach allen Seiten. Dies führt zu Kugelwellen, sofern die Schallquelle klein gegenüber der Wellenlänge ist. In großer Entfernung, können vereinfachend ebene Wellen angenommen werden.

Folgende Überlegung hilft der Anschauung: Das Gehäuse einer sehr lauten Maschine schwingt, die Gehäuseoberfläche hebt und senkt sich dadurch. Luftmoleküle werden von der sich hebenden Gehäuseoberfläche zusammengeschoben, die Dichte steigt lokal. Bei sich senkender Gehäuseoberfläche werden die Luftmoleküle auseinandergezogen, die Dichte sinkt. Nun ist es auch glaubwürdig, dass sich die Luftmoleküle radial hin und her bewegen, ohne dabei weit von ihrer Ausgangslage weg zu kommen. Lediglich die Welle bewegt sich radial weg. Da die Luftmolekülschwingung und die Wellenausbreitung in gleicher radialer Richtung erfolgen, sind es Longitudinalwellen.

Ein ganz ähnliches, wenn auch flaches Bild sehen wir, wenn wir einen Stein in eine Pfütze werfen. Auch hier breiten sich die Wellen radial aus. Die Wassermoleküle schwingen hingegen auf und ab. Das sind dann Transversal- oder Querwellen.

2. Schallfeldgrößen

Definition: Ein Schallfeld ist ein Raum, der mit Materie – in unserem Fall mit Luft – gefüllt ist, in dem sich Schallwellen ausbreiten können.

Merke: Bei einem Weltraumspaziergang kann man sich nichts zurufen, da zwischen den beiden Astronauten Vakuum herrscht. Entweder Funk oder Kopf an Kopf mit den Helmen, dann gibt es eine Körperschallübertragung. Im Inneren der Helme gibt es jeweils ein Schallfeld

Wir werden jetzt eine sehr lange Liste von physikalischen Größen kennenlernen, die das Geschehen im Schallfeld beschreibt. Wirklich wichtig ist die Zweite (Schalldruck) und die Letzte (Schalldichte). Der Rest dazwischen ist nur Mittel zum Zweck.

Dichte

$$\rho = \rho_{-} + \rho_{\sim}$$

mit ρ_{-} : Gleichanteil der Dichte (z.B. 1,2 kg/m³), ρ_{\sim} : Wechseldichte.

Druck

$$p = p_{-} + p_{\sim}$$

mit p_{-} : Gleichanteil des Drucks (z. B. 1013 hPa), p_{\sim} : Schallwechseldruck, später zur Vereinfachung nur noch Schalldruck genannt.

Geschwindigkeit

$$v = v_{-} + v_{\sim}$$

mit: v_{-} : Gleichanteil der Geschwindigkeit (Windgeschwindigkeit), v_{\sim} : Schallwechselgeschwindigkeit, später zur Vereinfachung Schallschnelle genannt.

Mit der Schallschnelle bewegen sich Luftmoleküle um ihre Ruhelage bei Flaute ($v_{-} = 0$). Die Schallschnelle ist nicht mit der Schallgeschwindigkeit zu verwechseln. Letztere ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Schallausschlag Materieteilchen, hier Luftmoleküle, werden im Schallfeld longitudinal ausgelenkt, dieser Schallausschlag ξ (ksi) ist bei sinusförmiger Anregung

$$\xi = \hat{\xi} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

2.1. Schalldruck

Der Schalldruck, der ja korrekt bezeichnet Schallwechseldruck heißt, ist in der Akustik eine sehr wichtige Größe. Sie ist letztlich die einzige, die mit vernünftigem Aufwand gemessen werden kann, indem man ein Mikrofon aufstellt.

Wie kommt es zum Schalldruck? Die Oberfläche eines Maschinengehäuses schwingt, dabei werden Luftmoleküle verdrängt. Lokal erhöht und erniedrigt sich die Luftdichte und damit der Druck. Diese Druckänderungen nennen wir Schalldruck, bisher mit p_{\sim} bezeichnet. In Zukunft vereinfachen wir erneut, die Tilde wird weggelassen.

Künftig gilt: $p_{\sim} = p$.

Da Druckschwingungen nur im Frequenzbereich 16 Hz bis 16 kHz als Schall bezeichnet werden, stellen wir fest, dass die thermodynamischen Zustandsänderungen sehr schnell erfolgen. Da keine Zeit für den Austausch von Wärme vorhanden ist, sind schnelle Zustandsänderungen adiabatisch, auch ohne die Thermoskanne, an die man bei adiabatisch immer denkt.

$$\frac{p}{p_{-}} = \kappa \frac{\varrho}{\varrho_{-}}$$

mit $p_{-} = 1013 \text{ hPa}$ (Wetterabhängig), $\varrho_{-} = 1,189 \text{ kg/m}^3$, $\kappa = 1,4$.

Schalldrücke können Werte über sieben Zehnerpotenzen annehmen ($2 \cdot 10^{-5} \dots 20$) Pa. Zwischen ganz leise und ganz laut liegt demzufolge ein Faktor von 10 Millionen. Das ist nicht sonderlich sinnvoll, zumal unsere Ohren keine linearen Sensoren sind.

Eine logarithmische Notation ist sinnvoll, die Schalldrücke werden in Pegel umgerechnet:

$$(II.2.1) \quad L_p = 20 \log \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} \quad \text{in dB.}$$

mit

L_p : Schalldruckpegel

\tilde{p}_0 : Bezugsschalldruck (Effektivwert), $\tilde{p}_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$

\tilde{p} : Effektivwert des vorliegenden Schalldrucks.

dB: Dezibel

Eine Tilde (\sim) im Index wurden wir vor kurzem los, jetzt taucht eine andere oben auf p auf. Wozu? Es geht hier um den Effektivwert einer zeitveränderlichen Größe. Es ist der gleiche Zusammenhang, wie wir ihn in Elektrotechnik kennengelernt hatten, nur die Notation ist anders: Tilde hier, Großbuchstabe da.

Zum Bezugsschalldruck \tilde{p}_0 : Hier wurde ein runder Wert eines extrem kleinen Druckes gewählt. Er entspricht der Hörschwelle. Würde man einen 1000 Hz Piepton mit einem Schalldruck $\tilde{p} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ vorspielen, würde die Hälfte der Probanden sagen, dass sie etwas hören können. Dieser Test wurde vermutlich mit Kindern durchgeführt, die noch

nie lauten Geräuschen ausgesetzt waren. Kein Erwachsener kann das hören.

Wie groß ist dieser Druck? Wir machen ein abwegiges Gedankenexperiment und stellen uns einen statischen Druck von $p = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa vor. Nehmen Sie zwei Gramm Sand, das dürften etwa zwei größere Sandkörner sein und verstreichen Sie die auf einem Quadratmeter.

Wofür steht Dezibel? dB sieht aus wie eine physikalische Einheit, ist aber keine. Es ist lediglich der Hinweis darauf, dass hier ein logarithmischer Maßstab angewandt wurde, also ein Pegel berechnet wurde, der immer einheitenlos ist. Das 'bel' geht auf Alexander Graham Bell zurück, einem der Erfinder des Telefons. Dezi steht für den Faktor 10. Dummerweise sehen wir einen Faktor 20 bei der Schallpegelberechnung. Später werden wir feststellen, dass es ziemlich schlau ist, die Schalldrücke zu quadrieren, bevor sie in Pegel umgerechnet werden. Daher hat der Faktor 10 noch einen Faktor 2, das sehen wir gleich besser.

Addition von Schallpegeln

Eine logarithmische Darstellung führt zu merkwürdigen Überraschungen. 0 dB ist nicht etwa absolute Stille, sondern ein Geräusch an der Hörschwelle. Wenn wir zwei baugleiche Schallquellen mit dem gleichen Schalldruckpegel (z.B. 70 dB) haben, und sie gleichzeitig hören, dann hören wir nicht etwa 140 dB, sondern 73 dB. Diese komische Rechnung gilt überall: $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$, $100 \text{ dB} + 100 \text{ dB} = 103 \text{ dB}$. Das schauen wir uns genauer an.

Gegeben sind zwei Schallquellen mit den Schalldrücken \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 . Der Gesamtschalldruckpegel berechnet sich zu:

$$L_{p\text{ges}} = 10 \log \left[\left(\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_0} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_0} \right)^2 \right] \quad \text{in dB.}$$

Jetzt haben beide Schallquellen den gleichen Schalldruck $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$.

$$L_{p\text{ges}} = 10 \log \left[\left(\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_0} \right)^2 \cdot 2 \right] \quad \text{in dB.}$$

$$L_{p\text{ges}} = 10 \log \left(\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_0} \right)^2 + 10 \log 2 \quad \text{in dB.}$$

$$L_{p\text{ges}} = 20 \log \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_0} + 3 \quad \text{in dB.}$$

Über den dicken Daumen kann zu Schalldruckpegeln gesagt werden, dass eine Pegelzunahme um 3 dB nicht überaus deutlich zu hören ist; eine Pegelzunahme um 10 dB in etwa als Verdoppelung der Lautstärke empfunden wird. ■

Weitere Merkwürdigkeiten im Zusammenhang mit dem Schalldruck

Lauteste Geräusche erzeugen Schalldrücke von 20 Pa (Schmerzgrenze), entsprechend 120 dB. Wenn wir uns überlegen, dass das Wettergeschehen Luftdruckschwankungen zwischen 960 und 1020 hPa kennt, stellen wir fest, dass dabei eine Druckdifferenz von 6000 Pa entsteht. Warum sind Wetteränderungen nicht extrem laut? Anderes Beispiel: Ein Taucher taucht ab auf 10 m Wassertiefe. Der Druck steigt dabei von 1 bar (Absolutdruck an der Oberfläche) auf zwei bar. Die Druckdifferenz beträgt 10^5 Pa. Warum läuft er nicht schreiend davon, weil es furchtbar laut sein müsste?

Antwort: In beiden Fällen handelt es sich um langsame Druckänderungen. Erst Druckänderungen mit einer Frequenz von 16 Hz oder mehr wird von den Ohren als Schall registriert. Langsame Druckänderungen gleichen sich in unseren Ohren so aus, dass wir sie nicht merken. Das Trommelfell ist unsere 'Mikrofonmembran'. Außen herrscht der Umgebungsdruck, innen herrscht der Druck im Mittelohr. Diese Drücke sind im Mittel gleich, denn es gibt eine 'Rohrleitung' vom Mittelohr über die Nasenhöhle zur Umgebung. Es ist die Eustachische Röhre, sie ist recht eng. Druckausgleich über lange Zeit geht gut über diese Röhre, schneller Druckausgleich geht nicht. Gelegentlich muss dieser Druckausgleich erzwungen werden. Taucher halten sich die Nase zu und pressen bei geschlossenem Mund Luft in die Nase. Das öffnet die Eustachische Röhre und sorgt für Druckausgleich. Der gleiche Trick ist im Flugzeug beim Landeanflug empfehlenswert. Ohne diesen erzwungenen Druckausgleich schmerzen die Ohren. Daher brüllen häufig kleine Kinder während des Landeanflugs. Bewegungen des Unterkiefers können die Eustachische Röhre auch öffnen. Den ganz kleinen Kindern rechtzeitig die Nuckelflasche zu geben hilft. Größeren Kindern, die den Druckausgleich noch nicht beherrschen, gibt man ein Bonbon oder – sehr effektiv – einen Kaugummi (nicht bei einem Anflug auf Singapur). Das Brüllen selbst ist übrigens auch hilfreich. Ganz übel ist es, wenn stark verschluckt geflogen oder getaucht wird. Die E.-Röhre ist dann zugequollen; es droht ein sog. Barotrauma (sehr schmerzhaft).

2.2. Schallschnelle

Auch sie wird logarithmisch angegeben:

$$(II.2.2) \quad L_v = 20 \log \frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_0} \quad \text{in dB,} \quad \text{mit } \tilde{v}_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s.}$$

Zur Erinnerung, Schnelle ist die Schwinggeschwindigkeit, mit der ein Luftmolekül um die Ruhelage schwingt. \tilde{v}_0 ist die Schnelle bei einem Geräusch an der Hörschwelle (effektiv). Stellen Sie sich diesen Geschwindigkeitsbetrag vor, da müssen Sie einer Schnecke Valium geben.

2.3. Schallkennimpedanz

$$Z_0 = \frac{\tilde{p}}{\tilde{v}} = \varrho_- \cdot c$$

mit

ϱ_- : Ruhedichte des Mediums,

c : Schallgeschwindigkeit in diesem Medium,

Z_0 : Schallkennimpedanz, bei Luft gilt $Z_{0\text{Luft}} = 408 \text{ Ns/m}^3$.

Impedanz ist ein Wellenwiderstand und beschreibt hier das Schallausbreitungsmedium und nicht das Geräusch. Das Formelzeichen Z_0 erinnert an den Scheinwiderstand Z aus der Elektrotechnik, der im englischen Sprachgebrauch impedance genannt wird.

Wir stellen fest, dass Schalldruck und Schallschnelle in einem bestimmten Medium ein festes Verhältnis haben. Es genügt daher, den Schalldruck zu messen und über Z_0 in Schallschnelle umzurechnen.

2.4. Schallgeschwindigkeit

Für ideale Gase gilt

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_-}{\varrho_-}}$$

Unter Normalbedingungen gilt für Luft bei 20°C, $\kappa = 1,4$ (Isentropenexponent), $p_- = 101\,325 \text{ Pa}$, $\varrho_- = 1,189 \text{ kg/m}^3$: $c = 343 \text{ m/s}$.

Mit der Schallgeschwindigkeit breiten sich die Schallwellen aus. Die Luftmoleküle werden dabei nicht transportiert, sie schwingen viel langsamer um ihre Ruhelage, bleiben also am Ort. Diese Schwinggeschwindigkeit ist, wie wir wissen, die Schallschnelle.

3. Energieinhalt des Schallfeldes

3.1. Schallintensität

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt$$

Diese Integration stellt ein nicht unerhebliches Problem dar, wenn wir kugelförmige Wellen haben. Man kann das Integrationsproblem umgehen, indem ebene Wellen angenommen werden.

Für ebene Schallwellen gilt:

$$I = \tilde{p} \tilde{v}$$

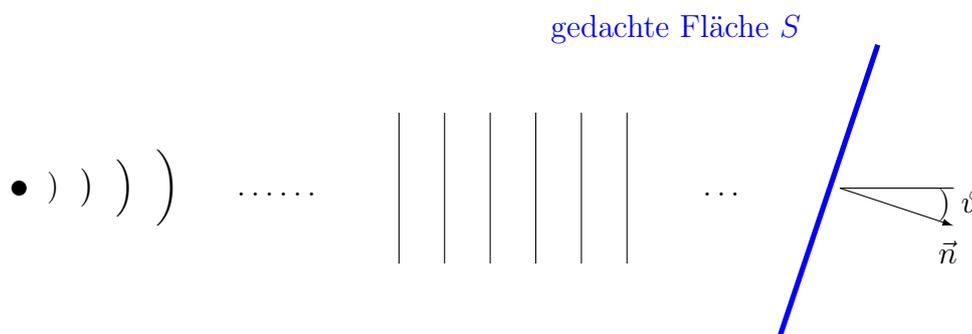
Die logarithmische Darstellung lautet

$$(II.3.1) \quad L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ in dB, mit } I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2.$$

Unter idealen (ebenen) Wellenbedingungen ist die Schallintensität proportional dem Quadrat des Schalldrucks. Jetzt ahnen wir, dass es eine schlaue Idee war, den Schalldruck zu quadrieren.

3.2. Schalleistung

$$P = \int_S I \cos \vartheta dS$$



Links befindet sich eine punktförmige Schallquelle, die kugelförmige Wellen erzeugt. In hinreichend großem Abstand wird der Krümmungsradius so groß, dass ebene Wellen angenommen werden können. Wir denken uns eine Art Bilanzfläche S , deren Normalenvektor \vec{n} zunächst um den Winkel ϑ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigt ist.

Schalleistung ist die Schallenergie, die pro Zeiteinheit durch die gedachte Fläche S strömt. Bei gleichmäßiger Intensitätsverteilung I , d.h. bei ebenen Wellen, und günstiger Flächenorientierung d.h. $\vartheta = 0$ gilt

$$P = I S$$

Auch die Schalleistung wird logarithmisch dargestellt

$$(II.3.2) \quad L_W = 10 \log \frac{P}{P_0} \quad \text{in dB,} \quad \text{mit } P_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W.}$$

Hier ist ein blöder Fehler passiert. Die Schalleistung hat das korrekte Formelzeichen P , der Schalleistungspegel bekommt das völlig irreführende Symbol L_W . Es ist schon verständlich, dass die systematisch korrekte Bezeichnung L_P zu leicht mit dem Symbol des Schalldruckpegels L_p verwechselt werden kann. Den Buchstaben W zu wählen, ist trotzdem selten dämlich, weil W üblicherweise die Größe Arbeit beschreibt und eben nicht die Leistung. Da waren Ignoranten am Werk. Es hilft nichts, der Schalleistungspegel hat künftig die Bezeichnung L_W , ob es uns gefällt oder nicht.

Einige typische Schalleistungen und ihre Pegel

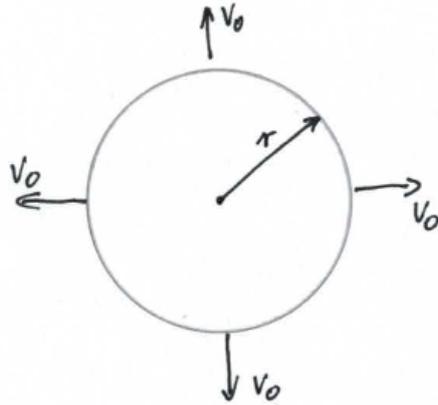
Unterhaltung	$7 \cdot 10^{-6} \text{ W}$	68 dB
Stimme (Höchstwert)	$2 \cdot 10^{-3} \text{ W}$	93 dB
Trompete (fortissimo)	0,3 W	115 dB
Autohupe	5 W	127 dB
Großlautsprecher	100 W	140 dB
Alarmsirene	1000 W	150 dB

Die Leistungsangaben bei Autohupe und Großlautsprecher scheinen sehr gering auszufallen. Ein Autoradio wird gerne mit 100 W Ausgangsleistung beworben und betreibt definitiv keinen Großlautsprecher. Tatsächlich geht es hier um Schalleistung und nicht um die elektrische Leistung, die in den Lautsprecher hineingesteckt wird. Ein Großlautsprecher, wie er zum Bühnenequipment der Rolling Stones gehören könnte, gibt eine Schalleistung von etwa 100 W ab und dürfte mit einigen Kilowatt elektrisch angesteuert werden. Rolling Stones? Bei dem Alten ist wieder einmal die Zeit stehen geblieben.

4. Schallausbreitung

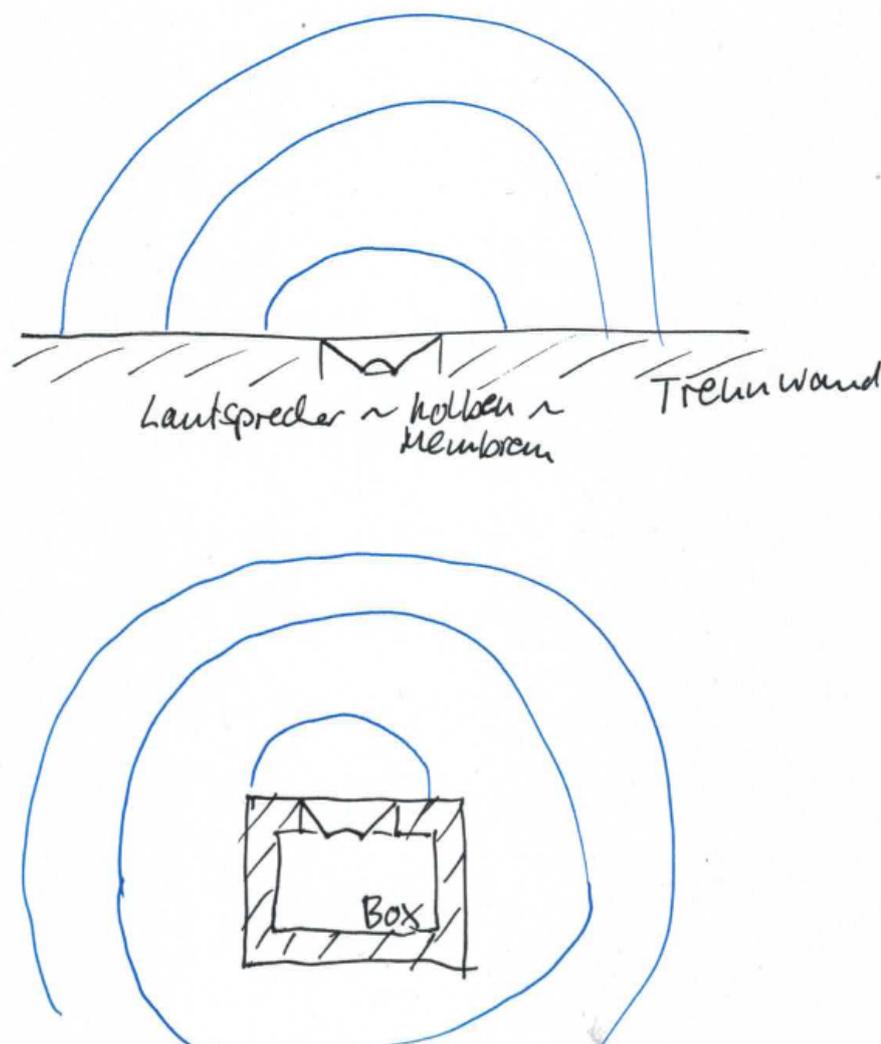
4.1. Strahlertypen

- Kugelstrahler (pulsierende Kugel) mit überall gleicher Oberflächenschnelle v_0 .



Es werden ungerichtete Kugelwellen abgestrahlt. Das ist sehr einleuchtend. Es ist jedoch kaum möglich, einen Kugelstrahler zu bauen. Wir werden feststellen, dass die Notwendigkeit hierzu gar nicht besteht.

- Kolbenstrahler, Membranstrahler. Bei kleinen Durchmessern $D \ll \lambda$ (Wellenlänge λ), strahlen auch Kolbenstrahler Kugelwellen ab. Voraussetzung: Die Schallabstrahlung an der Rückseite hat keinen Einfluss.



In alten Kinos war hinter der Leinwand ein leerer Raum. Die Lautsprecher waren in die Trennwand zwischen Zuschauerraum und dieser Rumpelkammer eingelassen. Die Trennwand wurde mit Glaswolle schallisoliert. So hat die Abstrahlung der Lautsprecherrückseite keinen Einfluss auf das akustische Geschehen im Zuschauerraum. Den gleichen Effekt hat man, wenn der Lautsprecher in eine gut isolierte Box eingebaut wird.

Einige werden feststellen, dass ihre Boxen hingegen vorne ein Loch haben. Es kann mit der Isolation wohl nicht so ernst gemeint sein. Doch. Diese Löcher sind Mündungen eines Rohres mit definierter Länge. Die Druckverhältnisse an Vorder- und Rückseite der Lautsprechermembran ist um 180° phasenverschoben. Um der Box einen besondern „punch“ im Bassbereich zu verpassen, leitet man das Rückseitengeschehen des Tieftöners über eine Umwegleitung definierter Länge (Bassreflexrohr) zur Vorderseite. So wirken Rückseite und Vorderseite gleichphasig und addieren ihre Wirkung. Bum-bum-Musik-Liebhaber brauchen das, Klassik-Puristen verabscheuen das.

4.2. Wellengleichung

Kennzeichnend für Schwingungen, die sich wellenförmig ausbreiten, ist die Verknüpfung der örtlichen und zeitlichen Abhängigkeit einer physikalischen Größe – hier des Schalldrucks p .

Für ebene Wellen gilt:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Dieser auch „Wellengleichung“ genannte Zusammenhang ist eine partielle hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung.

In der technischen Akustik besteht keine Notwendigkeit, diese DGL zu lösen. Wer Interesse hat, schaue unter den beschreibenden Stichworten nach und mache sich auf Einiges gefasst.

5. Emission und Immission

Emission (lat. *emittere*, hinausenden) ist das Ausschicken einer Wirkung. Dies erfolgt bei

- Lichtquellen
- Radiosendern
- Fabrikschornsteinen
- Geräuschquellen

in der Regel unerwünscht im Sinne einer Umweltverschmutzung.

Immission ist das Erleiden einer solchen Wirkung an einem Ort, der i.d.R. vom Ort der Emission verschieden ist.

- Störlicht von Leuchtreklamen
- Elektrosmog
- Staub- und Gifteinwirkung, Klimaschädigung
- Lärmbelästigung

In der Akustik sind die beschreibenden Größen

Schallemission: Schalleistungspegel L_W in dB (eigentlich L_{WA} in dB(A))³. Beschrieben wird die Eigenschaft der Geräuschquelle.

³Die hier schon vorweggenommene A-Bewertung wird zu einem späteren Zeitpunkt behandelt.

Schallimmission: Schalldruckpegel L_p in dB (eigentlich L_{pA} in dB(A))³. Beschrieben wird die Schallwirkung am Aufenthaltsort von Menschen in einem Raum oder vor dem geöffneten Fenster.

6. Messung des Schalleistungspegels nach DIN 45635

Die Messung des Schalldruckpegels ist unproblematisch. Geeignete Geräte, bestehen aus einem Mikrofon, ein wenig Hard- und Software und einem Display, das den jeweiligen Schalldruckpegel in dB anzeigt. Ein Messgerät für Schalleistungspegel ist nicht verfügbar. Vielmehr muss aus mehreren Schalldruckpegelmessungen auf den Schalleistungspegel geschlossen werden.

Wir erinnern uns, dass Im Schalldruckpegel der Schalldruck quadriert vorliegt, dass Schallschnelle und Schalldruck ein festes Verhältnis zueinander haben, dass die Schallintensität im Idealfall $I = p v \sim p^2$ ist. Informationen des Schalldruckpegels können daher direkt in die Berechnung des Schalleistungspegels einfließen. Lediglich die gedachte Fläche S muss zusätzlich berücksichtigt werden.

Beim Hüllflächenverfahren wird eine gedachte Messfläche eingeführt. Sie umgibt die zu untersuchende Geräuschquelle (z.B. eine Maschine) mit einem Mindestabstand d . Typischerweise wird $d = 1$ m gewählt.

Die Hüllfläche umschließt dabei nicht die zu untersuchende Maschine allseitig mit Abstand d sondern stellt eine einfache geometrische Form dar, die mindestens einen Abstand von d wahrt, gerne aber mehr.

Hüllflächenformen

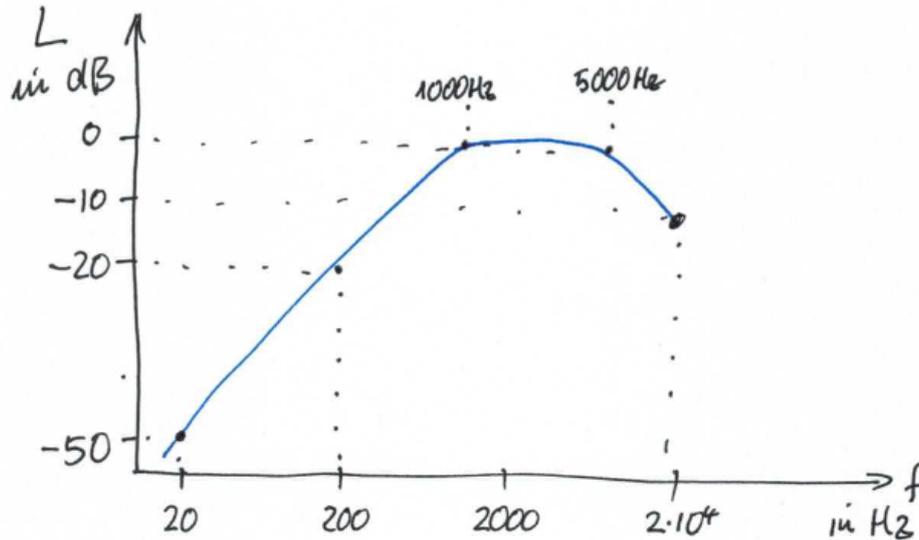
Kugel oder Halbkugel über reflektierender Ebene. Diese Hüllflächenform liefert genaue Ergebnisse, sie ist meist schwer zu realisieren.

Quader, zum Teil von reflektierenden Wänden, Decken oder Fußböden begrenzt, die dann nicht zur Hüllfläche gehören. Diese Form ist leicht zu realisieren, liefert aber ungenauere Ergebnisse.

Auf der Hüllfläche befinden sich in regelmäßigem Abstand Messpunkte (5 bis 20, je nach Genauigkeit), an denen mit Schalldruckpegelmessgeräten der Schalldruckpegel L_p gemessen wird. ■

Bewertungsfiler

Die frequenzabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs wird bei der Messung von L_p durch das Bewertungsfiler A nach IEC nachgebildet.



Damit ergeben sich A-bewertete Schalldruckpegel L_{pA} in dB(A).

Menschen sind in niedrigen und in hohen Frequenzbereichen ziemlich schwerhörig. Am besten hören sie im Bereich zwischen 1000 Hz und 5000 Hz. In diesem Frequenzbereich findet die Sprache statt. Aus Sicht der Evolution ist es sinnvoll, dass der Frequenzbereich, in dem Kommunikation stattfindet auch am besten erfasst wird.

Nun geht es aber um Geräusche, die störend sind. In einem Frequenzbereich, in dem der Mensch ohnehin kaum hört, darf Lärm relativ laut sein, er stört ja nicht. Beispiel: Eine Geräuschquelle erzeugt Lärm mit der Frequenz von 20 Hz. Vom gemessenen Schalldruckpegel können gemäß Bewertungsfiler A 50 dB abgezogen werden. Es liegt dann der A-bewertete Schalldruckpegel L_{pA} in dB(A) vor.

Leider ist das eine Sichtweise, die nur dem Menschen nützt. Jenseits von 20 kHz hört kein Mensch mehr etwas. In diesem Bereich machen wir sehr viel Krach, der uns nicht stört. Echolot und insbesondere militärisches Sonar verwendet starke Schwingungen im Ultraschallbereich, die Meeressäuger hören können. Es gibt Theorien, die vermuten, dass das rätselhafte Strandeln von Delfinen und Walen auf einen Orientierungsverlust durch Schädigung des Gehörs zurückzuführen ist.

Für die Bestimmung des Schalleistungspegels sind nun alle Vorkenntnisse vorhanden.

Der ebenfalls A-bewertete Schalleistungspegel einer Geräuschquelle (z.B. einer Maschine) berechnet sich zu

$$(II.6.3) \quad L_{WA} = \bar{L}'_{pA} - K_0 - K_1 - K_2 + L_S \quad \text{in dB(A)}$$

1
2
3
4
5

Die einzelnen Bestandteile dieses Ausdrucks werden hier erläutert.

1. \bar{L}'_{pA} : Mittelung der A-bewerteten Schalldruckpegel L_{pAi} an den Messpunkten $i = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{L}'_{pA} = 10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 10^{0,1 \cdot L_{pAi}} \right) \quad \text{in dB(A)}$$

Hier werden nicht die Dezibel-Werte gemittelt, sondern die Schalldrücke. Die einzelnen Schalldruckpegel L_{pAi} werden entlogarithmiert (10 hoch), gemittelt und wieder logarithmiert.

Schalldruckpegelmessgeräte beherrschen diese Vorgehensweise ohne Weiteres. In der Realität bringt man sein Messgerät an Messpunkt 1, drückt die Starttaste, misst z.B. 30 Sekunden lang, drückt die Pausetaste, bewegt sich zu Messpunkt zwei, drückt erneut die Starttaste usw. Das Messgerät mittelt dabei entsprechend obiger Gleichung

2. K_0 : Korrekturwert in dB für Abweichungen von Normluftdruck und Temperatur. K_0 kann häufig vernachlässigt werden.

Zur Erinnerung: In der Schalleistung steckt das Produkt $p v$. Druck und Schnelle haben ein festes Verhältnis zueinander, welches Schallkennimpedanz genannt wird. Deshalb verwenden wir p^2 als Berechnungsgröße der Schalleistung. Die Schallkennimpedanz ist jedoch leicht von Luftdruck und Temperatur abhängig, weshalb bei starken Abweichungen von den Normbedingungen korrigiert werden soll.

3. K_1 : Korrektur für Fremdgeräuscheinfluss.

$$K_1 = -10 \log \left(1 - \frac{1}{10^{0,1 \Delta L}} \right) \quad \text{dB}$$

mit

$$\Delta L = \bar{L}'_{pA} - \bar{L}''_{pA}$$

s. 1 gleiche Messung bei stillgesetzter Maschine

Es werden zwei nahezu identische Messungen vorgenommen. Einmal werden alle Messpunkte bei laufender Maschine erfasst (\bar{L}'_{pA}). Dann wird die Maschine stillgesetzt und die Messung wiederholt (\bar{L}''_{pA}).

Aus der Pegeldifferenz ΔL kann trotz obiger, komplizierter Gleichung sehr einfach auf K_1 geschlossen werden:

ΔL in dB	3	6	9	>10
K_1 in dB	3	1,3	0,6	0

Wir erinnern uns, wenn eine zweite identische Lärmquelle hinzukommt, erhöht sich der Pegel um 3 dB. Wenn bei dieser Messung eine Pegeldifferenz von 3 dB auftaucht gilt, dass das Fremdgeräusch genau so laut ist, wie das Maschinengeräusch. Daher werden 3 dB abgezogen und gut ist.

Ab einer Pegeldifferenz von 10 dB ist eine Korrektur nicht mehr nötig. Wenn also das Fremdgeräusch gefühlt halb so laut ist, wie die Maschine, braucht nicht korrigiert zu werden. Dies ist eine weitere Überraschung des logarithmischen Maßstabs.

Sollte die Pegeldifferenz $\Delta L < 3$ dB sein, so ist das Fremdgeräusch lauter als die Maschine. Eine sinnvolle Messung ist dann nicht möglich.

4. K_2 : Korrekturwert für den Umgebungseinfluss.

Stellen Sie sich folgendes Gedankenexperiment vor: Sie betreiben als Lärmquelle einen Winkelschleifer einmal in einem kleinen rundum gefliesten Badezimmer, ein anderes mal in einem großen Wohnzimmer mit Gelsenkirchener Barock-Ausstattung. Dicker Teppichboden, schwere Brokatvorhänge, Sofas, in denen man versinkt. Die Flex wird im Badezimmer viel lauter empfunden. Beim Schallleistungspegel geht es aber um die Emission (Eigenschaft) der Flex.

Unter idealen Umgebungen wie in einem schalltoten Raum oder im Freifeld gilt $K_2 = 0$.

Das ideale Freifeld ist eine Sandwüste. Eine grüne Wiese ist auch nicht schlecht. Schalltote Räume sind extrem schallisolierte Räume, in denen Schallwellen nicht reflektiert werden. Sie textlich zu beschreiben, wäre sehr umständlich. Suchen sie auf der Videoplattform Ihres Vertrauens nach „Schalltoter Raum“. Das Video von „Veritasium“ beschreibt solche Räume recht gut. Der Aufenthalt darin ist am Anfang wirklich sehr unangenehm. Da jeder akustische Eindruck fehlt, hören Sie plötzlich die Strömungsgeräusche ihres Blutkreislaufs. Manche bekommen daher Panik, weil der Eindruck entsteht, das hört jetzt auch gleich auf und das Herz bleibt stehen. Es stellt sich ein klaustrophobisches Gefühl ein, als sei man allseits von Schaumgummi oder Watte umgeben. Dass man dabei auf einem weitmaschigen Netz aus Stahldrähten steht und unter sich in einen etwa 3 m tiefen, leeren Raum blicken kann, trägt auch nicht zur Beruhigung bei.

Unter realen Bedingungen (Hallen) gibt DIN 45635 im Anhang B zum Teil sehr umfangreiche Berechnungsvorschriften an. Einflussparameter sind: Hallengröße, Wandfläche, Reflexionseigenschaften des Wand-, Decken- und Fußbodenmaterials.

5. L_S : Messflächenmaß

$$L_S = 10 \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \text{ dB}$$

mit

S : Tatsächliche Fläche der gewählten Hüllfläche (Kugel, Halbkugel, Quader)

S_0 : 1 m^2 .

Hier wird eine Fläche in dB angegeben. Die Addition des Messflächenmaß L_S zum Schalldruckpegeln \bar{L}'_{pA} bedeutet, dass mit der Fläche S multipliziert wird. Wir erinnern uns an $P = I S$ mit $I \sim p^2$. Durch geschickt gewählte Bezugsgrößen bei der Pegelberechnung passen die Größen zueinander.

Das Kapitel Akustik ist hiermit abgeschlossen. In einem Laborversuch wird es noch ein wenig vertieft.

Teil III.

Maschinendynamik

1. Kinematik der Schwingungen

Kinematik ist die Lehre der Bewegung, ohne nach den Ursachen zu fragen. Die Ursachen (Kräfte und Momente) werden in der Kinetik behandelt. Hier sehen wir erneut die Tendenz, unterschiedliche oder gegensätzliche Erscheinungen in Wissenschaft und Technik mit leicht verwechselbaren Begriffen zu versehen. Beispiel: Konkav-Konvex, Stalagmiten-Stalaktiten, Hyperthermie-Hypothermie. Warum einfach, wenn es auch kompliziert geht.

1.1. Grundbegriffe

- Schwingungen: Zeitliche Schwankungen physikalischer Größen, z.B.
 - Längen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen x , \dot{x} , \ddot{x} (Federpendel).
 - Winkel und deren Ableitungen φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ (Torsionsschwinger).
 - Kräfte, Drücke F , p (Unwuchterreger, Schall).
 - Elektrische Spannung u (Elektrischer Schwingkreis).
- Periodische und harmonische Bewegung: Die zeitliche Änderung einer skalaren Größe sei

$$x = x(t)$$

$x(t)$ ist periodisch, wenn sie sich nach einem Zeitintervall T in allen Einzelheiten wiederholt.

Zur Klarstellung: Die Zeit t ist eine Variable und beschreibt den unaufhaltbaren Ablauf der Zeit. Häufig werden wir diese Zeit gedanklich mit einer Stoppuhr messen. Der Zeitnullpunkt kann von uns daher willkürlich gewählt werden, indem wir die Stoppuhr starten. Die Zeit T ist ein Zeitintervall, das in diesem Zusammenhang die Wiederkehr eines Ereignisses beschreibt. Beispiel: nach $T = 24$ h hat sich die Erde einmal um ihre Achse gedreht.

$$(III.1.1) \quad x(t) = x(t + T) \quad \text{und} \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(t + T).$$

Die Forderung 'wiederholt sich in allen Einzelheiten' stellt sich überschaubarer heraus als zunächst gedacht. Es genügt, wenn sich die Auslenkung (der Weg) x eines schwingenden Körpers und seine Geschwindigkeit \dot{x} nach einem Intervall T wieder einstellt. Gleichung (III.1.1) heißt Periodizitätsbedingung.

Weitere Begriffe:

T	Schwingungsdauer, Periode
$f = \frac{1}{T}$	Frequenz, Einheit Hertz, $1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{s}}$
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz, Einheit $\frac{1}{\text{s}}$ (nicht Hz)
n	Drehzahl, Einheit $\frac{1}{\text{min}}$

Es gilt

$$f = \frac{n}{60}; \quad \omega = \frac{\pi n}{30} \approx \frac{n}{10}.$$

Die Einheiten von Frequenz f und Kreisfrequenz ω unterscheiden sich. Das erinnert an die verschiedenen Einheiten von Wirk-, Blind- und Scheinleistung in der Elektrotechnik. Auch hier soll durch die Einheit zusätzlich erinnert werden, ob es sich um eine Frequenz „mit oder ohne Kreis“ handelt.

Erweiterung: Schwingungsgrößen können auch vektoriell sein. Die Periodizitätsbedingung lautet dann:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t + T); \quad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}(t + T)$$

oder speziell

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t + T) \\ x_2(t + T) \\ x_3(t + T) \end{pmatrix} = \vec{x}(t + T); \quad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}(t + T)$$

Ein Sonderfall der periodischen Schwingungen sind die harmonischen Schwingungen. Hier gilt:

$$(III.1.2) \quad \begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{oder} \\ x(t) &= B \cos(\omega t + \varepsilon) \quad \text{oder} \\ x(t) &= C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

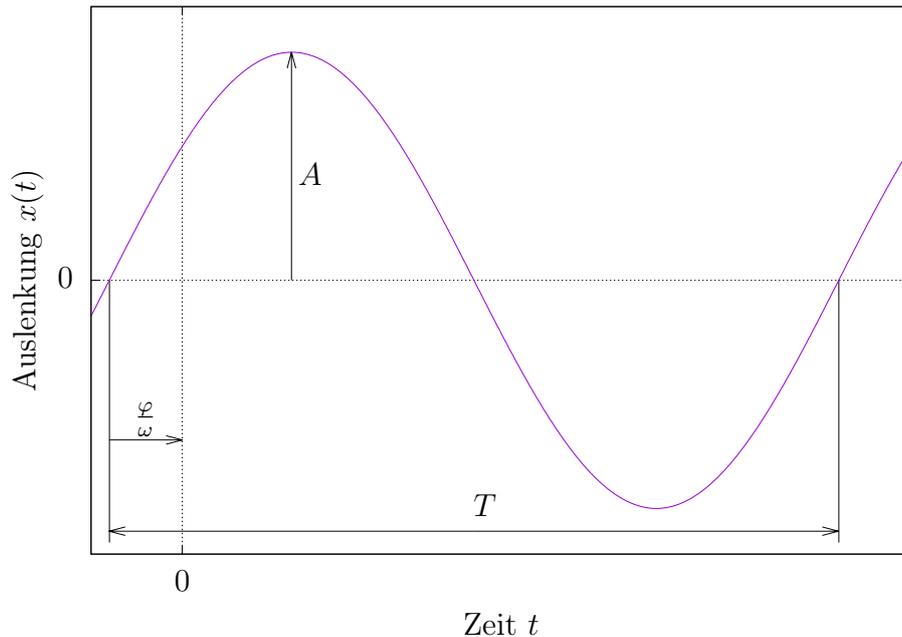
mit den Konstanten A , B , C_1 , C_2 , φ , ε .

Harmonisch heißt also nichts anderes als sinusförmig. Harmonische Schwingungen sind immer periodisch. Periodische Schwingungen sind aber nur in Sonderfällen harmonisch. Wir wissen: Jeder Dackel ist ein Hund, aber nicht jeder Hund ist ein Dackel. Später werden wir sogar Katzen kennenlernen, die wie ein Dackel aussehen, aber trotzdem kein Hund sind.

- Amplitude, Nullphasenwinkel

Der Verlauf einer harmonischen Schwingung wird durch die Größen A , ω , φ festgelegt.

$$(III.1.3) \quad \begin{array}{ll} A : & \text{Amplitude, Maximalwert} \\ \omega : & \text{Kreisfrequenz } \omega = 2\pi f = \frac{\pi n}{30} = \frac{2\pi}{T} \\ \varphi : & \text{Nullphasenwinkel} \end{array}$$



Allgemein ist bei periodischen (nichtharmonischen) Schwingungen die Amplitude definiert durch

$$(III.1.4) \quad A = \frac{1}{2} (x_{\max} - x_{\min})$$

und die Mittellage durch

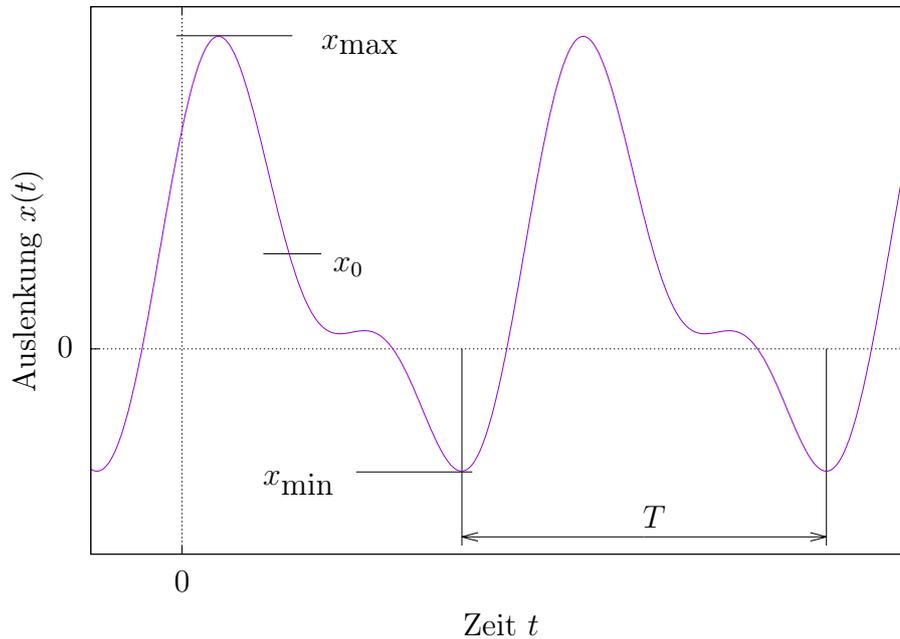
$$(III.1.5) \quad x_0 = \frac{1}{2} (x_{\max} + x_{\min}).$$

Die Zeichen \pm in den Klammern sind nur auf den ersten Blick verwirrend. Bedenken Sie, dass x_{\min} in der Regel, so auch in obigem Bild, negativ ist.

Den Studierenden, die noch traumatisiert sind von Elektrotechnik Grundlagen und den dort so wichtigen Phasenverschiebungen und Nullphasenwinkeln sei noch gesagt, in Maschinendynamik sind diese Größen von weitaus geringerer Bedeutung und stellen keinerlei Schwierigkeit dar.

1.2. Graphische Darstellung von Schwingungsbewegungen

Einfach und anschaulich: Das $x - t$ -Diagramm.



Wenn der Nachweis der Periodizität anderweitig erfolgte, ist die Amplitude A und die Schwingungszeit T leicht abzulesen.

Der Nachweis der Periodizität gelingt hingegen gut im Phasenplan mit den Koordinaten x und \dot{x} . Vorgeführt sei das am Beispiel einer harmonischen Schwingung.

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

Eliminieren von $(\omega t + \varphi)$, wir quadrieren

$$x^2 = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

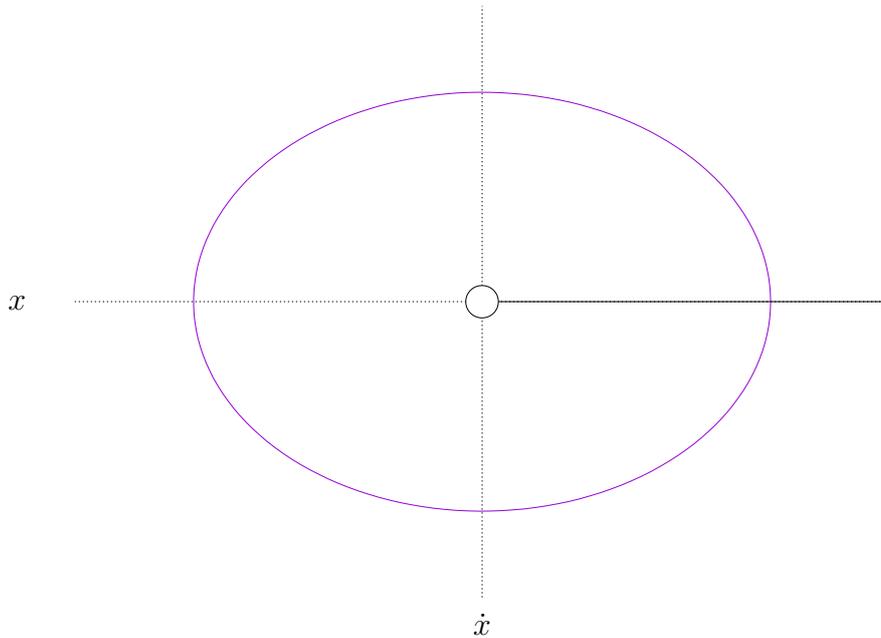
$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\dot{x}^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2 A^2}$$

Es ergibt sich eine Ellipsengleichung.



Eine geschlossene Phasenkurve ist die Bedingung für eine periodische Schwingung.

Sollte eine elliptische Spirale sichtbar sein, die im Nullpunkt endet, so handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung. Die Phasenkurve ist bei einer Spirale nicht geschlossen also ist eine gedämpfte Schwingung nichtperiodisch.

Eine weitere Möglichkeit, Schwingungsvorgänge graphisch darzustellen ist das Fourierspektrum. Dieses Thema wird in einem Laborversuch behandelt.

1.3. Überlagerung und Modulation

1.3.1. Überlagerung = Addition

Am Beispiel der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

sind vier Fälle zu unterscheiden. Das Frequenzverhältnis $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ sei

- a) 1
- b) ganzzahlig (2, 3, ...)
- c) rational ($\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, ...)
- d) irrational (e , π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...)

Fall a) $\omega_1 = \omega_2$:

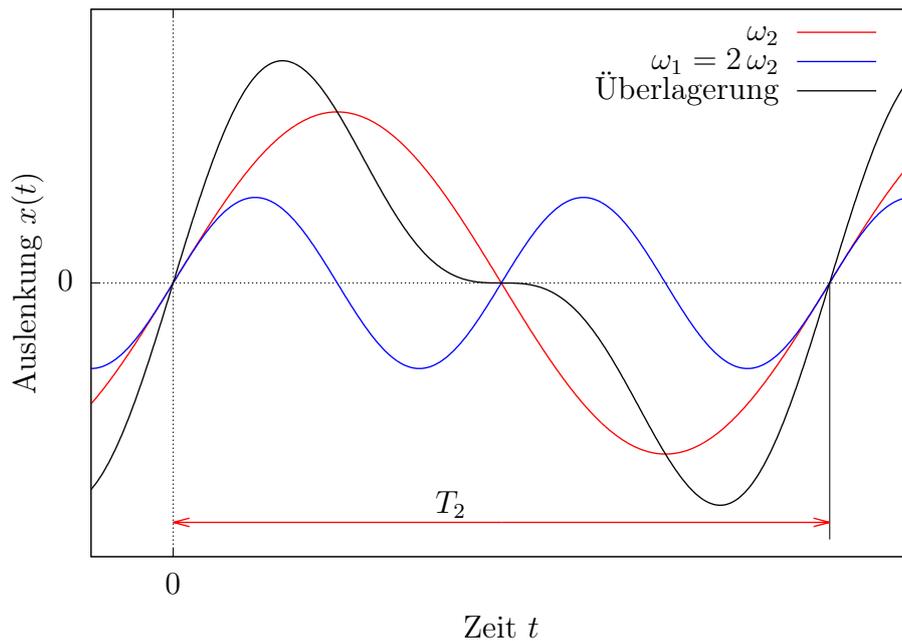
Die Überlagerung oder Summenschwingung ist wieder harmonisch mit $\omega = \omega_1 = \omega_2$.

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

A und α sind aus $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ berechenbar, was nicht sonderlich interessant ist.

Fall b) Beispiel $\omega_1 = 2\omega_2$:

Die Überlagerung ist periodisch aber nicht harmonisch. Die Periode T ist gleich der längsten der beteiligten Periodenzeiten. Hier T_2 , da $\omega_2 < \omega_1$.

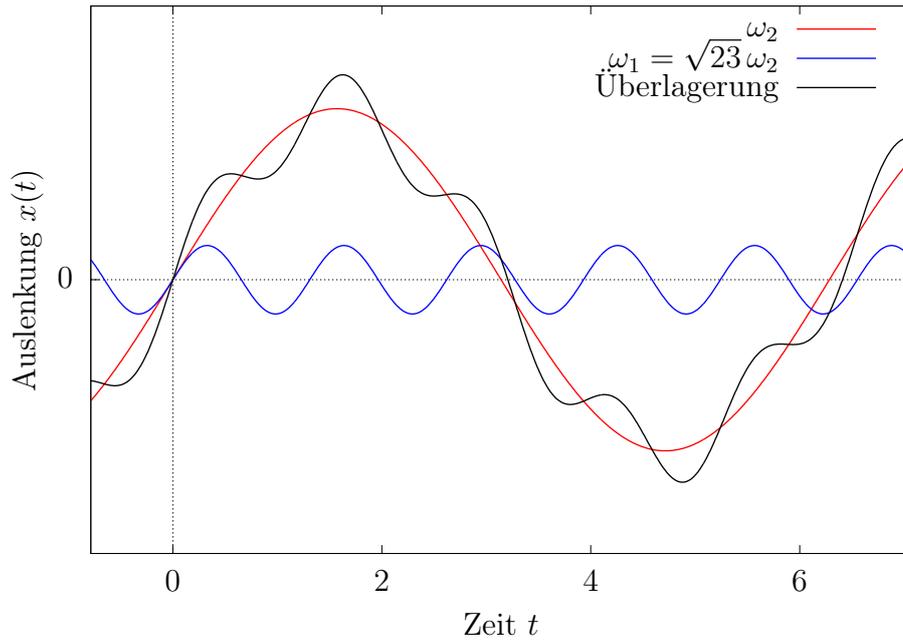
**Fall c)** Frequenzverhältnis rational

Die Überlagerung ist periodisch, die Periode T kann unter Umständen sehr groß werden.

Fall d) Frequenzverhältnis irrational

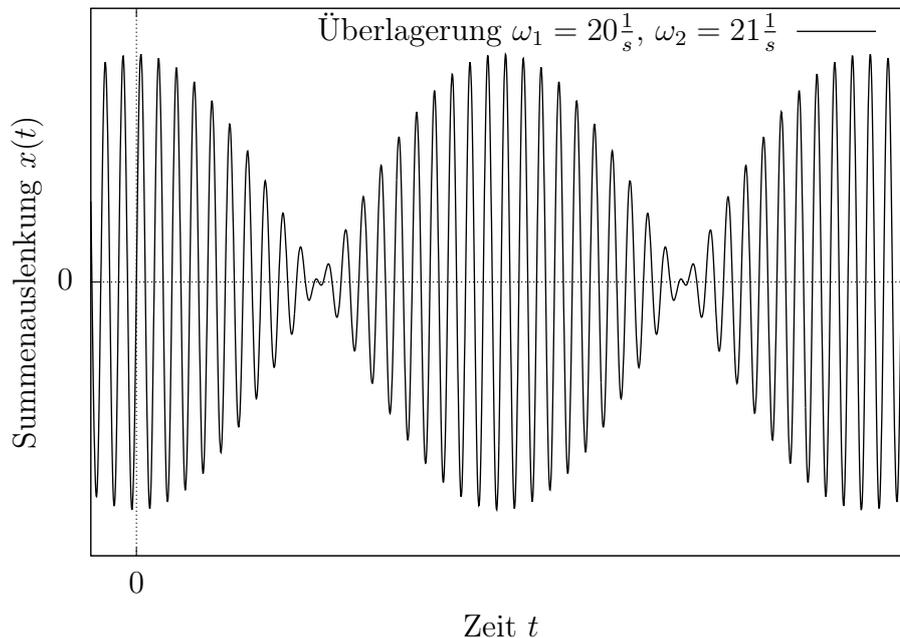
Die Überlagerung ist nichtperiodisch, aber beschränkt.

Die Fälle c) und d) sind in der Praxis nicht exakt unterscheidbar.



Schwingungen mit rationalen Frequenzverhältnissen entstehen, wenn zwei unwuchtbehaftete Wellen über ein Zahnradgetriebe gekoppelt sind. Von einem irrationalen Frequenzverhältnis muss ausgegangen werden, wenn die beiden Wellen eigene, ungekoppelte Antriebe haben. Auch wenn die beiden Wellen durch ein Umschlingungsgetriebe mit Flach- oder Keilriemen gekoppelt sind, ist mit irrationalen Frequenzverhältnissen zu rechnen. Obwohl einem nur wenige irrationale Zahlen spontan einfallen (e , π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...), dürfte das der Regelfall sein, es sei denn, die formschlüssige Getriebekopplung ist klar auszumachen. Es ist unerheblich, ob ein Fall c) oder d) vorliegt. ■

Bei $\omega_1 \approx \omega_2$ entsteht ein verblüffender Spezialfall, eine Schwebung.



In der Musik werden reine Töne als schrill und unangenehm empfunden. Bei Saiteninstrumenten wird das Problem beseitigt, indem die Frequenz des Tons fortwährend verändert wird. Die linke Hand wird rhythmisch bewegt, wodurch der Finger, der die Saite auf das Griffbrett drückt, vor und zurück rollt. Bei Kirchenorgeln wird eine andere Lösung angestrebt, die mit der gerade kennengelernten Schwebung zu tun hat. Zwei Register der Orgel, die die gleiche Tonlage haben, werden so gestimmt, dass das eine Register ein wenig zu hoch, das andere ein wenig zu tief liegt. Werden beide Register gleichzeitig angeblasen, so ist ein an- und abschwellender Ton zu hören, der viel angenehmer ist, als ein reiner Ton. Drei bis vier Schwebungen pro Sekunde werden angestrebt.

Wenn man in einem Twinjet am Gang und in der Nähe der Tragfläche sitzt, kann es zeitweise passieren, dass das Turbinengeräusch in der Lautstärke rhythmisch schwankt. Auch das ist eine Schwebung, weil die beiden Triebwerke ähnlich schnell aber nicht synchron laufen. Wer diesen Effekt hören möchte, suche bei der Videoplattform des Vertrauens nach 'Schwebung'. Das Flugzeug wird dort lediglich durch zwei Stimmgabeln abgebildet.

1.3.2. Modulation = Multiplikation

$$y(t) = A(t) \cdot x_0(t)$$

mit

$y(t)$: Amplitudenmodulation, Ergebnis der Multiplikation

$A(t)$: Nutzsignal

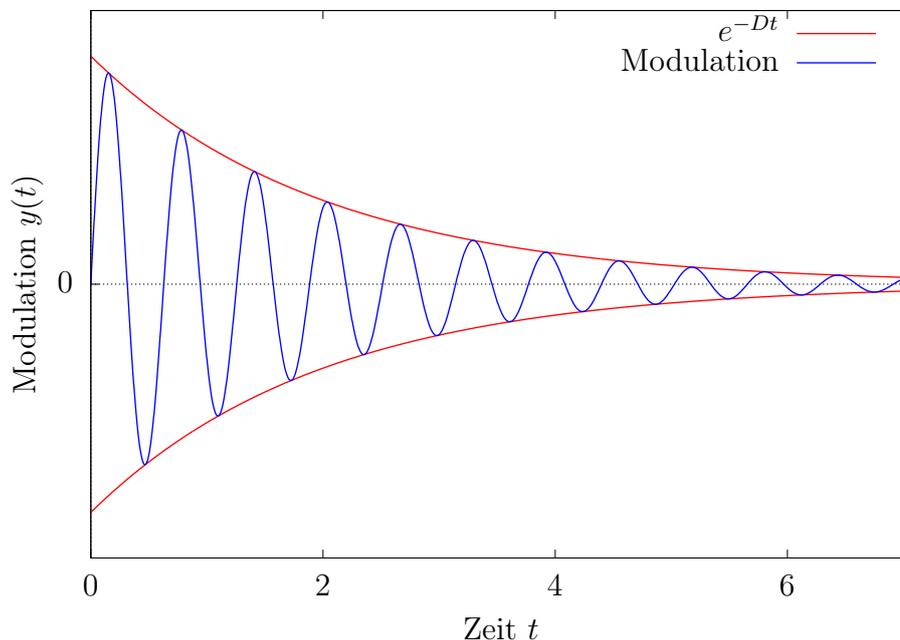
$x_0(t)$: harmonischer Träger

Dies ist ein Beispiel aus der veralteten Nachrichtentechnik. Das Nutzsignal $A(t)$ ist die mit Mikrophon und Verstärker aufgenommene Sprache oder Musik im Bereich 300 Hz bis 3000 Hz. Dieses Nutzsignal soll auf dem Träger $x_0(t)$ mit der Trägerfrequenz 1269 kHz von einem Radiosender verbreitet werden. Über die Antenne wird die Funktion $y(t)$ abgestrahlt. So wurde bis 31.12.2015 der Deutschlandfunk auf Mittelwelle vom Sender Neumünster verbreitet. Modulation im Sinne der Maschinendynamik ist immer Amplitudenmodulation im Sinne der Nachrichtentechnik. Dort gibt es auch noch Frequenzmodulation, üblich im UKW-Band, die in der Maschinendynamik keine Rolle spielt.

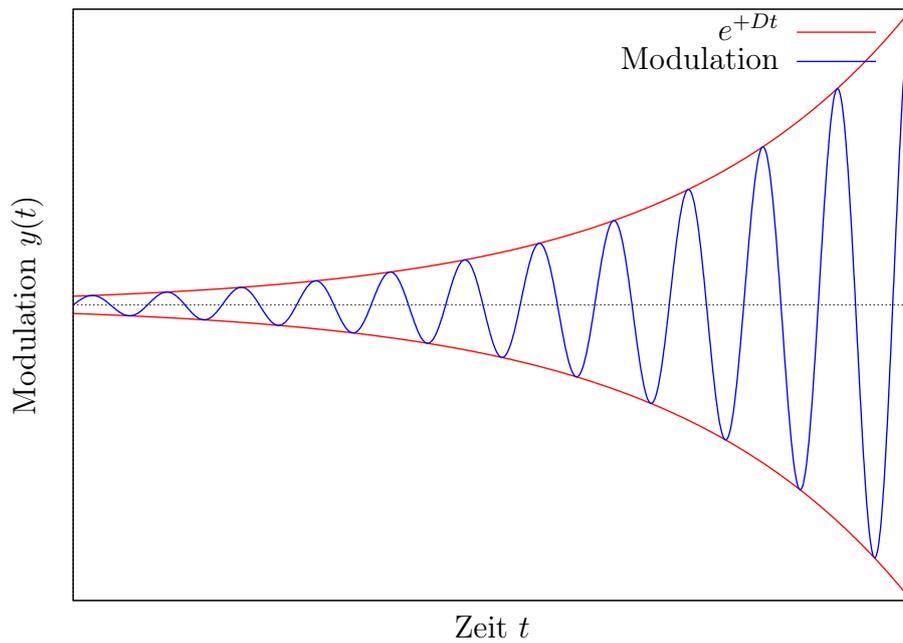
Vom Energieaufwand war Mittelwellenrundfunk eine Katastrophe. Der leistungsstärkste Mittelwellensender Heusweiler, Europawelle Saar auf 1422 kHz, sendete tags mit 1200 kW. Etwa die gleiche Leistung fällt noch einmal in Form von Abwärme an. Erinnern Sie sich an 'Leistungsanpassung' in Elektrotechnik? Neben dem Sender Heusweiler befand sich ein Freibad, das die Abwärme nutzte. Die Badesaison begann früh im Jahr und endete spät.

In der Maschinendynamik ist $A(t)$ häufig eine monotone Funktion.

Beispiel Dämpfung: $y(t) = e^{-Dt} \cdot A \sin(\omega t)$



Beispiel parametererregte Instabilität: $y(t) = e^{+Dt} \cdot A \sin(\omega t)$



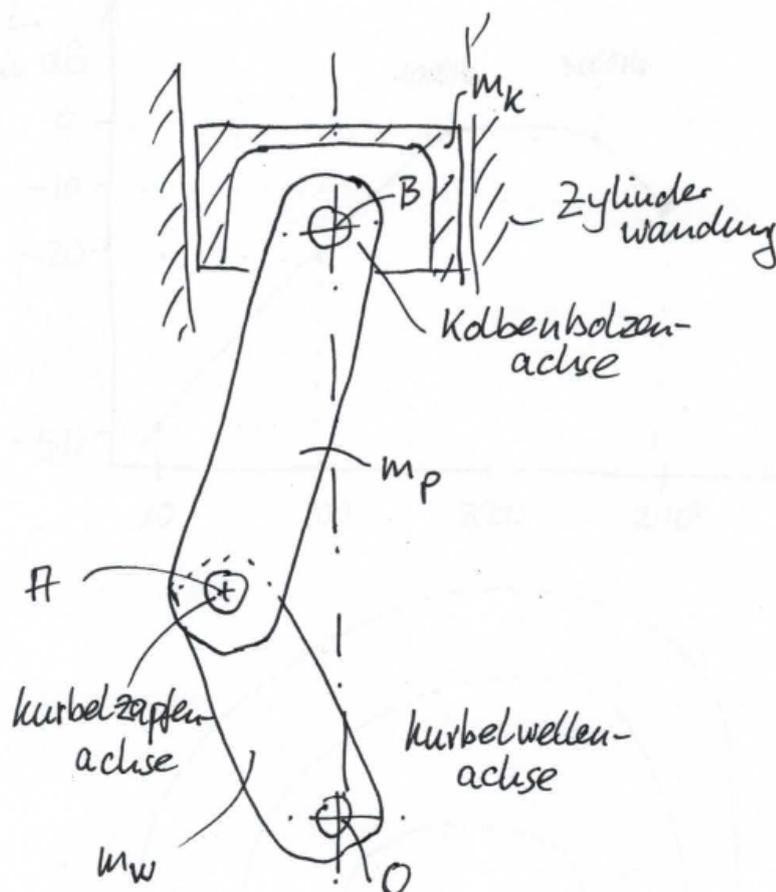
Sowohl Dämpfung als auch Parametererregung werden im Laufe dieser Vorlesungsreihe noch behandelt. Zum jetzigen Zeitpunkt können wir noch nicht wissen, warum das 'Nutzsignal' eine Exponentialfunktion ist.

Hier ist sie übrigens, die Katze, die wie ein Dackel aussieht und trotzdem kein Hund ist. In beiden obigen Bildern sehen wir einen sinusförmigen Verlauf und vermuten eine harmonische Schwingung (sieht aus wie ein Dackel). Klar erkennbar ist, dass hier kein periodischer Vorgang vorliegt, denn aufeinanderfolgende Maxima haben verschiedene Höhen (kein Hund). Beide Beispiele sind also nicht periodisch (klar) und deshalb auch nicht harmonisch (Katzen sind nun mal keine Hunde, gut dass wir das geklärt haben).

2. Grundlagen des Massenausgleichs bei Kolbenmaschinen

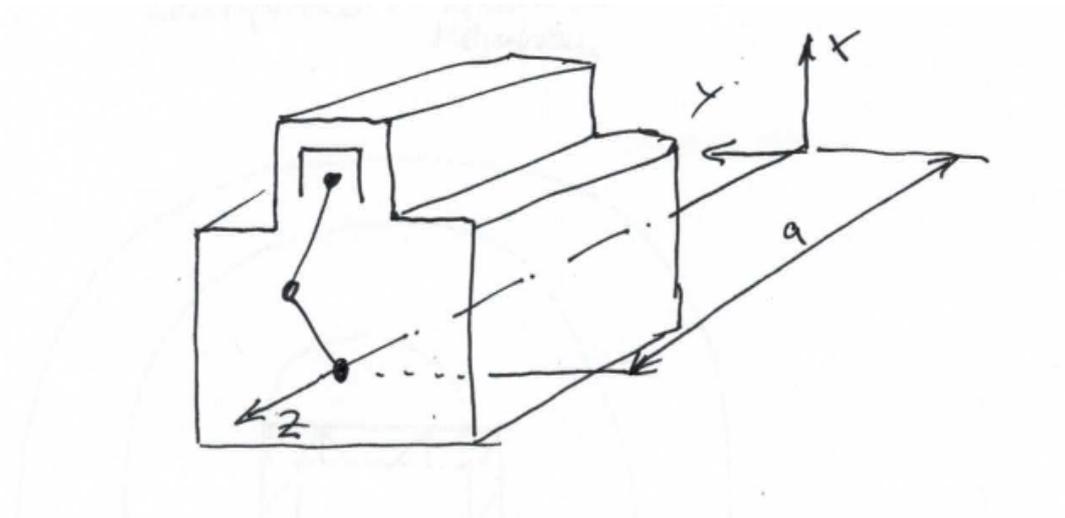
Es dürfte bekannt sein, dass Kolbenmaschinen (Verbrennungsmotoren aber auch Kolbenverdichter) zeitveränderliche Kräfte und/oder Momente in ihre Fundamentierung einleiten. Motorradfahrer berichten von Vibrationen, Kribbeln in den Händen, abgeschüttelten Blinkern, gerissenen Nummernschildern, hohem Verbrauch an Glühlampen. Insbesondere die Betreiber von großen Einzylinder-Enduros sind davon betroffen, ebenso Harley-Fahrer. In diesem Kapitel wollen wir ergründen, warum diese Schwingungen entstehen, mit welchen Frequenzen diese Schwingungen auftreten und was dagegen unternommen werden kann.

Innere Kräfte eines Kolbentriebwerks d.h. Gaskräfte und Reibungskräfte treten nach außen nicht auf. Dagegen können auf Grund von ständig beschleunigten Massen zeitveränderliche Kräfte/Momente auf die Fundamentierung wirken. Hierzu betrachten wir einen Kurbeltrieb, bestehend aus Kolben, Masse m_K , Pleuel, m_P und Kurbel m_W . Da der Buchstabe K schon für den Kolben vergeben ist, bekommt die KurbelWange die Massenbezeichnung m_W .



Wir wählen ein Koordinatensystem.

Dabei wollen wir sicherstellen, dass es für die Betrachtung von Mehrzylindermotoren zukunftssicher ist. Aus diesem Grund legen wir den Koordinatenursprung um das Maß a hinter den betrachteten Kurbeltrieb. Bei einem Einzylindermotor steht es uns selbstverständlich frei, $a = 0$ zu wählen. Bei Mehrzylindermotoren kann das nur für einen, manchmal auch für gar keinen Zylinder gelten.



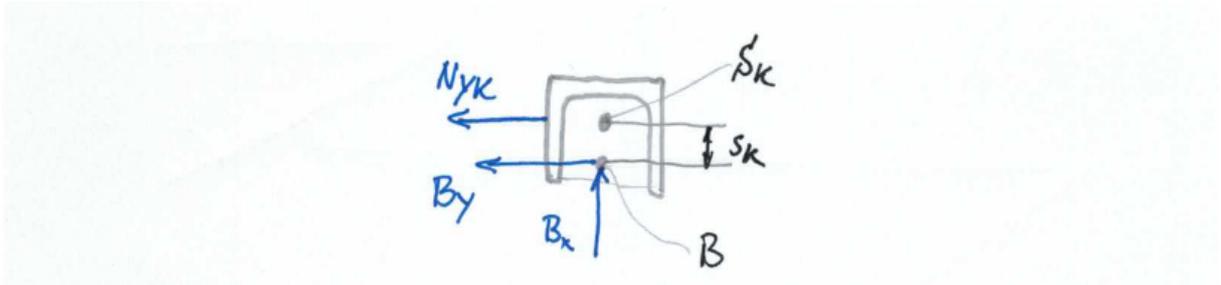
2.1. Freischneiden des Kurbeltriebs

Wir werden den Kurbeltrieb auseinander schneiden, die getrennten Teile Kolben, Pleuel, Kurbel und das ausgeweidetes Kurbelgehäuse mit den notwendigen Schnittkräften und Schnittmomenten versehen. An jedem Teil werden wir dann die Hauptsätze der Dynamik, Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz aufstellen. Es ist eine gute Idee, in TMIII diese Begriffe nachzuschlagen.

Beim Anbringen der Schnittkräfte folgen wir einem einfachen aber willkürlichen Prinzip. Beim ersten Schnittufer, das uns begegnet, tragen wir Schnittkräfte in positiver Koordinatenrichtung an. Beim gegenüberliegenden Schnittufer demzufolge dann in negativer. Bei dem von uns untersuchten System ist es müßig, sich zu überlegen, in welcher Richtung die Kräfte tatsächlich wirken. Während einer Umdrehung des Kurbeltriebs wechseln alle Kräfte ohnehin zwei mal das Vorzeichen.

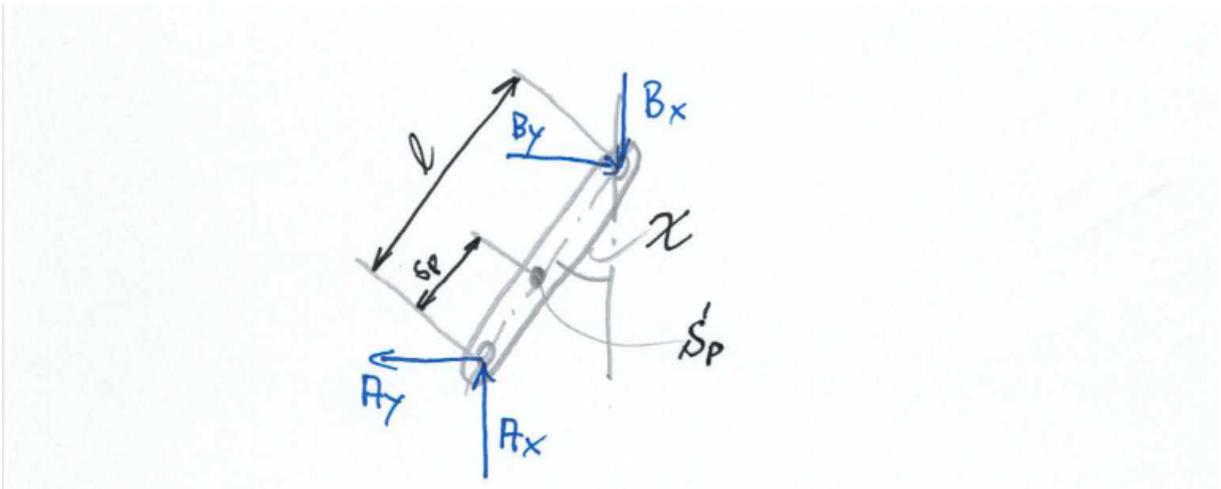
Wir bezeichnen den Schwerpunkt eines Bauteils mit S und die Schwerpunktlage mit s , ergänzt jeweils um den dazugehörigen Index des Bauteils.

Kolben

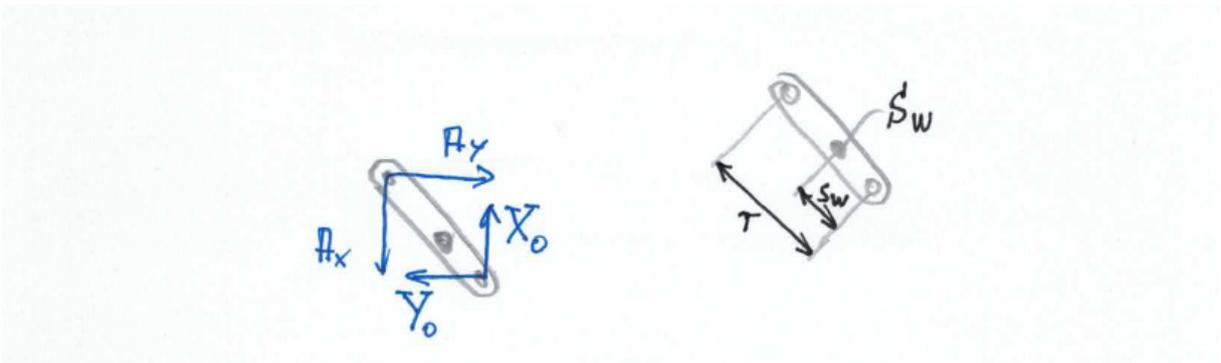


Mit der Kraft N_{yk} stützt sich der Kolben bei schräggehendem Pleuel an der Zylinderwandung ab.

Pleuel

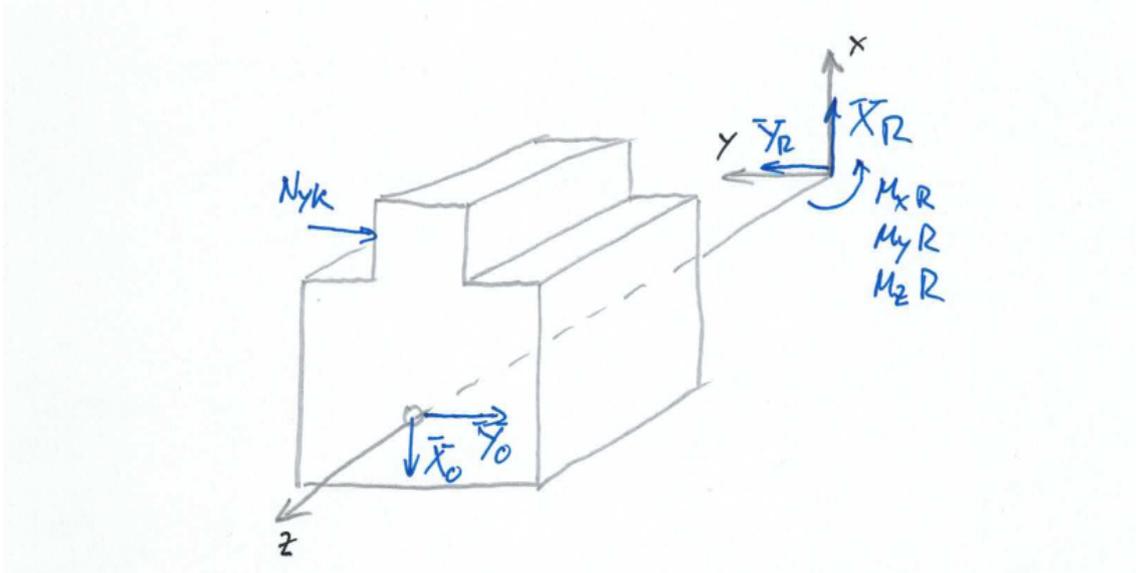


Kurbel



Zur Erinnerung: Die Kurbel hat den Index 'w', wie Kurbelwange

Gehäuse



Gesucht sind letztendlich die Fundamentkräfte und -momente X_R , Y_R , M_{xR} , M_{yR} , M_{zR} . Sollten alle zeitveränderlichen Teile dieser Größen verschwinden, liegt vollständiger Massenaustrgleich vor.

Vorgehensweise: Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz (IMS) für alle beweglichen Teile.

2.2. Schwerpunktsatz, Impulsmomentensatz

2.2.1. Kolben Schwerpunktsatz

$$B_x = m_K \ddot{x}$$

$$B_y + N_{yk} = 0$$

Die Beschleunigung des Kolbens in y -Richtung, \ddot{y} , ist immer null. Sollte das einmal nicht der Fall sein, liegt ein kapitaler Motorschaden vor.

Der IMS ist von selbst erfüllt, wenn das Schwerpunktmaß $s_k = 0$ gewählt wird, was sehr empfehlenswert ist. ■

2.2.2. Pleuel Schwerpunktsatz

$$A_x - B_x = m_P \ddot{x}_{sp}$$

$$A_y - B_y = m_P \ddot{y}_{sp}$$

2.2.3. Pleuel Impulsmomentensatz

$$A_y s_p \cos \chi + A_x s_p \sin \chi + B_y (\ell - s_p) \cos \chi + B_x (\ell - s_p) \sin \chi = J_{pl} \ddot{\chi}$$

J_{pl} : Massenträgheitsmoment des Pleuels um seinen Schwerpunkt S_p .

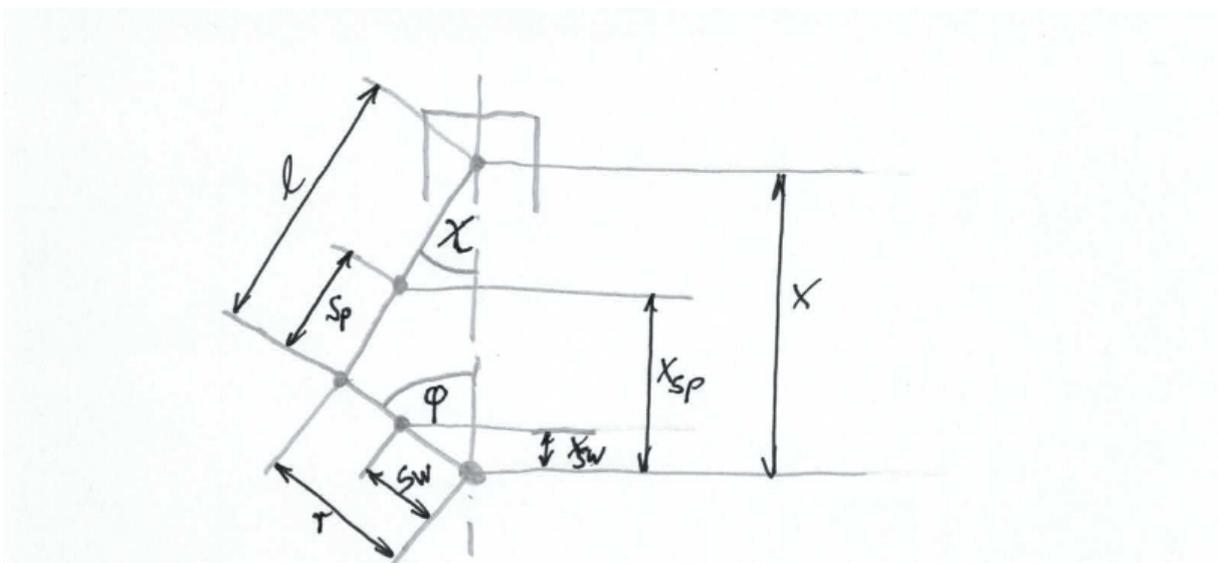
χ : Der Neigungswinkel des Pleuels wird 'chi' ausgesprochen (ch wie in Milch).

Kurbel

Ganz analog.

2.3. Kinematik

In dieser Vielzahl von Gleichungen tauchen sehr viele verschiedene Beschleunigungen auf, die jedoch nicht unabhängig voneinander sind. Kinematische Koppelungsbedingungen können aufgestellt werden. Am einfachsten gelingt dies für die jeweiligen Ortskoordinaten x und y . Durch formale zweifache Differentiation können dann die Koppelungen der Beschleunigungen angeschrieben werden.



Alle zeitveränderlichen Größen φ , χ , x , x_{sw} , y_{sw} , x_{sp} , y_{sp} sollen als Funktion des Kurbelwinkels φ dargestellt werden. Wir gehen von einer konstante Drehfrequenz aus mit

$$f_D = \frac{\omega}{2\pi}.$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t \\ x &= r \cos \varphi + \ell \cos \chi \\ (*) \quad y &= 0 = r \sin \varphi - \ell \sin \chi \\ x_{sp} &= r \cos \varphi + s_p \cos \chi \\ y_{sp} &= (\ell - s_p) \sin \chi \\ x_{sw} &= s_w \cos \varphi \\ y_{sw} &= s_w \sin \varphi \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln φ und χ ergibt sich aus der Gleichung (*) und der Tatsache, dass der Kolben die Zylinderbohrung in y -Richtung nicht verlassen kann ($y = 0$).

$$\sin \chi = \frac{r}{\ell} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi$$

$\lambda = \frac{r}{\ell}$: Schubstangenverhältnis

Bei Kraftfahrzeugen gibt es zweimal den Parameter λ . Zum einen ist es das Verbrennungsluftverhältnis, welches mit der gleichnamigen Sonde gemessen wird. $\lambda = 1$ bedeutet ein stöchiometrisches Verbrennungsluftverhältnis. 14,5 kg Luft werden benötigt, um 1 kg Benzin vollständig zu verbrennen. Hier geht es um ein ganz anderes λ , das Schubstangenverhältnis. Es ist übrigens immer kleiner 1, sollte das nicht der Fall sein, wird bei der ersten Umdrehung des Triebwerks der Pleuelltrieb gesprengt. So kann man sich auch leicht merken, wie das Schubstangenverhältnis definiert ist, die größere Pleuellänge muss in den Nenner, der kleinere Kurbelradius in den Zähler.

Wir sind fast am Ziel, alle kinematischen Größen durch φ darzustellen. Wir benötigen noch etwas für $\cos \chi$.

Weiter gesucht ist eine Angabe für $\cos \chi$, hierfür gilt

$$\begin{aligned} \sin^2 \chi + \cos^2 \chi &= 1 \\ \cos \chi &= \sqrt{1 - \sin^2 \chi} \\ \cos \chi &= \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Beispielhaft eingesetzt in die Kolbenposition x ergibt sich

$$x = r \cos \varphi + \ell \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

Diese Gleichung kann nicht nach φ aufgelöst werden. Nicht etwa, weil wir zu blöd dazu wären, es geht einfach nicht. Es ist eine transzendente Gleichung. Mathematisch bewanderte Motorradfahrer sind hier schon verzweifelt und zwar beim Einstellen des Zündzeitpunkts. Bei Zweitaktern werden zum Zündzeitpunkt häufig Angaben gemacht wie 3 mm vor OT. In unserem Fall gelte dann $x = r + \ell - 3$ mm. Wer hat schon eine Messuhr, mit der durch das Kerzenloch die 3 mm gemessen werden können? Eine Gradscheibe, die mit der Kurbelwelle umläuft und eine Zündblitzpistole wären viel praktischer. Rechnerisch bekommen Sie den Kurbelwinkel φ (häufig angegeben in der Form soundsoviel Grad vor OT) nicht heraus. Sie müssen entweder messen oder iterativ rechnen.

Der Ausdruck $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ wird aus diesem Grund mit Hilfe von Reihen entwickelt.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} &= A_0 + \frac{1}{4} A_2 \cos(2\omega t) \\ &\quad - \frac{1}{16} A_4 \cos(4\omega t) \\ &\quad + \frac{1}{36} A_6 \cos(6\omega t) - \dots \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{3}{63} \lambda^4 - \dots \\ A_2 &= \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^4 + \dots \\ A_4 &= \frac{1}{4} \lambda^4 + \frac{3}{16} \lambda^6 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Angaben fallen für uns vom Himmel. Es wird der Wurzelausdruck mit FOURIERreihen entwickelt und die Parameter A_n mit Hilfe von TAYLORreihen. Auch wenn diese Vorgehensweise für uns rätselhaft bleibt, aus diesen Reihenentwicklungen kann das entscheidende Verhalten von Kurbeltrieben abgelesen werden.

Wege x sind also Überlagerungen von Schwingungen mit $\omega, 2\omega, 4\omega, 6\omega, \dots, (2n)\omega$. Dies gilt auch für \ddot{x} und damit für die Trägheitskräfte der mit \ddot{x} beschleunigten Masse des Kolbens. Zur Erinnerung: $\varphi = \omega t$.

Eine triviale Lösung fällt auf: Mit $\lambda = 0$ fällt alles in sich zusammen. Wir hätten die ideale Maschine. Es gibt nur zwei Wege dahin: 1. Kurbelradius $r = 0$. Leider ging dann

kein Kolben mehr auf und ab. 2. Pleuellänge $\ell \rightarrow \infty$. Dieser Motor baute unendlich hoch und seine Pleuel würden nach EULER Fall 2 bei der ersten Zündung knicken.

Der Kolbenweg x und damit die Kolbenbeschleunigung \ddot{x} ist demzufolge keine reine Sinus- oder Cosinusfunktion mit der Kreisfrequenz des Triebwerks (entspricht der Kurbelwellendrehfrequenz), sondern eine Überlagerung von Schwingungen mit der Drehfrequenz (1. Ordnung), der doppelten Drehfrequenz (2. Ordnung), der vierfachen Drehfrequenz (4. Ordnung), der sechsfachen Drehfrequenz (6. Ordnung) usw. Ungradzahlig höhere Ordnungen (3, 5, 7, ...) tauchen hingegen nicht auf.

2.4. Der ideale Einzylindermotor, nur eine Hoffnung

Für die Resultierenden aller Gehäusekräfte und -momente, bezogen auf den Ursprung des Koordinatensystems folgt:

$$\vec{F}_{\text{result}} = \begin{pmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 + N_{yk} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{\text{result}} = \begin{pmatrix} M_{xR} \\ M_{yR} \\ M_{zR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Y_0 + N_{yk}) a \\ -X_0 a \\ N_{yk} x \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bei einem Einzylindermotor gilt $a = 0$. Bei einem Reihenmotor gilt für n oder $(n - 1)$ Zylinder $a \neq 0$.

Bei Reihenmotoren mit geradzahligem Zylinderzahl liegt der Koordinatenursprung zwischen den beiden mittleren Zylindern. Für alle n Zylinder gilt daher $a \neq 0$. Bei ungeradzahligem Zylinderzahlen liegt der mittlere Zylinder auf Höhe des Koordinatenursprungs, daher gilt für $(n - 1)$ Zylinder $a \neq 0$.

Sehr lange Rechenwege liefern Ergebnisse für $X_R, Y_R, Z_R, M_{xR}, M_{yR}, M_{zR}$.

Alle Größen können auch beim Einzylinder beseitigt werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. $m_w s_w + (m_p + m_k) r = 0$
2. $m_p s_p + \ell m_k = 0$
3. $m_p s_p (\ell - s_p) - J_{pl} = 0$

Hintergrund: Die sehr langen Ergebnisse für $X_R, Y_R, Z_R, M_{xR}, M_{yR}, M_{zR}$ haben alle einen der drei eben genannten Ausdrücke als Faktoren. Wenn es uns gelingt, diese drei Faktoren zu null zu machen, haben wir die ideale Maschine, die keinerlei zeitveränderliche Kräfte oder Momente ins Fundament einleitet. Daher wollen wir der Reihe nach versuchen, diese drei Bedingungen zu erfüllen.

Bedingung 1: Ein Summand muss negativ werden, um diese Bedingung zu erfüllen. Negative Massen sind leider noch nicht erfunden worden, so dass wir uns auf die Schwerpunktlage s_w konzentrieren müssen.

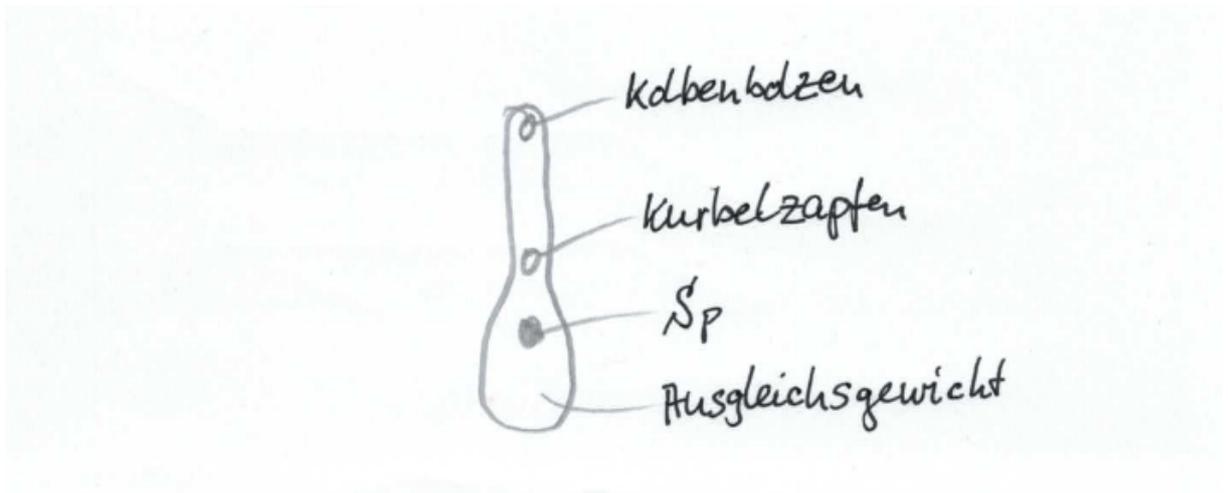
$$s_w = -\frac{(m_p + m_k)r}{m_w} < 0$$

Mit Gegengewichten an den Pleuelwangen ist das gut machbar und gängige Praxis. Der Schwerpunkt der Pleuel liegt dann jenseits der Pleuelwellenachse.

Bedingung 2: Gleiche Problematik

$$s_p = -\frac{\ell m_k}{m_p} < 0$$

Theoretisch wäre dies machbar. Das Pleuel müsste nach unten verlängert werden.



Auch hier „wandert der Schwerpunkt auf die andere Seite“. Solche Pleuel einzusetzen ist aber ein Ding der Unmöglichkeit. Pleuel sind ohnehin hochbelastete Bauteile; ihnen zusätzlich das skizzierte Ausgleichsgewicht zu verpassen, würde nicht funktionieren. An der Bohrung des Pleuelzapfens würde es brechen.

Bedingung 2 ist aus Festigkeitsgründen nicht sinnvoll erfüllbar.

Bedingung 3: Sehr leicht zu erfüllen.

$$J_{pl} = m_p s_p (\ell - s_p)$$

Solchermaßen „ausbalancierte“ Pleuel haben an beiden Enden Zusatzmassen, die wie Angussnasen bzw. Steiger aussehen und keinesfalls als schlechte Gießtechnik interpretiert werden sollten. Zudem sind Hochleistungspleuel ohnehin geschmiedet, so dass diese Interpretation hinfällig wird.

Da Bedingung 2 nicht erfüllt wird, verbleiben folgende zeitveränderlichen Kräfte und Momente:

$$\begin{aligned} X_R &= -\omega^2 (m_p s_p + \ell m_k) (A_2 \cos(2\omega t) - A_4 \cos(4\omega t) + A_6 \cos(6\omega t) - \dots) \\ Y_R &= -\omega^2 \lambda (m_p s_p + \ell m_k) \sin(\omega t) \\ M_{Rz} &= \langle \text{umfangreicher Ausdruck mit } (m_p s_p + \ell m_k) \text{ als Faktor} \rangle \end{aligned}$$

Der Traum vom perfekten Motor – auch als Einzylinder – ist ausgeträumt. Es müssen andere Überlegungen her. Dabei spielt die Wirkung von Schwingungen auf das Wohlbefinden des Menschen eine Rolle. Niederfrequente Schwingungen sind lästig und sogar schädlich. Hochfrequente Schwingungen erreichen die Insassen eines Autos kaum noch, da Menschen nicht starr an den Schwingerreger gekoppelt sind sondern elastisch über Sitzpolsterung, Teppichböden und umschäumte Lenkräder angebunden werden. Die erste, zweite und vierte Ordnung von Schwingungen spielen die entscheidende Rolle. Ab der sechsten Ordnung kann die Wirkung auf den Menschen vernachlässigt werden.

2.5. Mehrzylindermotoren

Das Zusammenwirken mehrerer Zylinder führt zu einem teilweisen Ausgleich von verbleibenden zeitveränderlichen Massenkräfte und -momente. Dabei muss zwischen erster, zweiter und höherer Ordnung unterschieden werden.

Es folgt eine Übersicht über gängige Motorenbauarten. Aus Zeitgründen wird die Tabelle handschriftlich dargeboten. Die Darstellung der Kurbelwelle eines Motors ist entweder eine Seitenansicht oder eine Stirnansicht, die auch Kurbelstern genannt wird. Es wird angegeben, ob Kräfte erster Ordnung (Kraft I) oder Kräfte zweiter Ordnung (Kraft II) entstehen. Gleiches gilt für die Momente.

Typ	Kurbelwelle	Kraft		Moment	
		I	II	I	II
2 Zyl 2-takt		0	ja	ja	0
2 Zyl 4-takt		ja	ja	0	0 keine höheren
2 Zyl Boxer		0	0 keine höheren	ja*	ja*
2 Zyl V 45°, 90°		ja	ja	ja	ja
3 Zyl reihe		0	0 ab 6. Ordnung	ja	ja
4 Zyl reihe		0	ja	0	0 keine höheren
4 Zyl Boxer		0	0 keine höheren	0	ja*
5 Zyl Reihe		0	0 keine höheren	ja	ja
6 Zyl Reihe		0	0 ab 6. Ordnung	0	0 keine höheren
8 Zyl 90° V		0	0 ab 4. Ordnung	ja	0 ab 4. Ord.

Zweizylindermotoren: Es wird zwischen Zweitakt- und Viertaktmotoren unterschieden, obwohl eingangs behauptet wird, die Gaskräfte machten sich als innere Kräfte nicht bemerkbar. Es gibt neben dem Ziel, die Massenkräfte und -momente zu minimieren noch ein anderes Ziel, das verfolgt wird. Es wird ein gleichmäßiger Zündabstand angestrebt, was zu einer gleichmäßigen Nutzmomenterzeugung führt. Daher ist ein Zweizylinder-Viertaktmotor üblicherweise ein sog. Parallelläufer oder Paralleltwin. Beide Kolben laufen parallel und werden wechselweise gezündet. Alte britische Motorräder von Norton und Triumph waren solche Knochenbrecher, denn sie verhielten sich wie ein sehr großer Einzylindermotor. Die Basismotorisierung des Fiat 500 fährt noch heute so.

Zweizylinder V-Motoren verfehlen beide Ziele deutlich. Trotzdem sind sie recht beliebt, was an Kultmarken wie Harley-Davidson, Moto Guzzi und Ducati erkennbar ist. Alle haben ungleichmäßigen Zündabstand und reichlich Maschinendynamik. Beliebt sind diese Motoren wegen des 'sound'. Ungleichmäßige Zündabstände erzeugen für die Fans einen wunderbar charakteristischen Klang. Bei querliegender Kurbelwelle bauen diese Motoren sehr schmal, was insbesondere bei Ducati zu dem Eindruck führt, man sitze auf einem Kleinkrafttrad mit über 100 PS.

Zweizylinder-Boxermotoren sind ganz knapp am Ideal. Leider fluchten die gegenüberliegenden Zylinderbohrungen nicht exakt. Sie sind um eine Pleuelbreite plus eine Kurbelwangenbreite versetzt. Dieser Hebelarm führt dazu, dass Momente entstehen. Die Markierung * in der Tabelle weist auf diesen Umstand hin. Wäre dieser Zylinderversatz nicht, gäbe es den idealen Motor. Die BMW R-Motorräder und die IFA BK waren/sind so motorisiert. Gewichtsgesteuerte UL-Fluggeräte werden häufig von Hirth Zweizylinder-Zweitakt-Boxermotoren angetrieben.

Dreizylindermotoren gelten als „arme-Leute-Motoren“ – völlig zu unrecht. Aus maschinendynamischer Sicht sind das ernstzunehmende Kandidaten. Wartburg und DKW hatten diese Motoren als Zweitakter. BMW baute für die K75 eine zeitlang einen Dreizylinder mit zur Kurbelwelle gegenläufigen Ausgleichswelle, die die Momente 1. Ordnung kompensierte. Dieser Antrieb war sehr gelungen, wurde aber kaum gekauft, da es noch die K100, einen baugleichen Vierzylinder mit höherem Prestige gab. Verbrauchsgünstige Motoren bis 1200 cm³ sollten sinnvollerweise als Dreizylinder ausgelegt sein. Oft hat die Marketingabteilung etwas dagegen.

Vierzylindermotoren: Boxermotoren sind erneut dicht am Ideal, haben jedoch das schon bekannte Problem des Zylinderversatz. Die Generation der Babyboomer in Westdeutschland ist im VW-Käfer aufgewachsen. Ich auch. Heute wird dieser Typ noch von Subaru hergestellt. Flugmotoren von Rotax sowie die kleinen Ausführungen von Lycoming und Continental sind auch Vierer-Boxer (flat four). Das Problem dieses Motors (und auch aller V-Motoren) sind die Fertigungskosten. Es

werden zwei spiegelbildliche Zylinderköpfe gebraucht, ferner sind komplizierte Abgasanlagen und Kühlwasserführungen notwendig (natürlich nicht bei Luftkühlung).

Der Reihenvierzylinder – der Brot-und-Butter-Motor in Europa – ist ein sehr rauer Geselle. Die Kräfte zweiter Ordnung aller vier Zylinder addieren sich auf und liegen in einem, den Menschen sehr störenden Frequenzbereich. In PKWs kann durch weiche Motorlagerung das Problem abgemildert werden. Motorräder mit starr eingebautem Vierzylinder sind sehr unangenehm. Nach 100 km mit meiner BMW K100 kribbeln die Finger. Bei Hubräumen deutlich oberhalb von 2 l wird vom Reihenvierer abgesehen. In den 1980ern gab es einen Versuch, einen 2,4 l Reihenvierer zu bändigen. Der Motor des Mitsubishi Sigma Galant hatte zwei gegenläufige Ausgleichswellen mit Unwuchten, die mit doppelter Kurbelwellendrehzahl rotierten. Die Kräfte zweiter Ordnung waren verschwunden, der Treibstoffverbrauch gestiegen. Das Auto hatte einen Antritt wie eine Wanderdüne.

Fünfzylindermotoren waren eine Notlösung, die sich als erstaunlich gut entpuppte. Audi hatte in den 1970er Jahren das Ziel, das Spießerimage loszuwerden (Fahrer mit Hut und umhänkelte Klorolle mit Barbiepuppe auf der Hutablage, hilfsweise Wackeldackel). Die ins Auge gefasste Konkurrenz Mercedes und BMW hatte Sechszylindermotoren mit Heckantrieb im Angebot. Audi hatte sich frühzeitig auf Frontantrieb festgelegt, was einen Sechszylinder unmöglich machte, da das Getriebe und damit die Vorderachse hinter dem Motor liegt. Auch ein Quereinbau ist nicht möglich. Ferdinand Piëch, damals Entwickler bei Audi, hatte die Idee des Fünfzylinders und verlängerte den gusseisernen Konzernmotor (Audi 80, Passat, Golf, Jetta, Scirocco) um eine Einheit. 360 Grad lassen sich auch glatt durch fünf teilen. Mit ein paar optischen Tricks war dieser Motor vor der Vorderachse unterzubringen. Die Audi 100 und 200 dieser Generation hatten eine auffallend runde Schnauze und einen seitlich versetzten Kühler. So konnte der lange vordere Überhang verschleiert werden. Die Motoren sind maschinendynamisch besser als ein Vierzylinder. Durch teuer erkaufte Rennsporterfolge galt dieser Motor als besonders sportlich. Noch heute hat Audi das Baulängenproblem bei Motoren. Das führte zu windigen Konstruktionen wie VR6 (Quereinbau bei VW) und W12. Inzwischen ist V-6 bei Audi weit verbreitet.

Sechszylindermotoren sind der Königsweg, solange sie in Reihe angeordnet werden. V-6 Motoren sind deutlich schlechter. Die Schwingungen mit sechster und höherer Ordnung stören nicht mehr. BMW hat seinen Ruf diesem Motor zu verdanken. Jahrzehntelang gab es einen 2-Liter-Sechszylinder, der inzwischen wegen hoher Treibstoffverbräuche nicht mehr verkäuflich ist. Meine Generation träumte von einem 'flotten 3er' in Form des 320i (und fuhr stattdessen Golf I).

Achtzylindermotoren machen im Automobilbau keinen Sinn, wenn man es nüchtern betrachtet. Der Reihensechser ist maschinendynamisch viel besser. In den USA war ein V-8 auch für untere Einkommenschichten Standard. Ford und GM hatten jeder für sich zwei Motoren entwickelt (small block 5,4 l und big block 7,2 l)

mit sehr ähnlichen Eigenschaften. Sie fanden sich jahrzehntlang in nahezu jedem Auto wieder (vom Mittelklasse-PKW bis zum mittelschweren LKW, die üblicherweise Benzinmotoren hatten). In riesigen Stückzahlen purzelten diese Motoren vom Band und waren dank längst bezahlter Entwicklungskosten und der Verwendung von reichlich Gusseisen sehr preisgünstig trotz der spiegelbildlichen Zylinderköpfe. Wirklich bezahlt wurden diese Motoren an der Tankstelle. Die Ära 'V-8 für alle' endete mit den diversen Ölkrisen der vielen Kriege im Nahen Osten. In jetzigen Zeiten sind V-8 Motoren im PKW nur für das eigene Ego nötig oder um dem Nachbarn zu zeigen, was man doch für ein toller Hecht ist.

Ausgefallene Bauformen

Sternmotoren Insbesondere im US-geprägten zivilen und militärischen Flugzeugbau waren vor den Gasturbinen Sternmotoren üblich. Sie haben eine ungerade Zylinderzahl (7 bzw 9) und nur einen Kurbelzapfen. Solche Motoren verhalten sich wie ein Einzylindermotor, der aus einer Zylindereinheit besteht. Die Krönung des Flugmotorenbaus war ein zweireihiger Sternmotor von Curtiss-Wright namens R 3350 TC. Er bestand aus insgesamt 18 Zylindern, angeordnet in zwei hintereinander liegenden Sternen, die um eine Winkelhalbierende versetzt waren. Dieser Motor hatte eine kurbelwellengetriebene Ladepumpe und mehrere Abgasturbinen, deren Leistung über komplizierte Kupplungen und Getriebe auf die Kurbelwelle gebracht wurde. Die Abkürzung TC steht für *turbo compound*, womit diese Abgasenergienutzung gemeint ist. Es ergab sich ein Hubraum von 54,9 Liter. Vier solche Motoren waren in dem sehr eleganten Passagierflugzeug Lockheed Super Constellation verbaut. Böse Zungen sprachen vom schönsten dreimotorigen Flugzeug der Welt (einer geht immer kaputt). Literaturempfehlung hierzu: Max Frisch, *Homo Faber* (zwei kaputt). Zweireihige Sternmotoren verhalten sich wie ein Zweizylinder-Boxer mit sehr großem Versatz.

Wankelmotoren sind aus Sicht der Maschinendynamik perfekt. Richtig ausgewuchtet verhalten sie sich wie ein Schwungrad. Wenn nur dieser sichelförmige Brennraum nicht wäre. Teile des Brennraums sind zu heiß (Zentrum), Teile sind zu kalt (Sichelspitzen). Die Abgase sind kaum in den Griff zu bekommen. Da sowohl übermäßig unverbrannte Kohlenwasserstoffe auftauchen (Verbrennung zu kalt) als auch viele Stickoxide (Verbrennung zu heiß). Die Abgas-Chemie muss zwei Hasen gleichzeitig fangen, die in entgegengesetzte Richtung laufen. Zudem muss das Triebwerk wie ein Zweitakter verlustgeschmiert werden. Die Anfangsprobleme mit den Dichtleisten sind mit jetzigen Werkstoffen sicher in den Griff zu bekommen. Der Mazda RX-8 wurde bis 2012 gebaut und galt als standfest, war jedoch ein Schluckspecht.

Hiermit endet das Kapitel des Massenausgleichs bei Kolbentriebwerken. Wir machen mit dem drögen Stoff weiter. ■

3. Kinetik der Schwingungen

Das Kapitel 'Grundlagen des Massenausgleichs bei Kolbenmaschinen' war ein eigenständiger Einschub. Jetzt setzen wir den Stoff aus dem Kapitel 'Kinematik der Schwingungen' fort. Bei der Kinematik betrachteten wir nur die Beschreibung der Bewegungen. Wichtig waren die kinematischen Größen Weg x , Geschwindigkeit \dot{x} , Beschleunigung \ddot{x} . Nun wollen wir uns dem zuwenden, was diese Schwingungen hervorruft, nämlich Kräfte und Momente. Bevor wir damit beginnen, muss noch der Begriff Freiheitsgrad eingeführt werden.

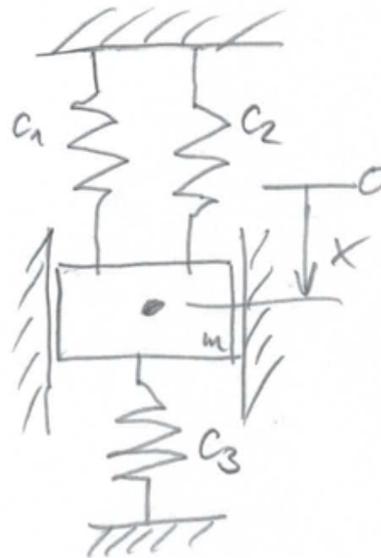
Die Anzahl der Freiheitsgrade (FHGe) ist die Mindestanzahl der Koordinaten (Längen, Winkel), die zur Beschreibung des Bewegungsablaufs notwendig sind.

Ein starrer Körper hat grundsätzlich sechs FHGe. Dies sind drei translatorische FHGe entlang unserer drei Achsen x , y , z sowie drei rotatorische FHGe um diese drei Achsen. Für den Anfang ist das ein bisschen zu viel. Wir wollen durch geeignete Führungen die Zahl der FHGe reduzieren. Gerne betrachten wir Schwinger mit nur einem FHG. Trotzdem schauen wir uns auch Schwinger mit mehreren FHGen an.



Federpendel 1 FHG

m : Masse, c : Federsteifigkeit.



Federpendel 1 FHG

Bei der Zahl der FHGe geht es um die Zahl der Koordinaten, nicht um die Zahl der Federn.



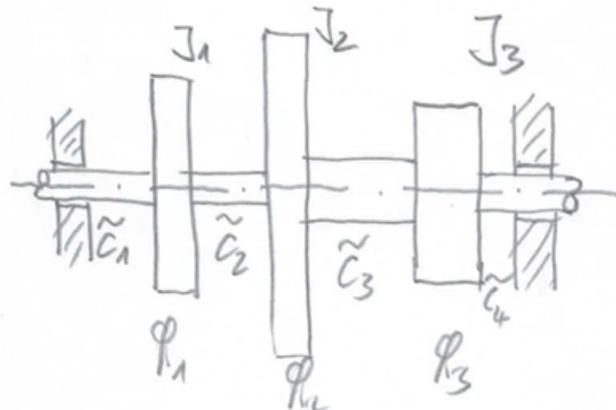
Körperpendel 1 FHG



Doppelpendel 2 FHG

S: Schwerpunkt, φ : Auslenkung.

Zur Information: Ein Doppelpendel entzieht sich der analytischen Berechnung. Es führt chaotische Schwingungen aus. Ein Modell steht im Eingangsbereich des Haus 4 der Fakultät ETI. Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus bei den beiden Auslenkungswinkeln φ führen zu nichtlinearen Bewegungsgleichungen, die chaotische Lösungen haben (nichts für uns). Würden wir so einen Schwinger untersuchen müssen, würden wir linearisieren und fordern, dass nur kleine Winkel zulässig sind. Es gilt dann die Vereinfachung $\sin \varphi \approx \varphi$ und $\cos \varphi \approx 1$.



Torsionsschwinger 3 FHG

J : Massenträgheitsmoment, φ : Auslenkung, \tilde{c} Torsionssteifigkeit.

In der Maschinendynamik ist das ein häufiger Vertreter für Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden. Stellen Sie sich einen Turbinenläufer mit verschiedenen Schaufelrädern vor, die mit mehr oder weniger steifen Zwischenwellen drehelastisch gekoppelt sind. Dieses Bild könnte auch eine Anlage symbolisieren, die aus Kraftmaschine, Getriebe und

Arbeitsmaschine besteht.

Spontan besteht der Gedanke, der Maschinensatz läuft als Starrkörper mit der Drehzahl n um. Das ist in der Realität nicht der Fall. Zwei benachbarte Massenträgheitsmomente überholen sich bei ihrer Drehbewegung wechselweise fortwährend, wobei sie ihre verdrehelastische Verbindungswelle \tilde{c} in wechselnder Richtung tordieren.

3.1. Auf den schwingenden Körper wirkende Kräfte und Momente

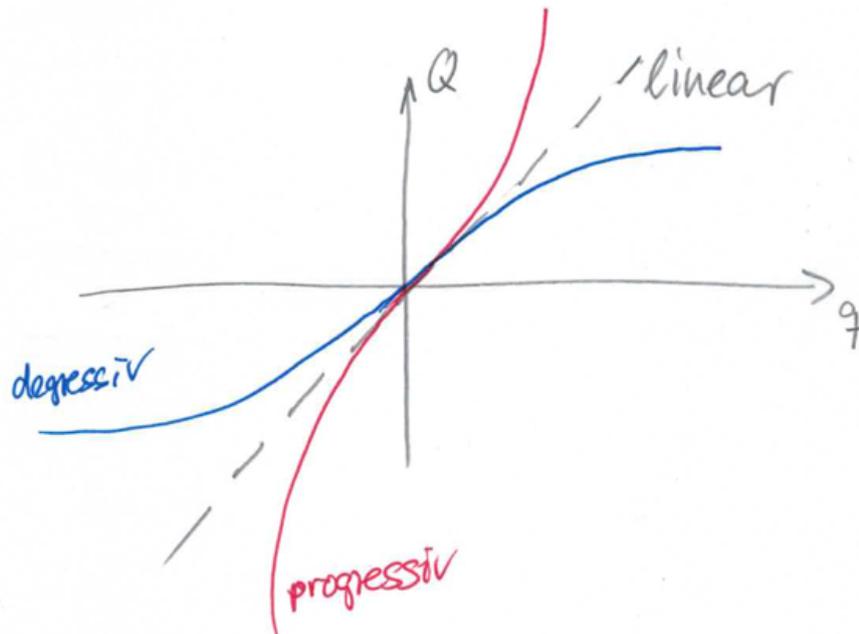
Alle auftretenden Kräfte und Momente am schwingenden Körper können ausnahmslos in eine der drei folgenden Schubladen einsortiert werden.

3.1.1. Rückstellkräfte oder Rückstellmomente

Sie wirken der Auslenkung von schwingenden Massen entgegen. Z.B.

- Schwerkkräfte beim Körperpendel,
- Federkräfte oder -momente.

Zusammenhang zwischen Verformung q und Kraft/Moment Q



Der i.A. nichtlineare q - Q -Zusammenhang wird häufig linearisiert. Für kleine Auslenkungen q gilt

$$(III.3.1) \quad Q = c q, \quad c : \text{Federsteifigkeit}$$

Für Stahlfedern ist das hinreichend genau.

Zwei Hinweise: 1: Warum Q und q ? Antwort: Q, q steht gleichbedeutend für F, x oder für M, φ .

2. Nichtlineare Stahlfedern muss man wirklich wollen. Tellerfedern sind das typische Beispiel für degressive Federn. Anfangs sind sie steif. Kurz bevor sie zur Beilagscheibe flach gedrückt werden, sind sie am weichsten. Progressive Schraubenfedern sind gelegentlich an Motorrädern zu sehen. Sie haben unterschiedlichen Windungsabstand. An einem Federende liegen die Windungen aufeinander, am anderen Ende habe die Windungen einen nennenswerten Abstand.

Besipiele für lineare Stahlfedern:

- Eingespannter Balken mit konstantem Querschnitt.

Nach der Theorie der elementaren Balkenbiegung (TM II) ist:

$$(III.3.2) \quad w(\ell) = \frac{F \ell^3}{3 E I_y};$$

wegen $c = \frac{F}{w(\ell)} = \frac{Q}{q}$

wird $c = \frac{3 E I_y}{\ell^3}$

- Torsionsstab.

Nach der Theorie für Wellen mit kreis(ring)förmigem Querschnitt (TM II) ist:

$$(III.3.3) \quad \vartheta(\ell) = \frac{M_t \ell}{G I_p};$$

wegen $\tilde{c} = \frac{M_t}{\vartheta(\ell)} = \frac{Q}{q}$

wird $\tilde{c} = \frac{G I_p}{\ell}$

Wichtig: Die Steifigkeiten von translatorischen Federn (z.B. Biegebalken) und rotatorischen Federn (Torsionsstab) sind unterschiedlich. Daher bekommt die Drehfedersteifigkeit eine Tilde als Unterscheidungsmerkmal: \tilde{c} .

Einheit von c : N/m, Einheit von \tilde{c} : Nm.

3.1.2. Dämpfungskräfte und -momente

Sie entziehen dem schwingenden System dauernd kinetische Energie und wandeln sie in Wärme um.

- Reibungskräfte und -momente

- Wirbelströme, [suchen sie auf einer Videoplattform danach](#).

Dämpfungskräfte sind häufig schwer bestimmbar. Einfache Annahme: Dämpfungskräfte und -momente sind geschwindigkeitsproportional:

$$(III.3.4) \quad Q_D = k \frac{dq}{dt} \quad \text{mit } k: \text{ Dämpfungskonstante.}$$

Diese Annahme ist für viele technische Schwingungen ausreichend.

Moment mal! Reibung haben wir in TM I ganz anders kennengelernt. Das war damals trockene oder COULOMBSche Reibung ($R = \mu N$). Wenn Schwingungsvorgänge anstehen, gibt es häufig NEWTONSche Reibung. Relativ zueinander bewegte Körper sind mit einem Schmierfilm benetzt. Wasser, Bier und Mineralöle sind NEWTONSche Flüssigkeiten unterschiedlicher Viskositäten, die zu einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft führen: $F_D = k \dot{x}$, $M_D = \tilde{k} \dot{\varphi}$. Auch hier haben k und \tilde{k} unterschiedliche Einheiten, weshalb es ein Unterscheidungsmerkmal gibt. Die Einheiten müssen Sie diesmal selbst herausfinden.

3.1.3. Äußere Erregerkräfte und -momente

Sie sind von außen aufgeprägt und haben häufig harmonischen Verlauf

$$(III.3.5) \quad Q(t) = Q_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

z.B. durch Unwuchten oder magnetische Wechselkräfte. Auch Schallwirkungen und Kurbeltriebe bewirken äußere Erregungen, [die allerdings nicht harmonisch sind, wie wir wissen](#).

3.2. Aufstellung von Bewegungsgleichungen

Mit Bewegungsgleichungen ist u.a. der zeitliche Verlauf der Auslenkung x oder φ (verallgemeinert q) berechenbar. Leider werden wir feststellen, dass wir immer eine Differentialgleichung als Bewegungsgleichung erhalten. Nun mal nicht so zaghaft mit 'leider', jetzt wird es endlich einmal sportlich.

Herleitung ist mittels Schwerpunktsatz und/oder Impulsmomentensatz möglich. Hierzu gehen wir in folgender Reihenfolge vor:

1. Festlegung der positiven Richtung von

Auslenkungen x_i, φ_i ,

Geschwindigkeiten $\dot{x}_i, \dot{\varphi}_i$,

Beschleunigungen $\ddot{x}_i, \ddot{\varphi}_i$

und Kräften/Momenten F_i, M_i .

$i = 1, 2 \dots N$; mit N : Zahl der Freiheitsgrade.

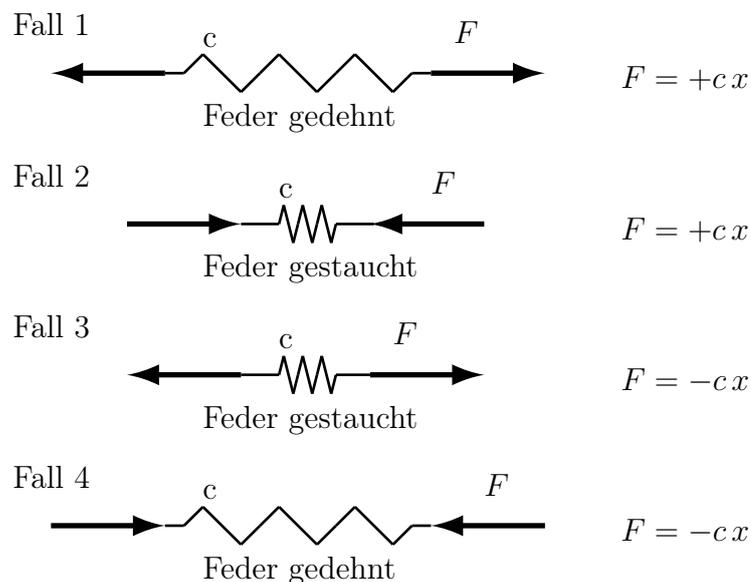
Möglichst alle Größen sollten in gleicher Richtung positiv angenommen werden.

2. Auslenkung aus der Ruhelage in positiver Auslenkungsrichtung; in ausgelenktem Zustand freischneiden der schwingenden Masse.

Einzeichnen von Schnittkräften oder -momenten. Dies sind die Rückstell-, die Dämpfungs- und die äußeren Kräfte oder Momente.

3. Anwenden von Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz auf die abgeschnittenen Massen.
4. Angabe der an den Feder- und Dämpfungselementen wirkenden Schnittgrößen durch Feder- und Dämpfungsgesetze.

Beim Aufstellen der Federgesetze (Schritt 4) sind folgende Fälle denkbar.



Dämpfungsgesetze können ganz entsprechend behandelt werden.

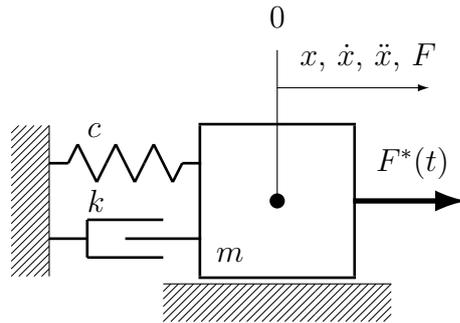
In den Fällen 1 und 2 passt die Krafrichtung zur Verformung der Feder. Diese plausiblen Fälle führen zu den erwartbaren Federgesetzen. In den Fällen 3 und 4 „stimmt etwas nicht“. Diese Inkompatibilität wird mit dem Minuszeichen im Federgesetz geheilt.

Beispiele zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen:

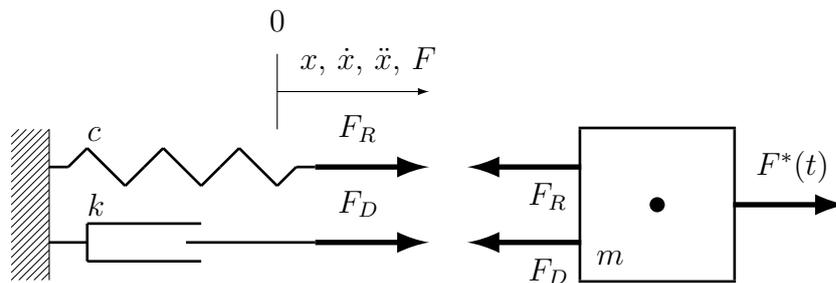
1. Masse-Feder-System auf reibungsfreier Unterlage mit Dämpfungselement.

$$F_D = k \dot{x}$$

und äußerer Zwangskraft $F^*(t)$.



In positive Richtung auslenken und freischneiden.



Schwerpunktsatz, angewandt auf Masse m :

$$-F_R - F_D + F^*(t) = m \ddot{x}.$$

Wir sehen eine gedehnte Feder mit ziehender Kraft; das entspricht unserem Fall 1. Für den Dämpfer gilt entsprechendes.

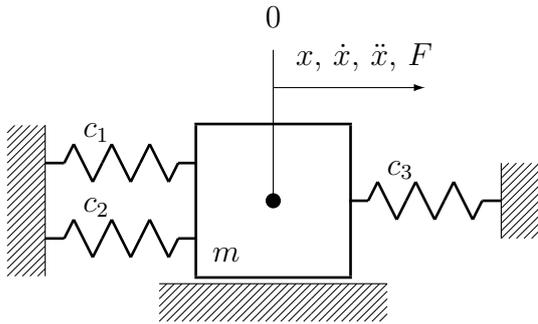
Mit $F_R = c x$ und $F_D = k \dot{x}$ folgt:

$$(III.3.6) \quad m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = F^*(t)$$

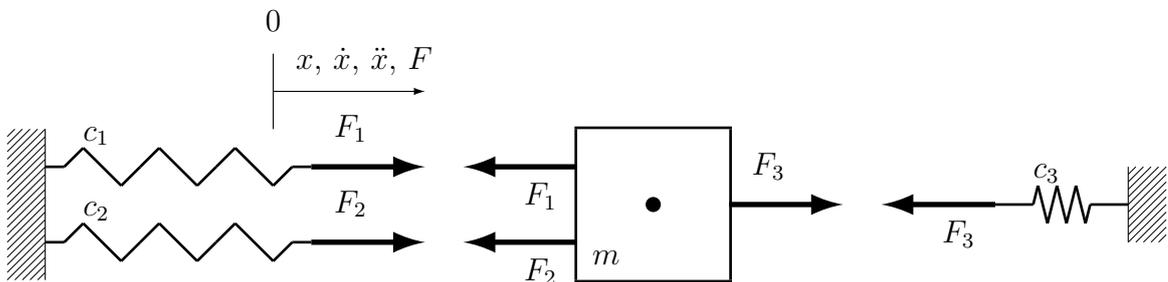
Diese Gleichung wird uns in der näheren und weiteren Zukunft noch viel beschäftigen. Wir werden uns auch schrittweise um die Lösung dieser Differentialgleichung (DGL) kümmern. Zunächst lassen wir es dabei bewenden und geben dieser DGL lediglich einen Namen.

(III.3.6) wird Schwingungsgleichung oder Bewegungsgleichung eines gedämpften Feder-Masse-Systems mit einem Freiheitsgrad und äußerer Anregung genannt.

2. Mehrfach gefesselte Masse, reibungsfrei, ohne äußere Anregung.



In positive Richtung auslenken und freischneiden.



Schwerpunktsatz, angewandt auf die Masse m

$$-F_1 - F_2 + F_3 = m \ddot{x}$$

Federgesetze:

$$F_1 = c_1 x \text{ (Fall 1)}, \quad F_2 = c_2 x \text{ (Fall 1)}, \quad F_3 = -c_3 x \text{ (Fall 3)},$$

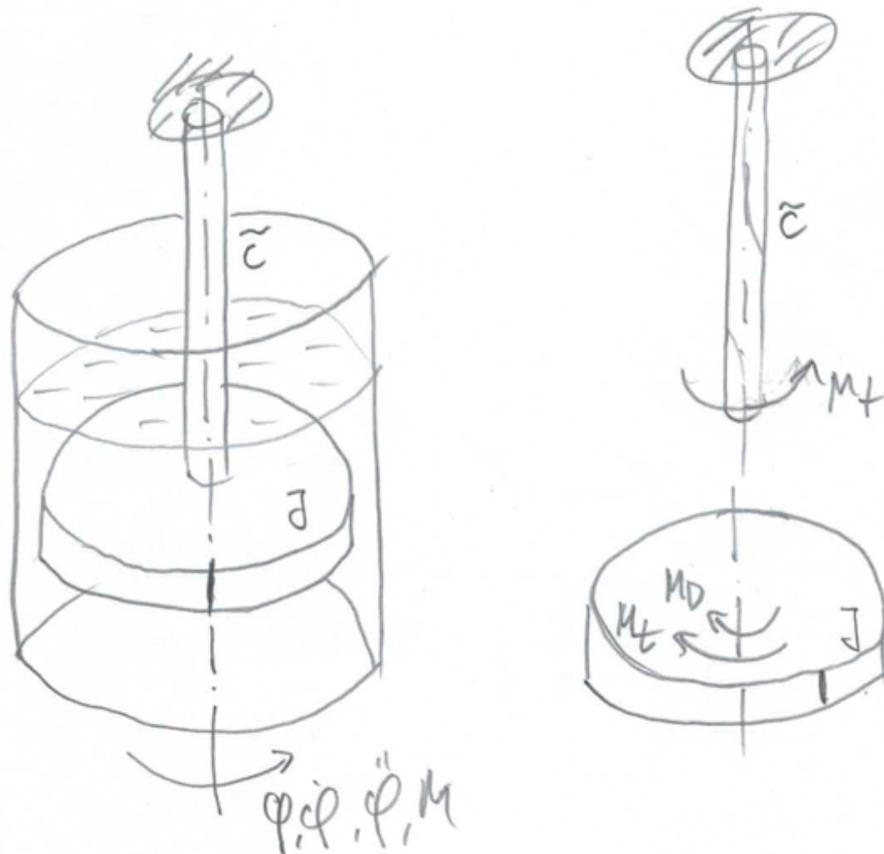
$$-c_1 x - c_2 x - c_3 x = m \ddot{x}.$$

oder

$$(III.3.7) \quad m \ddot{x} + (c_1 + c_2 + c_3) x = 0$$

Das ist verblüffend. Die Feder c_3 , die „von der anderen Seite“ wirkt, hat die gleiche Wirkung wie die Federn c_1 und c_2 gegenüber. Die Bewegungsgleichung zeigt uns das. Es sei ferner darauf hingewiesen, dass bei diesem Beispiel Dämpfung und äußere Anregung fehlen und demzufolge in der Bewegungsgleichung nicht auftauchen. ■

3. Gedämpfter Torsionsschwinger:



Stellen Sie sich ein Becherglas, gefüllt mit Honig vor (oder einer anderen zähviskosen Flüssigkeit). Von einer festen Aufhängung reicht eine dünne Torsionsfeder \tilde{c} in dieses Becherglas. Am Ende der Torsionsfeder ist eine Scheibe mit Massenträgheitsmoment J befestigt. Wir nehmen diese Scheibe, verdrehen sie in positiver Richtung und schneiden die Scheibe von der Torsionsfeder ab (ist eine riesen Sauerei, der ganze Honig an den Fingern).

Impulsmomentensatz, angewandt auf die abgeschnittene Scheibe:

$$-M_t - M_D = J \ddot{\varphi}.$$

Feder- und Dämpfungsgesetze:

$$M_t = \tilde{c} \varphi, \quad M_D = \tilde{k} \dot{\varphi} \quad (\text{beides mal Fall 1}).$$

Bewegungsgleichung eines gedämpften Torsionsschwingers ohne äußere Anregung:

$$(III.3.8) \quad J \ddot{\varphi} + \tilde{k} \dot{\varphi} + \tilde{c} \varphi = 0.$$

3.3. Mechanisch, elektrische Analogie

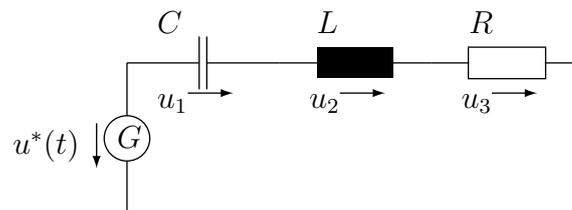
Für gedämpfte, erzwungene⁴ Schwingungen eines Feder-Masse-Systems mit einem Freiheitsgrad lautet die Bewegungsgleichung

$$(III.3.6) \quad m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = F^*(t).$$

Die eines entsprechenden Torsionsschwingers

$$(III.3.8) \quad J \ddot{\varphi} + \tilde{k} \dot{\varphi} + \tilde{c} \varphi = M^*(t).$$

Eine analoge DGL ist auch am elektrischen Schwingkreis aufstellbar.



Schwingkreisgleichung für die Ladung $q(t)$ des Kondensators C mittels Maschenregel:

$$u_1 + u_2 + u_3 - u^*(t) = 0$$

mit

Kapazität	$u_1 = \frac{1}{C} q$
Induktivität	$u_2 = L \frac{di}{dt} = L \dot{q}$
Widerstand	$u_3 = R i = R \dot{q}$

erhalten wir

$$(III.3.9) \quad L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = u^*(t)$$

Der schweren Masse entspricht die „schwere“ Spule (denken Sie an den Eisenkern), der Dämpfung entspricht der Widerstand (er erwärmt sich ebenso wie ein Reibungsdämpfer), der Feder entspricht der Kondensator. Diese beiden Elemente haben sogar einen ähnlichen Buchstaben c, C . Der einzige Schönheitsfehler ist die Tatsache, dass die Kapazität im Nenner steht. Aber wir erinnern uns, beim Kondensator gab es immer einen

⁴d.h. äußere Anregung vorhanden

Bruchstrich. Zu dem Thema gab es eine ziemlich hirnrissige Eselsbrücke.

Wir werden diesen elektrotechnischen Zweig nicht weiter verfolgen. Trotzdem ist es interessant, dass in zwei vollkommen verschiedenen Disziplinen die gleichen Schwingungsdifferentialgleichungen auftauchen.

Es gibt inzwischen drei gute Gründe (III.3.6), (III.3.8), (III.3.9), sich um die Lösung dieser Gleichungen zu kümmern. Wir gehen das Problem sehr vorsichtig an und streichen aus den Differentialgleichungen alles raus, was nicht unbedingt für eine Schwingung notwendig ist. Ohne Dämpfung und ohne äußere Anregung (genannt frei) gibt es auch schwingungsfähige Systeme. Da wir die Struktur der DGLn drei mal wieder erkannt haben, gilt der Spruch „kennste eine, kennste alle“.

3.4. Freie ungedämpfte Schwingung

Stellvertretend für alle derartigen Schwingungen mit einem Freiheitsgrad wird zukünftig (III.3.6) behandelt. Betrachtet wird

$$(III.3.10) \quad m \ddot{x} + c x = 0$$

Anders als die Differentialgleichungen der Balkenbiegung kann die vorliegende Schwingungsdifferentialgleichung nicht 'ausgerechnet' werden. Wenn wir mathematisch korrekt vorgehen wollten, müssten wir für x einen Ansatz machen, das heißt, eine Lösung raten, oft genug ableiten und in die DGL einsetzen. Für die Spezialisten: Der Ansatz $x = e^{\lambda t}$ ist zielführend. Ja ja, so etwas fällt einem nachts im Schlaf ein.

Wir gehen etwas rustikaler vor. Wir bringen die DGL in eine bestimmte Form (\ddot{x} steht alleine), benennen einige Teile geschickt um, so dass die Lösung bequem angeschrieben werden kann (aus $\frac{c}{m}$ soll bequem die Wurzel gezogen werden können) und lassen uns dann die Lösung einflüstern.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0, \quad \text{Umbenennung} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$(III.3.11) \quad x = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

oder

$$x = E \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$\text{mit} \quad A = E \cos \alpha, \quad B = E \sin \alpha.$$

Die Größen A , B bzw. E , α sind letztendlich Integrationskonstanten und werden wie üblich aus Anfangsbedingungen⁵ bestimmt. Sie lauten:

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = v_0.$$

Es liegt eine harmonische Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 vor. Es ist bei einem System mit einem Freiheitsgrad

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

(III.3.12)

oder

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{c}{m}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

die Eigenfrequenz bzw. Eigenkreisfrequenz des Systems.

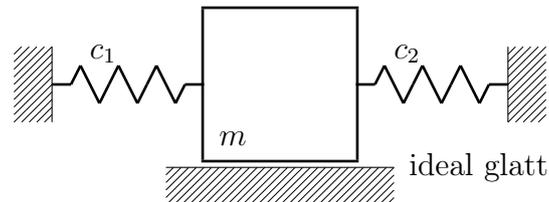
Je nach Sichtweise ist das total einfach oder total unbefriedigend. Um die Eigenkreisfrequenz des Systems zu 'berechnen', muss lediglich die DGL so angeschrieben werden, dass \ddot{x} alleine steht. Alles was sich dabei als Vorfaktor vor 'x ohne Punkt' ansammelt wir umbenannt in ω_0^2 . Und schon hat man sie, die Eigenkreisfrequenz ω_0 , die dann leicht in die Eigenfrequenz f_0 oder in die Periodenzeit T umgerechnet werden kann.

Lass uns das mal üben.

⁵Beim Balken nannten wir sie die Randbedingungen

3.4.1. Übung 1

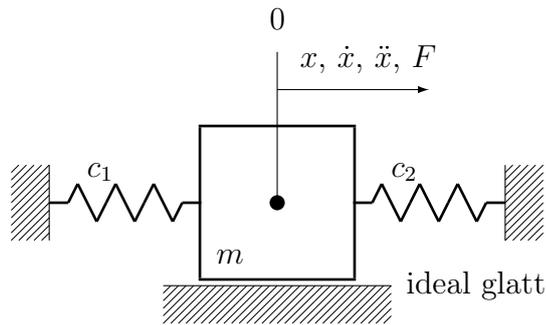
Geg.: Feder-Masse-System

Die Masse wird um x_0 ausgelenkt und dann losgelassen.Geg.: $m = 5 \text{ kg}$, $c_1 = 2000 \text{ N/m}$, $c_2 = 4000 \text{ N/m}$, $x_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

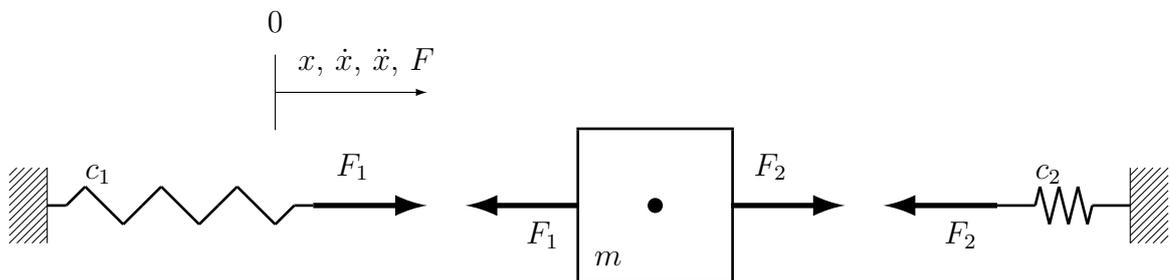
Ges.:

1. Bewegungsgleichung,
2. Periodenzeit der entstehenden Schwingung,
3. Weg-Zeit-Gesetz.

1. Wir definieren eine positive Richtung



Wir lenken in positiver Richtung aus und schneiden ab



Schwerpunktsatz: $F_2 - F_1 = m \ddot{x}$

Federgesetze: $F_1 = c_1 x, \quad F_2 = -c_2 x$

einsetzen: $-c_1 x - c_2 x = m \ddot{x}$

Alles mit x auf die linke Seite: $m \ddot{x} + (c_1 + c_2) x = 0$

\ddot{x} isolieren: $\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m} x = 0$

Die Bewegungsgleichung liegt vor.

2. Um ω_0 und daraus T zu berechnen, benennen wir den Vorfaktor vor x um.

umbenennen: $\omega_0^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}$

es gilt immer: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

also: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}}$

mit Zahlen: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{6000}{5}}} \text{ s}$

Periodenzeit: $T = 0,18 \text{ s}$

Bitte selbst eine Einheitenkontrolle durchführen!

3. Weg-Zeit-Gesetz ist ein Synonym für die Lösung der DGL, wobei die Integrationskonstanten über die Anfangsbedingungen berechnet werden sollen. Die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ist immer gleich

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t).$$

Die Anfangsbedingungen müssen dem Aufgabentext entnommen werden. Dort heißt es: „Die Masse wird um x_0 ausgelenkt und dann losgelassen“. Noch deutlicher wäre es gewesen, wenn dort stünde „... aus der Ruhe losgelassen“. Merke, wenn zu Anfangsgeschwindigkeiten keine Angaben gemacht werden, dann sind sie Null. Gleiches gilt für die Anfangsauslenkung. Hier gilt

$$1) \quad x(t=0) = x_0, \quad 2) \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

Um Bedingung 2) einsetzen zu können, muss die allgemeine Lösung der DGL einmal abgeleitet werden. Wir gewinnen dadurch einen Ausdruck der Art $\dot{x}(t) = \dots$. Wir erhalten

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \sin(\omega_0 t).$$

Auch das ist immer gleich. Die innere Ableitung liefert den Faktor ω_0 , die Winkelfunktionen wechseln und es gibt einen Vorzeichendreher bei Ableiten des Kosinus.

Nun können beide Anfangsbedingungen eingesetzt werden. Strategische Überlegungen über die Reihenfolge, wie bei der Balkenbiegung, sind unnötig. Wir müssen nur wissen, dass gilt: $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$.

$$\begin{array}{ll} x_0 = A \cdot 0 + B \cdot 1 & \rightarrow B = x_0 \\ 0 = \omega_0 A \cdot 1 - \omega_0 B \cdot 0 & \rightarrow A = 0 \end{array}$$

Wir erhalten als Weg-Zeit-Gesetz

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

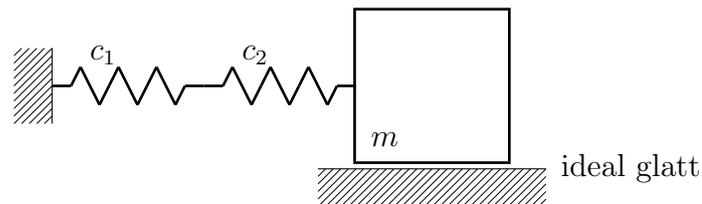
oder mit den verfügbaren Zahlenwerten

$$x(t) = 1 \cdot 10^{-3} \cos\left(\frac{34,6}{\text{s}} t\right) \text{ m}$$

Das betrachtete schwingungsfähige System schwingt mit der Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 34,6 \text{ 1/s}$ und einer Amplitude von 1 mm. Da keine Dämpfung vorhanden ist, wird es das tun bis in alle Ewigkeit (nicht realistisch aber mathematisch korrekt). ■

3.4.2. Übung 2

Gegeben ist ein schwingungsfähiges System mit zwei aneinander gekoppelten Federn, die im Vergleich mit der Masse m als masselos angesehen werden können.

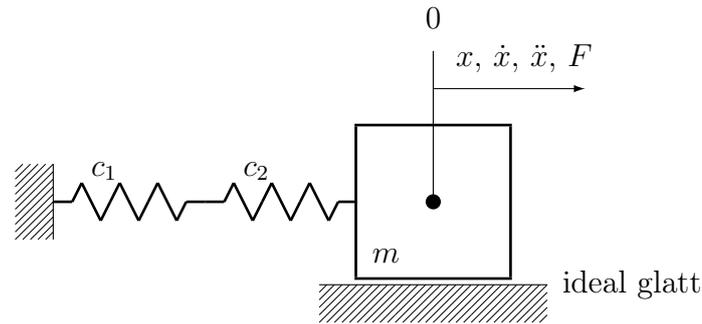


Geg.: $c_1 = 4 \cdot 10^4$ N/m, $c_2 = 6 \cdot 10^4$ N/m, $m = 200$ kg.

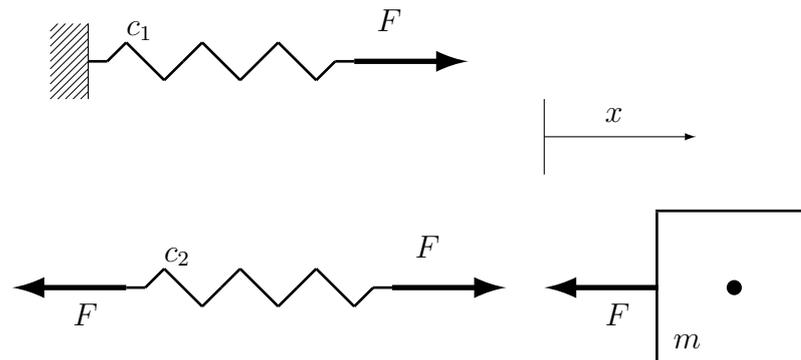
Ges.:

1. Bewegungsgleichung,
2. Ersatzfedersteifigkeit,
3. Eigenkreisfrequenz,
4. Weg-Zeit-Gesetz für $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$.

1. Wir definieren eine positive Richtung



Wir lenken in positiver Richtung aus und schneiden ab. Die Anfangsbedingungen sagen zwar, wir beginnen mit einer Anfangsgeschwindigkeit \dot{x}_0 . Das berücksichtigen wir später. Jetzt geht es um die immer gleiche Vorgehensweise beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen.



Da die Federn masselos sind, erhalten wir an jeder Schnittstelle die gleiche Kraft F . Das ist die gute Nachricht. Danach wird es kompliziert. Wir wissen, dass die Masse m um das Maß x ausgelenkt wird. Wir wissen nicht, um wie viel die beiden Federn gedehnt werden. Wären es zwei identische Federn, so könnten wir ganz richtig vermuten, dass sie jeweils um $x/2$ gedehnt würden. Sie sind aber nicht identisch. Also müssen wir sehr vorsichtig vorgehen.

Schwerpunktsatz	$-F = m \ddot{x}$
Federgesetz 1	$F = c_1 x_1$
Federgesetz 2	$F = c_2 x_2$
Kinematik, Gl.3	$x_1 + x_2 = x$

Die uns unbekanntes Federwege (Teilauslenkungen) x_1, x_2 wollen wir loswerden.
Wir addieren die Gleichungen 1 und 2

Addition	$2F = c_1 x_1 + c_2 x_2$	
Kinematik, Gl. 3	$x_1 = x - x_2$	
x_1 einsetzen	$2F = c_1 x - c_1 x_2 + c_2 x_2$	
Federgesetz 2	$x_2 = \frac{F}{c_2}$	
x_2 einsetzen	$2F = c_1 x - F \frac{c_1}{c_2} + F \frac{c_2}{c_2}$	
nach F auflösen	$F \left(2 + \frac{c_1}{c_2} - 1 \right) = c_1 x$	
weiter	$F = \frac{c_1 x}{1 + \frac{c_1}{c_2}}$	
Hauptnenner	$F = \frac{c_1 x}{\frac{c_2}{c_2} + \frac{c_1}{c_2}}$	
neues Federgesetz	$F = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x$	
in Schwerpunktsatz	$-\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x = m \ddot{x}$	
Bewegungsgleichung	$m \ddot{x} + \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x = 0$	
\ddot{x} isolieren	$\ddot{x} + \frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)} x = 0$	fertig

2. Am Eintrag 'neues Federgesetz' konnten wir es schon sehen, die Ersatzfedersteifigkeit lautet:

$$c_{\text{ers}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

Das erinnert uns sehr stark an die Parallelschaltung von OHMSchen Widerständen bzw. an die Reihenschaltung von Kondensatoren.

Wenn wir wieder einmal, z.B. in der Klausur, eine Reihenschaltung von Federn sehen, dann werden wir diese Berechnung nicht erneut durchführen, sondern gleich die Ersatzfedersteifigkeit verwenden.

Mit Zahlenwerten $c_{\text{ers}} = 2,4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

3. Um die Eigenkreisfrequenz zu bestimmen, suchen wir uns die DGL mit isoliertem \ddot{x} heraus und benennen den Vorfaktor von x mit ω_0^2 .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}, \quad \omega_0 = 10,95 \frac{1}{\text{s}}$$

4. Für die Berechnung des Weg-Zeit-Gesetz gilt erneut

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

und

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \sin(\omega_0 t).$$

Die Anfangsbedingungen lauten diesmal

$$1) \quad x(t=0) = 0, \quad 2) \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot 0 + B \cdot 1 && \rightarrow && B = 0 \\ \dot{x}_0 &= \omega_0 A \cdot 1 - \omega_0 B \cdot 0 && \rightarrow && A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

Das Weg-Zeit-Gesetz lautet

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

3.5. Freie gedämpfte Schwingung

Wir haben noch immer das Ziel, die Bewegungsgleichung (III.3.6) $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F^*(t)$ zu lösen. In einem ersten Schritt hatten wir die Gleichung radikal verkürzt und alles entfernt, was nicht unbedingt erforderlich ist. Das führte zu $m\ddot{x} + cx = 0$. Wir nannten das freie ($F^*(t) \equiv 0$) ungedämpfte ($k = 0$) Schwingung. Jetzt wollen wir schrittweise die zwei fehlenden Bestandteile wieder hinzufügen und uns die Lösungen anschauen.

Bewegungsgleichung nach (III.3.6) mit $F^*(t) \equiv 0$ und $k \neq 0$.

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$$

\ddot{x} isolieren.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Auch in diesem Fall werden Vorfaktoren geschickt umbenannt, um das Ergebnis schlank anschreiben zu können.

Unbefriedigend aber praktisch: Der Vorfaktor vor \dot{x} soll bequem durch zwei teilbar sein, aus dem Vorfaktor vor x soll wieder bequem die Wurzel ziehbar sein.

$$\text{Mit } 2D = \frac{k}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

wird

$$(III.3.13) \quad \ddot{x} + 2D\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Häufig wird anstelle des Dämpfungswerts D ein dimensionsloses sog. LEHRsches⁶ Dämpfungsmaß benutzt.

$$\vartheta = \frac{D}{\omega_0} = \frac{k}{2m\omega_0}$$

Dämpfungsparameter gibt es demzufolge reichlich. Jeder hat seine Vorteile.

k : Dämpfungsfaktor, praktisch zur Angabe von Dämpfungskräften oder -momenten.
Beispiel $M_D = \tilde{k}\dot{\varphi}$, $F_D = k\dot{x}$.

D : Dämpfungswert, günstig um die Lösung der DGL (III.3.13) anzuschreiben.

ϑ : LEHRsches Dämpfungsmaß, sehr praktisch, um ein Gespür für Dämpfungseigenschaften von Materialien zu erlangen.

Leider werden die Formelzeichen k , D , ϑ in der Literatur nicht einheitlich verwendet, auch die Begrifflichkeiten sind nicht einheitlich. Jeder kocht da sein eigenes Süppchen.

Mit dem LEHRsches Dämpfungsmaß lautet die DGL (III.3.13)

$$(III.3.14) \quad \ddot{x} + 2\vartheta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

⁶Ernst Lehr 1896 bis 1945

Im Allgemeinen ist $\vartheta \ll 1$.

Werkstückdämpfung bei Federelementen aus dem

Werkstoff	ϑ	in %
Stahl	0,001	0,1%
Grauguss	0,02	2%
Holz	0,01	1%
Gummi	0,05	5%

Leute, die mit dieser Thematik regelmäßig zu tun haben, entwickeln ein Gespür für das LEHRsche Dämpfungsmaß. Sie schlagen die zu betrachtende Struktur an und hören zu, wie lange der das Geräusch nachklingt. Je länger es nachklingt, desto geringer das Dämpfungsmaß. Das allerdings ist ein Vorgriff auf die Lösung, der DGL, um die wir uns jetzt kümmern wollen.

Mathematische Behandlung der Gleichung

$$(III.3.13) \quad \ddot{x} + 2D\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Erneut führen wir eine Abkürzung ein

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - D^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}.$$

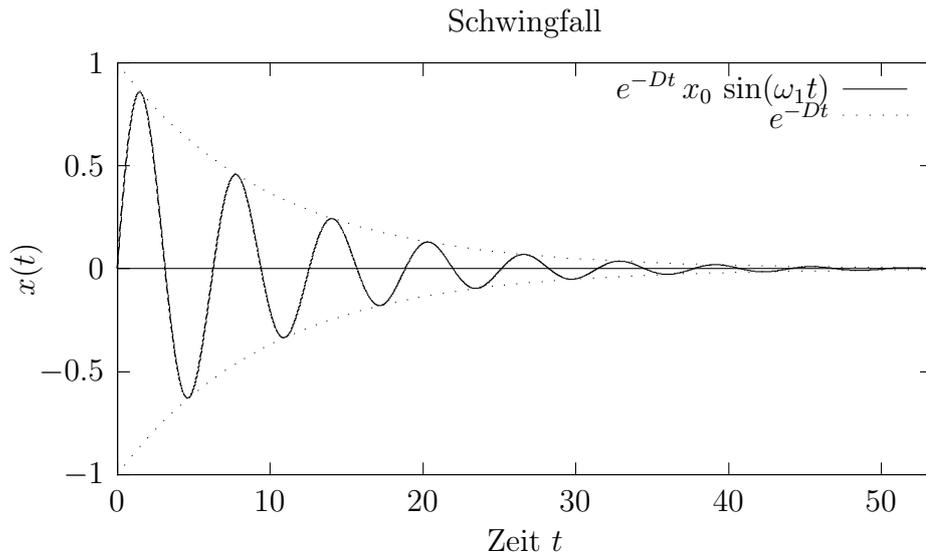
ω_1 ist die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems, sie liegt ein wenig unterhalb der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 . Für die DGL (III.3.13) gibt es nicht eine, sondern drei Lösungen, je nachdem, wie stark die Dämpfung ausfällt.

1. Kleine Dämpfung, das heißt $\omega_0^2 > D^2$ bzw $1 > \vartheta$. In diesem Fall lautet die Lösung

$$(III.3.15) \quad \begin{aligned} x(t) &= e^{-Dt} \{c_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_1 t)\} \\ \text{oder} \\ x(t) &= e^{-Dt} c \sin(\omega_1 t + \varepsilon) \end{aligned}$$

Die Konstanten c_1 , c_2 bzw c , ε werden wieder aus Anfangsbedingungen ermittelt.

Die Schwingungamplitude nimmt gemäß der Dämpfungsfunktion e^{-Dt} ab. Dieser Fall wird „Schwingfall“ genannt.



Diese Bewegung ist nichtperiodisch. Trotzdem wird häufig eine Schwingzeit T' angegeben, z.B. als Abstand zweier aufeinanderfolgenden Maxima.

$$(III.3.16) \quad \begin{aligned} T' &= \frac{2\pi}{\omega_1} \\ T' &= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - D^2}} \\ T' &= \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}} \end{aligned}$$

Bei sehr kleinen Werten für ϑ , z.B. $\vartheta_{St} = 0,001$ gilt

$$T' \approx T, \quad \omega_1 \approx \omega_0.$$

2. Starke Dämpfung, es sei $\omega_0^2 < D^2$ bzw. $1 < \vartheta$. In diesem Fall lautet die Lösung

$$(III.3.17) \quad x(t) = c_1 e^{-(D+\omega_0)t} + c_2 e^{-(D-\omega_0)t}$$

Keine Schwingung, sondern Kriechen in die Ruhelage, daher „Kriechfall“ genannt.

Stellen Sie sich ein Glas mit zähem Honig vor, das Sie zunächst schief halten und dann gerade hinstellen. Der Honig schwappt nicht im Glas hin und her, wie Wasser, sondern kriecht in die neue Ruhelage.

3. Kritische Dämpfung, es sei $\omega_0^2 = D^2$ bzw $1 = \vartheta$, d.h. $\vartheta = 100\%$. In diesem Fall lautet die Lösung

$$(III.3.18) \quad x(t) = c_1 e^{-Dt}(c_1 + c_2 t).$$

Auch hier erfolgt keine Schwingungsbewegung. Die Besonderheit dieses Spezialfalls, auch genannt „aperiodischer Grenzfall“ ist, dass das System am schnellsten wieder in die Ruhelage zurückkehrt. Schwingfall und Kriechfall brauchen hierfür länger.

In Zeiten, als Messgeräte noch Zeiger hatten, wurde der aperiodische Grenzfall angestrebt. Das System Zeiger und Rückholfeder stellt ein schwingungsfähiges System dar. Um bei Messwertänderung möglichst schnell ein stabiles Messergebnis anzuzeigen, wurde kritische Dämpfung angestrebt.

Aus Sicht der Maschinendynamik ist der Schwingfall von großer Bedeutung. Kriech- und aperiodischer Grenzfall werden nur zur Vervollständigung erwähnt.

3.6. Gedämpfte Schwingungen mit äußerer Anregung

Nun wird der letzte Term $F^*(t)$ wieder hinzugefügt und die vollständige Bewegungsgleichung (III.3.6) wird betrachtet.

Wir betrachten ein schwingendes System mit einem Freiheitsgrad. Es hat geringe Dämpfung und eine äußere Anregung. Beispielhaft betrachten wir die DGL eines Masse-Feder-Systems.

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = F^*(t)$$

Diese DGL ist inhomogen, d.h. die rechte Seite ist nicht Null, man sagt auch, sie hat eine Störfunktion. Wegen der Linearität (x , \dot{x} , \ddot{x} werden nicht quadriert oder sonstwie verunstaltet) gilt, dass die Lösung der gesamt-DGL aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL besteht.

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}}$$

Das ist verwirrend aber wahr. Die Gesamtlösung setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen. Den ersten Teil x_{hom} erhalten wir, indem wir die Störfunktion, d.h. die rechte Seite $F^*(t)$ gleich wieder entfernen und die dazugehörige Lösung anschreiben. Neu erfinden müssen wir sie nicht, wir schauen einfach unter „Schwingfall“ nach und schreiben ab. Komplizierter wird es mit dem zweiten Teil, der partikulären Lösung x_{part} . Die Vorgehensweise zum Finden der partikulären Lösung wird schön beschrieben mit der Aussage „Wir machen einen Ansatz nach Art der rechten Seite.“ Wir vermuten zurecht, dass sich die Größe $x(t)$ so ähnlich verhält, wie die Störfunktion $F^*(t)$. Dazu müssen wir natürlich wissen, wie der Verlauf der äußeren Anregung $F^*(t)$ ist.

Harmonische Anregung

Technisch wichtig und mathematisch noch einigermaßen in den Griff zu bekommen sind Anregungen in der Form

$$F^*(t) = F_0 \cos(\Omega t + \alpha),$$

hervorgerufen z.B. durch Unwuchtanregung.

Wichtig: Ω (Groß-omega) ist die Kreisfrequenz der äußeren Anregung, ω (klein-omega) steht für die Eigenkreisfrequenz des schwingungsfähigen Systems, also ω_0 im ungedämpften Fall oder ω_1 im gedämpften Fall. Wir müssen hier sauber trennen, denn wir werden feststellen, dass es bei $\Omega = \omega$ zu einer ziemlichen Katastrophe kommt.

Wahrscheinlich hätte ich schon früher darauf hinweisen müssen, $\sin(\omega t)$ wird wie folgt ausgesprochen: „Sinus-omega-te“. Wer hier „Sinus-we-te“ sagt, muss dringen umdisponieren. Das kommt gar nicht gut in Ingenieurskreisen.

Unsere DGL lautet nun

$$(III.3.19) \quad m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = F_0 \cos(\Omega t + \alpha) \quad \text{oder auch}$$

$$\ddot{x} + 2D \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\text{mit} \quad D = \frac{k}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Nach (III.3.15) ist

$$(III.3.20) \quad x_{\text{hom}} = e^{-Dt} \{c_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_1 t)\}$$

$$\text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - D^2}$$

Die partikuläre Lösung mit Hilfe des Ansatzes nach Art der rechten Seite auszurechnen, ist ziemlich mühselig. Wir akzeptieren es, dass die Lösung „vom Himmel fällt“.

$$(III.3.21) \quad x_{\text{part}} = \frac{F_0 \cos(\Omega t + \alpha - \delta)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4D^2 \Omega^2}}$$

Die Gesamtlösung ergibt sich zu

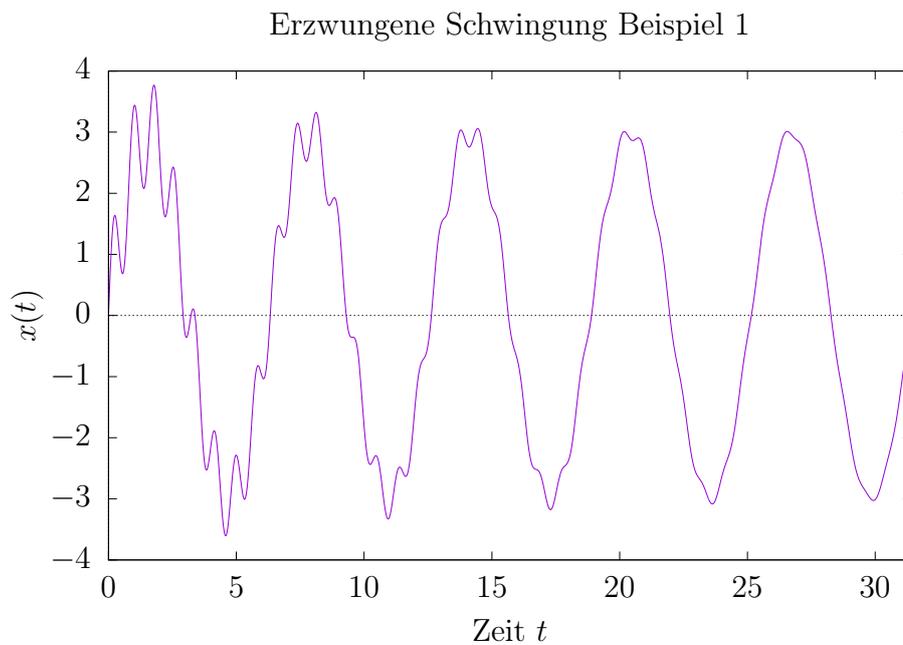
$$(III.3.22) \quad x(t) = e^{-Dt} \{c_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_1 t)\} + \frac{F_0 \cos(\Omega t + \alpha - \delta)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 D^2 \Omega^2}}$$

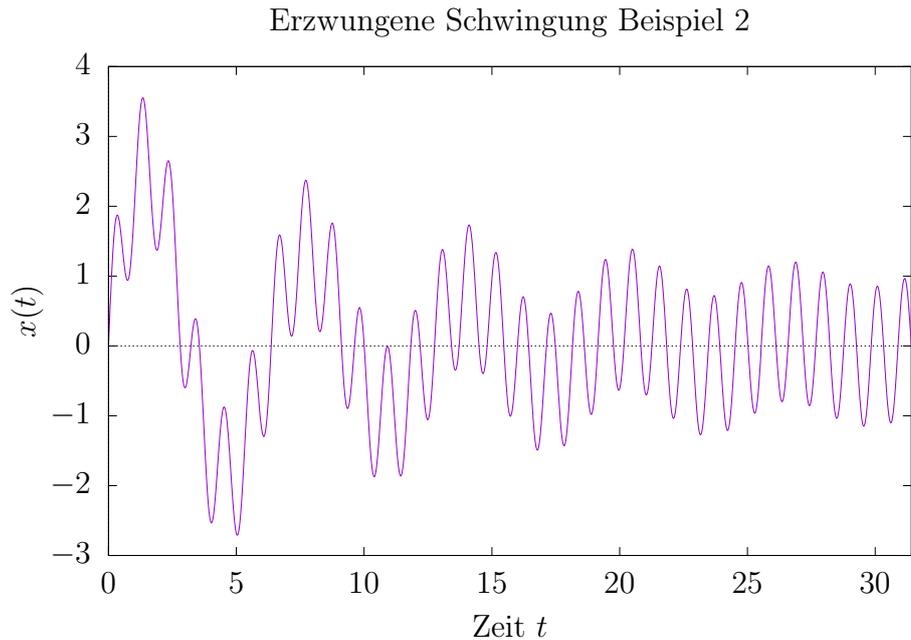
mit

$$(III.3.23) \quad \delta = \arccos \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 D^2 \Omega^2}}$$

Der Quotient $\frac{\delta}{\omega_0}$ ist der Zeitunterschied zwischen den Nulldurchgängen der äußeren Zwangskraft und der erzwungenen Schwingung.

Auf diesen Phasenwinkel δ gehen wir zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal ein. Er nimmt Werte zwischen 0° und 180° ein.





Die homogene Teillösung klingt nach hinreichend langer Zeit ab und verschwindet. Im Beispiel 1 ist das der hochfrequente Anteil, im Beispiel 2 der niederfrequente Anteil. Daher ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung von besonderer Bedeutung, denn diese Schwingung bleibt bestehen.

Die Amplitude der verbleibenden erzwungenen Schwingung ist von entscheidender Bedeutung. Wir werden uns genauer darum kümmern. Insbesondere interessiert uns, ob Schwingungsamplituden plötzlich groß werden können. So etwas ist sehr unerwünscht. Wenn wir uns die Gleichung (III.3.21) anschauen, ahnen wir schon, dass Unheil droht, denn im Nenner steht eine Differenz. Wenn der Nenner klein wird, wird das Ergebnis groß. Wenn der Nenner Null wird, müssen wir uns sogar Chuck Norris zu Hilfe holen.

Wir haben die Lösung der DGL $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ erfahren. Sie besteht aus zwei Bestandteilen, $x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}}$. Der homogene Teil ist weniger wichtig, denn er klingt dämpfungsbedingt mit der Zeit ab. Der partikuläre Teil

$$x_{\text{part}} = \frac{F_0 \cos(\Omega t + \alpha - \delta)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4D^2 \Omega^2}}$$

ist entscheidend, um ihn wollen wir uns jetzt kümmern.

Die Auslenkungsamplitude der erzwungenen Schwingung lautet

$$(III.3.24) \quad \hat{x}_\infty = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4D^2 \Omega^2}}$$

Um die Auslenkungsamplitude zu erhalten, wird einfach der Maximalwert des Kosinus (1) eingesetzt. \hat{x}_∞ steht für Schwingungsamplitude (=Höchstwert \hat{x}) nach hinreichend (unendlich) langer Zeit (∞), weil dann die homogene Lösung abgeklungen ist.

Diese Schwingungsamplitude wird gerne zu einer dimensionslosen Größe umgerechnet.

'Dimensionslos machen' ist ein gerne angewandter Trick, um Ergebnisse mit einfachen Zahlenwerten ohne Einheiten zu erhalten. Prinzipielle Ergebnisse ohne den Einfluss der gerade verwendeten Massen und Federn entstehen so. Wichtige Erkenntnisse treten klarer zu Tage. In der Strömungsmechanik wird das sehr gerne gemacht, ich erinnere nur an die Kennzahlen Reynolds Re , Prandtl Pr , Nußelt Nu . Hierzu multipliziert oder dividiert man die Größe, in unserem Fall \hat{x}_∞ , so lange mit Systemgrößen, bis die Einheit (hier m bzw. mm) verschwindet

$$(III.3.25) \quad \hat{H}_\infty = \frac{\hat{x}_\infty \omega_0^2 m}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4 \vartheta^2 \eta^2}}$$

mit

$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$: Dimensionslose Anregungsfrequenz.

$\vartheta = \frac{D}{\omega_0}$: Dimensionsloses LEHRsches Dämpfungsmaß.

\hat{H}_∞ : Dimensionslose Auslenkungsamplitude.

Die dimensionslose Anregungsfrequenz η (eta) ist ein sehr plausibler Parameter. Wenn $\eta < 1$, dann ist die Frequenz der äußeren Anregung kleiner als die Eigenfrequenz. So etwas nennt man auch unterkritisch. Wenn $\eta > 1$, ist die Frequenz der äußeren Anregung größer als die Eigenfrequenz, das ist überkritisch. Wenn $\eta = 1$, dann stimmen beide Frequenzen überein. Diesen kritischen und potenziell katastrophalen Zustand werden wir gleich behandeln. Das LEHRsches Dämpfungsmaß ϑ (theta) kannten wir schon

Aus (III.3.25) ist ersichtlich, dass bei etwa $\eta = 1$ bzw. $\omega_0 = \Omega$ die Amplitude \hat{H}_∞ und demzufolge auch \hat{x}_∞ ein Maximum hat. Dieses Phänomen heißt Resonanz und ist potenziell gefährlich. Das Maximum

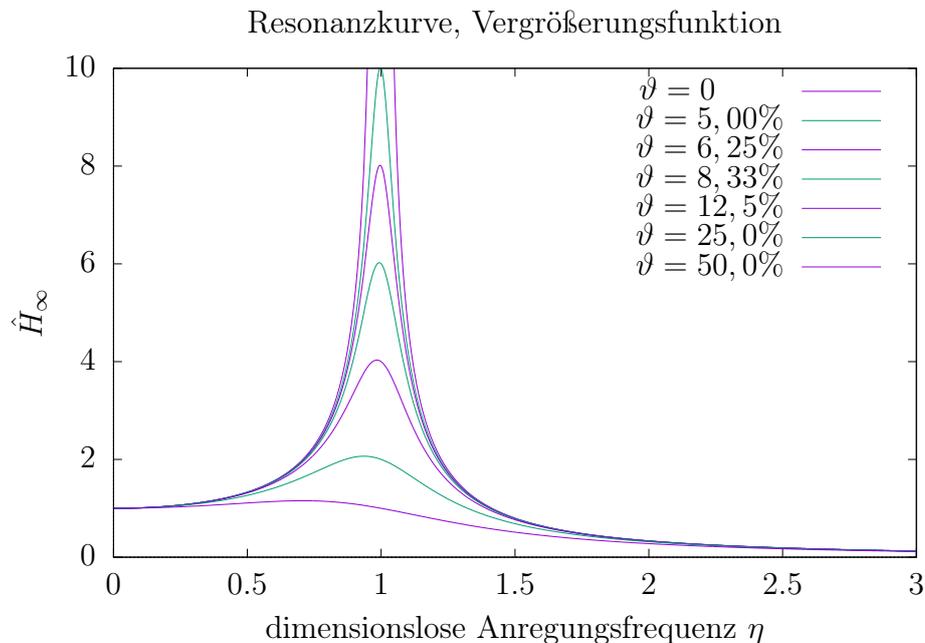
$$(III.3.26) \quad \hat{H}_{\max} \approx \frac{1}{2\vartheta}$$

heißt Resonanzmaximum oder Resonanzspitze und ist nur von der Dämpfung abhängig. Bei fehlender Dämpfung strebt die Auslenkungsamplitude gegen unendlich, da die Nenner von (III.3.25) und (III.3.24) Null sind. Zerstörungen sind möglich.

Auch eine zu geringe Dämpfung, weil zum Beispiel hydraulische „Stoßdämpfer“ undicht geworden sind, führt zu gefährlich verstärkten Auslenkungsamplituden. Ich hatte vor

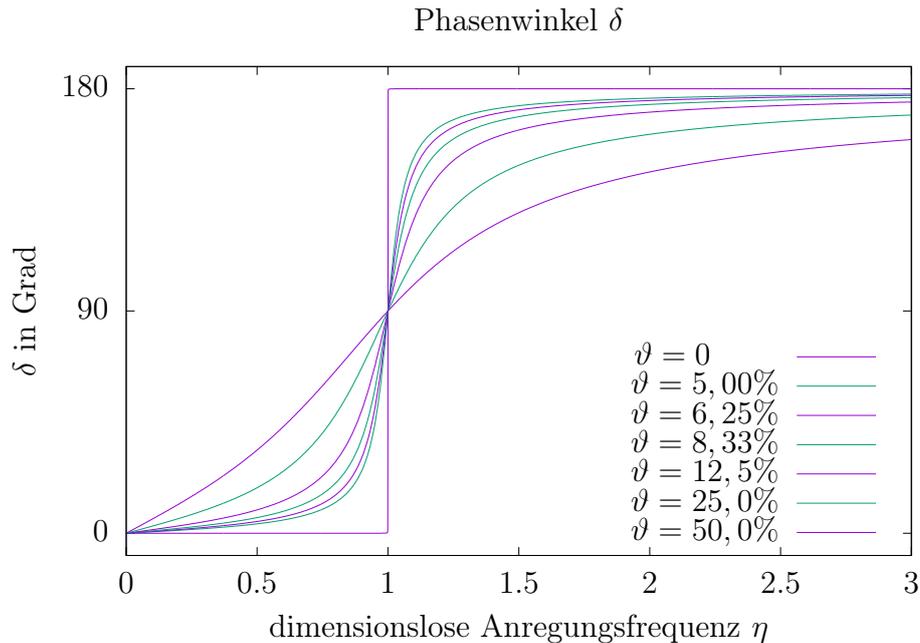
Jahren eine Waschmaschine, bei der die Kolbenstangen beider Hydraulikdämpfer gebrochen waren. Zum Glück war das Stromkabel kürzer als die Wasserschläuche. Die Maschine hat sich bei ihrer Wanderung selbst von der Energiezufuhr getrennt.

Die Darstellungen $\hat{x}_\infty = \hat{x}_\infty(\Omega)$ heißen Resonanzkurven, genau so wie die Darstellungen $\hat{H}_\infty = \hat{H}_\infty(\eta)$. Letztere werden zusätzlich auch Vergrößerungsfunktion oder Übertragungsfunktion genannt. **Begriffe, die uns aus der Regelungstechnik bekannt sind.**



Wir sehen an dieser Resonanzkurve, dass ein mit $\vartheta = 5\%$ gedämpfter Schwinger aus Masse und Gummifeder im Resonanzfall eine 10-fache Amplitudenüberhöhung hat. Wir sehen aber auch, dass im überkritischen Bereich ab $\eta = 1,5$ das schwingungsmechanische Paradies beginnt. Viele rotierende Anlagen werden überkritisch ausgelegt z.B. Waschmaschinen, Laborzentrifugen, Gasturbinen, Dampfturbinen.

Bevor wir uns überlegen, wie wir ins Paradies kommen, ohne an dem Berg dahin zu scheitern, wenden wir uns kurz dem Phasenwinkel δ (delta) aus Gleichung (III.3.23) zu.



Betrachten wir zunächst die eckige Kurve für den dämpfungsfreien Fall $\vartheta = 0$. Im unterkritischen Bereich $\eta < 1$ ist $\delta = 0$. Das heißt Schwingung und anregende Kraft sind in Phase, erreichen also beispielsweise zeitgleich ihre Maxima. Im überkritischen Bereich $\eta > 1$ verhalten sie sich gegenphasig. Ein Kraftmaximum trifft auf Schwingungsminimum. Das ist nebenbei bemerkt der Grund, weshalb überkritischer Betrieb so lauffähig ist. Der Sprung von 0° auf 180° im dämpfungsfreien Fall ist nicht zu erklären, denn bei Resonanz $\eta = 1$ zerstört sich unser System selbst.

Sobald ein wenig Dämpfung vorhanden ist, runden sich die Ecken ab und wir stellen fest, dass im Resonanzfall sich dämpfungsunabhängig ein Phasenwinkel von 90° einstellt. In einem messtechnischen Verfahren namens Modalanalyse wird dieses Phänomen als Indikator für Resonanzen verwendet.

3.7. Resonanz im dämpfungsfreien Fall

Jetzt wollen wir herausbekommen, wie wir „hinter den Berg“ kommen, dorthin wo das „schwingungsmechanische Paradies“ liegen soll. Hierzu suchen wir uns den schwierigsten Fall aus und machen das, was wir auf gar keinen Fall tun sollen. Wir regen ein ungedämpftes System mit Eigen(kreis)frequenz an. Wir wissen, dieses System wird sich selbst zerstören, denn die Auslenkungsamplitude \hat{H}_∞ strebt gegen unendlich. Wir wollen diesem System bei seinem Untergang zuschauen und Erkenntnisse sammeln, wie wir den überkritischen Bereich erreichen.

Die DGL in einem solchen Fall lautet

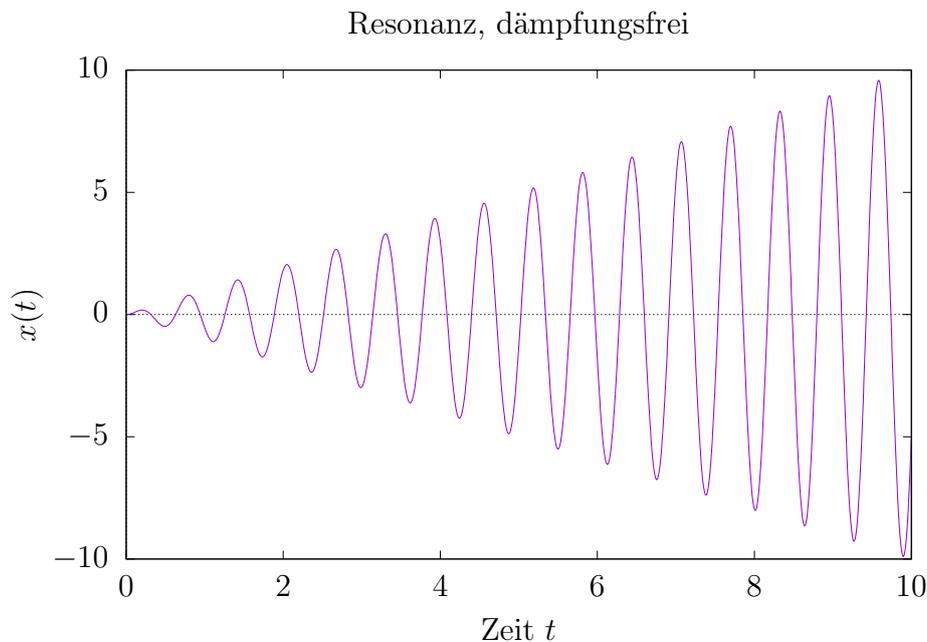
$$(III.3.27) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Es ist nicht möglich, einfach Ω durch ω_0 zu ersetzen und die schon bekannten Lösungen zu betrachten. Es muss eine ganz andere Lösung gefunden werden. Sie besteht wieder aus einer (bekannten) homogenen Lösung und einer neuen, ganz anderen partikulären Lösung. Letztere wird einfach verraten und nicht hergeleitet.

Die Lösung von (III.3.27) lautet

$$(III.3.28) \quad x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \alpha - \frac{\pi}{2})$$

Der zusätzliche Faktor t im letzten Lösungsteil ist das Entscheidende. Er zeigt uns, wie die Katastrophe abläuft.



Die lineare Zunahme der Schwingungsamplitude ist kennzeichnend für Resonanz. Nach hinreichend langer Zeit strebt die Amplitude gegen unendlich.

Jetzt wissen wir, wie wir hinter den Berg kommen. Schnell! Nicht lang schnacken, Gas geben. Waschmaschinen beschleunigen zügig und erreichen so unbeschadet den überkritischen Bereich. Auf dem Weg dahin schütteln sie sich kurz resonanzbedingt. Bevor Schaden entstehen kann (linearer Anstieg), ist sie auch schon wieder raus aus der Resonanz. Flugzeugtriebwerke werden zügig hochgefahren. Manchmal verspüren Passagiere

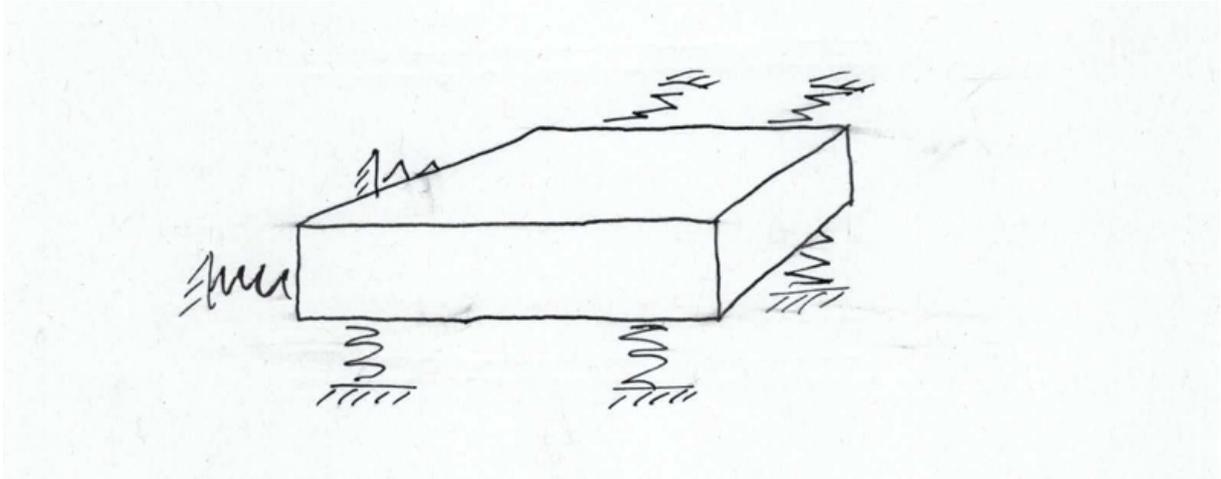
ein kurzes Schütteln, das wars. Ein Pilot könnte leicht sein Flugzeug zerstören. Anlassen, Drehzahl gefühlvoll steigern, wenn der Resonanzpunkt erreicht ist, weiter ganz langsam den Schub erhöhen. Bald darauf kommen die Triebwerksschaufeln einzeln geflogen, weil die Wellen so stark durchbiegen, dass die Schaufeln am Gehäuse anstoßen. Das Abfahren von überkritischen rotierenden Systemen ist anders als zunächst zu erwarten wäre, meist harmlos. Wenn sich ein System von hohen Drehfrequenzen dem kritischen Bereich nähert, steigen auch die Anregungsamplituden. Das System benötigt hierzu jedoch Energie. Bei Anfahren wird diese Energie vom Antrieb geliefert. Bei Abfahren gibt es keinen Antrieb mehr, er ist ausgeschaltet. Die Energie wird der kinetischen Energie der rotierenden Teile entnommen. Dabei werden die rotierenden Teile abgebremst. Erneut wird die Resonanz schnell durchfahren und das ohne besondere Vorkehrungen.

Es gibt Maschinen, bei denen ist es unvermeidbar, dass auch kritische Betriebspunkte angefahren werden. Autos zum Beispiel. Jedes Rad ist mit seiner Masse und der Tragfeder ein schwingungsfähiges System. Wegen der vorhandenen (rest-) Unwucht gibt es auch eine harmonische äußere Anregung. In vielen Autos finden wir bei einer Fahrgeschwindigkeit von etwa 90 km/h Resonanz. Die Raddrehzahl oder besser die Raddrehkreisfrequenz ist genau so groß, wie die Eigenkreisfrequenz des Feder-Masses-Systems Vorderrad. Im Normalfall merken wir nichts davon, weil der hydraulische Stoßdämpfer für ein LEHRsches Dämpfungsmaß von knapp 50% sorgt. Schauen Sie sich das Resonanzdiagramm an, alles bestens. Dämpfung hilft also, mit Resonanz zu leben. Wehe aber, wenn die Dämpfung versagt und das tut sie. Dämpfer sind Energiewandler, die mechanische in thermische Energie wandeln. Wenn das mit den Mitteln der Hydraulik passiert (Öl durch enge Bohrungen quetschen), dann funktioniert das nicht ewig. Schäden an der Kolbenstangendichtung führen zu Ölverlust, die Wirkung des Dämpfer nimmt ab, höhere Kurven im Resonanzdiagramm gelten jetzt. Man selbst merkt es am Zittern des Lenkrades bei 90 km/h. Wenn Sie ein Poltern im Fahrwerk hören, kann es sein, dass das Rad von der Fahrbahn abhebt. Jedes Symptom für sich kann auch andere Ursachen haben. Das Zittern kann ein Hinweis auf ein verlorenes Wuchtgewicht sein. Poltern kann auch von ausgeschlagenen Fahrwerksgelenken herrühren. Poltern plus Zittern plus schwammiges Fahrverhalten weisen auf verschlissene Dämpfer hin. ■

4. Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden

Systeme mit einem Freiheitsgrad sind nur grobe Annäherungen an reale Systeme. Grundlegende Einsichten werden hier gewonnen (z.B. Resonanzerscheinungen). Technische Probleme müssen häufig durch Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitsgraden beschrieben werden.

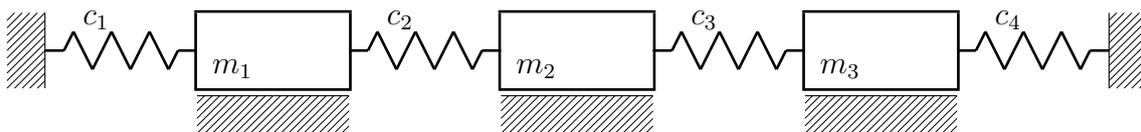
Beispiele



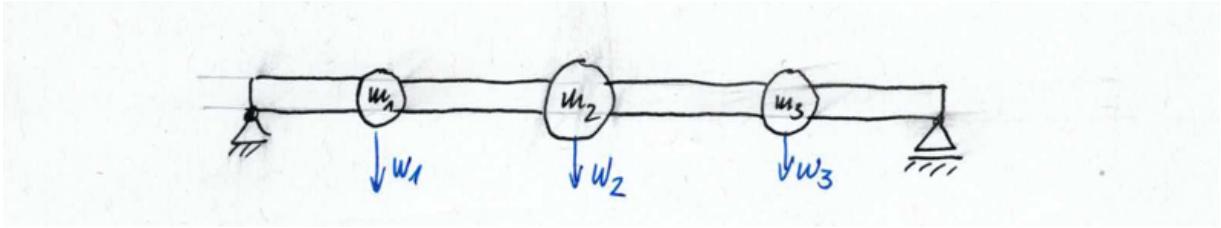
Elastisch gelagerter Körper mit sechs Freiheitsgraden.

Bei solchen Problemstellungen kommt den sog. Schwingerketten besondere Bedeutung zu. [Wieder einmal pressen wir die komplizierte Realität in einen mathematisch handhabbaren aber nur im Ausnahmefall technisch relevanten Sonderfall.](#)

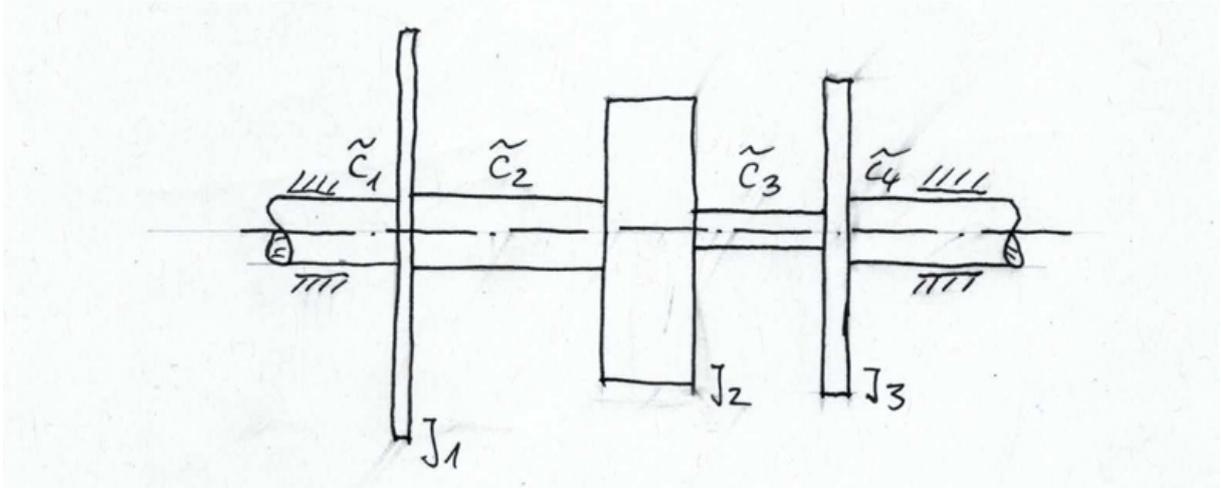
Feder-Masse-System (Geradausschwinger)



Gewichtsloser Balken mit Einzelmassen (Querschwinger) mit Durchbiegungen w



Mehrfach besetzte Welle



All diese Systeme werden im Wesentlichen nach den gleichen Prinzipien behandelt. Besonders anschaulich ist die Methodik bei den Geradeausschwingern erkennbar.

Die Praxisnähe der Geradeausschwinger ist nahe Null, während die mehrfach besetzte Welle ganz erhebliche technische Relevanz hat. Die Bewegungen der Massenträgheitsmomente J zueinander, d.h. das Verdrillen der Torsionsfedern \tilde{c} ist jedoch nicht gut darstellbar. Es gilt wieder einmal: Kennste einen, kennste alle. Wir betrachten den Geradeausschwinger.

4.1. Aufstellen der Bewegungsgleichung

Grundsätzlich wird nach der gleichen Methode wie in Kap. 3.2 auf Seite 123 vorgegangen. Daraus folgt ein System von linearen Bewegungsgleichungen, die ganz allgemein in folgende Form gebracht werden können.

$$(III.4.1) \quad \underline{\underline{M}} \ddot{\vec{x}} + \underline{\underline{K}} \dot{\vec{x}} + \underline{\underline{C}} \vec{x} = \vec{F}^*(t).$$

Mit

$$\vec{\ddot{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix}; \quad \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}$ ist die sog. Massenmatrix und enthält die Massen und/oder Massenträgheitsmomente der bewegten Teilkörper.

Es kann vorkommen, dass in einer Massenmatrix Massen m und Massenträgheitsmomente J trotz ihrer unterschiedlichen Einheiten gemischt vorkommen. Aus diesem Grunde bleibt es bei der Bezeichnung $\underline{\underline{M}}$, auch wenn nur Größen J darin enthalten sind.

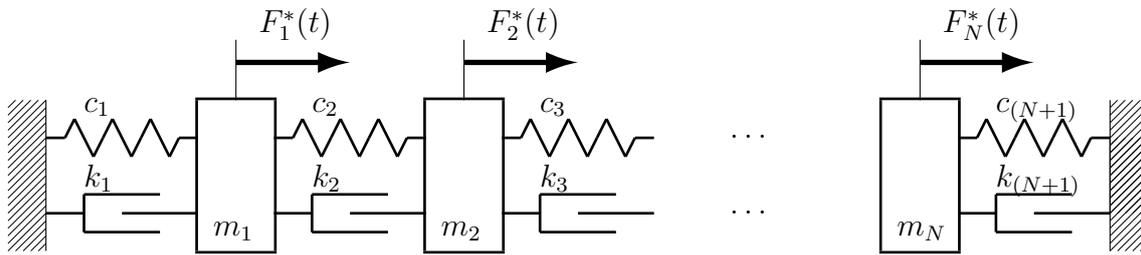
$\underline{\underline{K}}$ enthält alle Dämpfungsgrößen k oder \tilde{k} und heißt Dämpfungsmatrix

$\underline{\underline{C}}$ enthält alle Federkonstanten c oder \tilde{c} und heißt Steifigkeitsmatrix.

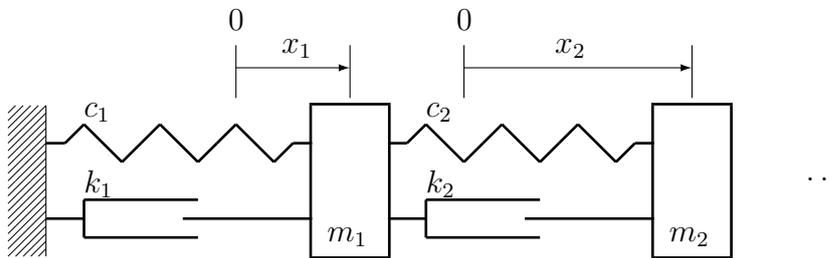
$\vec{F}^*(t)$ ist ein Vektor der äußeren Anregungskräfte oder -momente.

„Vektor der Kräfte“ ist missverständlich. Natürlich sind Kräfte Vektoren. Das ist hier nicht gemeint. Gemeint ist hier, dass an jeder Masse des Geradeauschwingers eine äußere Kraft $F^*(t)$ angreifen kann. Diese Kräfte werden in dem Vektor $\vec{F}^*(t)$ aufgelistet, so wie auch die kinematischen Größen x , \dot{x} , \ddot{x} aufgelistet werden und nicht etwa einen N -dimensionalen Raum bilden.

4.2. Bewegungsgleichung eines Geradeauschwingers mit N Freiheitsgraden

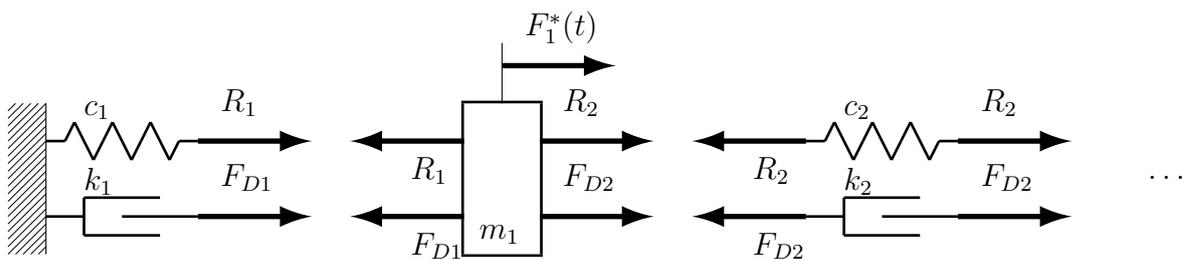


1. Darstellung der positiven Richtung und der Auslenkungen



Alle Federn werden gedehnt, nur die letzte Feder $c_{(N+1)}$ wird gestaucht. Die Nullpunkte der Koordinaten x_i ($i = 1, 2 \dots N$) sind die Gleichgewichtslagen des Ruhezustands.

2. Freischneiden, nur aus Platzgründen werden die Federn nicht mehr gedehnt dargestellt; sie sind nach wie vor alle, bis auf die letzte, gedehnt.



3. Schwerpunktsatz, angewandt auf alle Massen m_i ($i = 1, 2 \dots N$)

$$\begin{array}{rcccccc}
 & -R_1 & -F_{D1} & +R_2 & +F_{D2} & +F_1^*(t) & = m_1 \ddot{x}_1 \\
 & -R_2 & -F_{D2} & +R_3 & +F_{D3} & +F_2^*(t) & = m_2 \ddot{x}_2 \\
 & & & & & & \vdots \\
 \text{(III.4.2)} & -R_i & -F_{Di} & +R_{(i+1)} & +F_{D(i+1)} & +F_i^*(t) & = m_i \ddot{x}_i \\
 & & & & & & \vdots \\
 & -R_N & -F_{DN} & +R_{(N+1)} & +F_{D(N+1)} & +F_N^*(t) & = m_N \ddot{x}_N
 \end{array}$$

4. Feder- und Dämpfungsgesetze

$$\begin{array}{rcc}
 & R_1 & = c_1 x_1 \\
 & R_2 & = c_2 (x_2 - x_1) \\
 & & \vdots \\
 \text{(III.4.3)} & R_i & = c_i (x_i - x_{(i-1)}) \\
 & & \vdots \\
 & R_N & = c_N (x_N - x_{(N-1)}) \\
 & R_{(N+1)} & = -c_{(N+1)} x_N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc}
 & F_{D1} & = k_1 \dot{x}_1 \\
 & F_{D2} & = k_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\
 & & \vdots \\
 \text{(III.4.4)} & F_{Di} & = k_i (\dot{x}_i - \dot{x}_{(i-1)}) \\
 & & \vdots \\
 & F_{DN} & = k_N (\dot{x}_N - \dot{x}_{(N-1)}) \\
 & F_{D(N+1)} & = -k_{(N+1)} \dot{x}_N
 \end{array}$$

Das Federgesetz der $(N + 1)$ ten Feder kann leicht hergeleitet werden, indem die Auslenkung $x_{(N+1)}$ zu Null gesetzt wird, da an dieser Stelle statt einer „Masse $(N + 1)$ “ eine feste Einspannung ist, die keine Auslenkung zulässt. Eine andere Herangehensweise wäre die, dass die Feder $(N + 1)$ die einzige gestauchte Feder ist, an der jedoch eine ziehende Kraft $R_{(N+1)}$ wirkt, was mit einem Minuszeichen berücksichtigt wird. Beim Dämpfergesetz gilt ganz entsprechendes.

Wir sehen, die Sache wird umfangreich. Wir werden die Feder- und Dämpfergesetze in die Schwerpunktsätze einsetzen, geschickt umformen und uns überraschen lassen, wie die Matrizen $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{C}}$ aussehen.

4.3. Struktur der Matrizen

In diesem Fall des kettenförmigen Geradeausschwingers haben die Matrizen folgende Struktur:

$$(III.4.7) \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & m_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & m_i & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & m_N \end{pmatrix}$$

Die Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$ ist in diesem Fall eine Diagonalmatrix, in der nur Elemente der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind.

$$(III.4.8) \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & & \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 & \vdots \\ & & -k_4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -k_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -k_N & (k_N + k_{N+1}) \end{pmatrix}$$

$$(III.4.9) \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & & \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & -c_4 & \vdots \\ & & -c_4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -c_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_N & (c_N + c_{N+1}) \end{pmatrix}$$

Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ und Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{C}}$ sind in diesem Fall Tridiagonalmatrizen.

$$(III.4.10) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{pmatrix}; \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix}; \quad \vec{F}^*(t) = \begin{pmatrix} F_1^*(t) \\ F_2^*(t) \\ \vdots \\ F_N^*(t) \end{pmatrix}$$

Auslenkungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor sowie Vektor der äußeren Anregungskräfte.

Dieses Ergebnis ist je nach Sichtweise hoch interessant oder Katastrophe. Wir haben ein System von N Differentialgleichungen mit den N Unbekannten x_i . Die DGLn einzeln zu lösen ist nicht möglich, denn alle DGLn sind mit ihren benachbarten verschränkt. In der i -ten DGL taucht nicht nur x_i auf, sondern auch $x_{(i-1)}$ und $x_{(i+1)}$ auf. Gleiches gilt für \dot{x} . Herzlichen Glückwunsch. Nur \ddot{x} verhält sich manierlich. Das hilft uns auch nicht weiter, denn der Schaden (die Verschränkung) ist schon angerichtet.

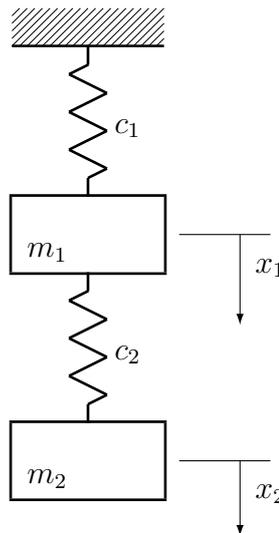
4.4. Freie Schwingung eines ungedämpften Kettenschwingers mit zwei Freiheitsgraden

Angesichts der Problematik gehen wir erneut von einem Minimalsystem aus. Wir haben keine äußere Anregung (freie Schwingung). Dadurch wird die rechte Seite von Gleichung (III.4.1) zum Nullvektor. Wir haben keine Dämpfung ($\underline{K} \vec{x}$ entfällt). Und im Übrigen gilt der Spruch: „Die Minimalanforderung an einen Wald sind zwei Bäume.“ Wir begnügen uns mit zwei Freiheitsgraden ($i = 1, 2$ und Schluss). Prinzipielle Erkenntnisse können so gewonnen werden. Schlussfolgerungen auf umfangreichere Systeme sind trotzdem möglich.

Die zugehörige Schwingungsdifferentialgleichung lautet in Matrizenform

$$(III.4.11) \quad \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Mit dem Spezialfall $c_3 = 0$ wird daraus ein Schwingungsmodell der Form



Übrigens: Ob ein Geradeauschwinger entspannt auf reibungsfreier Unterlage liegt oder wie hier von der Decke hängt, ist schwingungsdynamisch völlig unbedeutend. Die Vorspannung der Federn durch Eigengewicht hat keinerlei Auswirkung auf das Schwingungsverhalten.

Gleichung (III.4.11) ausmultipliziert ergibt

$$(III.4.12) \quad \begin{array}{rcl} m_1 \ddot{x}_1 & + (c_1 + c_2) x_1 & - c_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 & - c_2 x_1 & + c_2 x_2 = 0. \end{array}$$

Freie ungedämpfte Systeme mit **einem** Freiheitsgrad können nur harmonische Schwingungen ausführen. Schwingungen von Systemen mit **mehreren** Freiheitsgraden führen im Allgemeinen nichtperiodische Schwingungen aus. Es gibt jedoch bei geeigneter Einstellung der Anfangsbedingung spezielle harmonische Lösungen für solche Systeme mit mehreren Freiheitsgraden.

Dieser Sonderfall, dass alle Freiheitsgrade mit ein und der selben Frequenz harmonisch schwingen, ist in der Realität fast nie anzutreffen aber möglich. Dieser Sonderfall liefert uns einen Ansatz zur Lösung unseres Gleichungssystems (III.4.12).

Wir wählen einen harmonischen Ansatz

$$(III.4.13) \quad \begin{array}{l} x_1 = A_1 \sin(\omega t) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t) \end{array}$$

Dieser Ansatz wird in das Gleichungssystem (III.4.12) eingesetzt und ergibt sowohl die Eigenfrequenz(en) ω als auch die Amplitudenverhältnisse A_1/A_2 , die das Schwingungssystem zulässt.

Hierzu muss der Ansatz ((III.4.13) zweimal abgeleitet werden, was aber kein Problem sein sollte.

$$\begin{array}{l} \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t) \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t) \end{array}$$

(III.4.13) in (III.4.12)

$$\begin{array}{rcl} -m_1 \omega^2 A_1 & + (c_1 + c_2) A_1 & - c_2 A_2 = 0 \\ -m_2 \omega^2 A_2 & - c_2 A_1 & + c_2 A_2 = 0 \end{array}$$

Zeilenweise A_1 bzw. A_2 ausklammern

$$(III.4.14) \quad \begin{array}{rcccl} (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) & A_1 & -c_2 & A_2 & = 0 \\ -c_2 & A_1 & +(c_2 - m_2 \omega^2) & A_2 & = 0 \end{array}$$

Dieses System aus zwei algebraischen Gleichungen (dank Ansatz sind alle Größen x , \ddot{x} und auch die Sinusfunktionen verschwunden) kann auch mit den bekannten Matrizen angeschrieben werden.

$$(III.4.15) \quad (\underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \vec{a} = \vec{0}$$

Mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Schauen Sie nach in den Gleichungen (III.4.7) und (III.4.9). Es gelten jeweils nur die vier Eintragungen oben links in der Ecke. Zudem gilt $c_3 = 0$.

Ich will Sie ja nicht mit schlimmen TMII-Erinnerungen quälen, aber so etwas hatten wir schon einmal. Damals hatten wir das Thema Hauptspannungen und die Gleichung $(\underline{\underline{S}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \vec{n} = \vec{0}$. Auch dieses Gleichungssystem war nur für bestimmte Werte σ , unsere damaligen Hauptspannungen, lösbar. Wir wenden jetzt den gleichen Trick an, denn das Gleichungssystem ist nur für bestimmte ω^2 lösbar. ■

Die Gleichungen (III.4.14) oder in der Form (III.4.15) lassen sich d.u.n.d.⁷ nichttrivial⁸ lösen, wenn die Koeffizientendeterminante von (III.4.14) bzw. (III.4.15) Null wird.

$$\det(\underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$$

bzw. ausgeschrieben

$$(III.4.16) \quad \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ausgerechnet ergibt sich im vorliegenden Fall

⁷dann und nur dann

⁸Eine triviale Lösung wäre $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Dann würde unser Sytem reglos von der Decke hängen. Ja, das ist eine Lösung, sie hat nur nichts mit Schwingungen zu tun.

$$(III.4.17) \quad \omega^4 - \omega^2 \left[\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right] + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0$$

Die Gleichung (III.4.17) wird genannt Frequenzbedingung oder charakteristische Gleichung oder Eigenwertgleichung. (III.4.17) ist eine quadratische Gleichung für ω^2 und hat zwei sinnvolle reelle Eigenkreisfrequenzen ω_I und ω_{II} ⁹.

Für jeden der Werte ω_I und ω_{II} lassen sich aus (III.4.14) je ein Amplitudenverhältnis

$$\frac{A_{1I}}{A_{2I}} \quad \text{und} \quad \frac{A_{1II}}{A_{2II}}$$

gewinnen, welches die Amplitudenverhältnisse der beiden Massen m_1 und m_2 sind. Durch Einsetzen der Eigenkreisfrequenz ω_I in (III.4.14) folgt

$$(III.4.18) \quad \frac{A_{1I}}{A_{2I}} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 \omega_I^2}$$

und durch Einsetzen von ω_{II}

$$(III.4.19) \quad \frac{A_{1II}}{A_{2II}} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 \omega_{II}^2}$$

Diese beiden Ergebnisse sind nicht von überragender Bedeutung. Wichtiger ist das Nachfolgende.

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (III.4.11) lautet

$$(III.4.20) \quad \begin{aligned} x_1 &= A_{1I} \sin(\omega_I t + \varphi_1) + A_{1II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_2) \\ x_2 &= A_{2I} \sin(\omega_I t + \varphi_1) + A_{2II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (III.4.18) und (III.4.19) sowie den Anfangsbedingungen

$$x_1(t=0), \quad \dot{x}_1(t=0), \quad x_2(t=0), \quad \dot{x}_2(t=0)$$

sind alle Unbekannten

$$A_{1I}, \quad A_{1II}, \quad A_{2I}, \quad A_{2II}, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2$$

berechenbar.

⁹Das Polynom vierter Ordnung hat insgesamt vier reelle Lösungen. Die beiden genannten tauchen noch einmal mit negativem Vorzeichen auf. Negative Eigenkreisfrequenzen sind für uns nicht sinnvoll

4.5. Generalisierung und Zusammenfassung

Schwinger mit N Freiheitsgraden besitzen N Eigenfrequenzen. Die Eigen(kreis)frequenzen berechnen sich aus der Eigenwertgleichung

$$\det(\underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$$

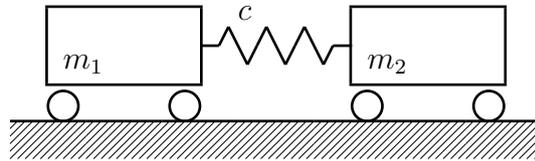
Im Allgemeinen schwingt jeder Freiheitsgrad mit einer Überlagerung aus allen Eigenfrequenzen. Diese Bewegung ist im Allgemeinen nichtharmonisch und nichtperiodisch. Der Spezialfall, dass alle Freiheitsgrade mit nur einer der Eigenfrequenzen schwingen ist zwar möglich (geeignete Anfangsbedingungen vorausgesetzt) aber für die Realität nicht relevant.

Wer jetzt auf die Idee käme, Masse 1 schwingt mit ω_I und Masse 2 mit ω_{II} der hat obigen Zusammenhang nicht verstanden. Jeder Freiheitsgrad (hier jede Masse) schwingt mit einer Überlagerung aus allen Eigenfrequenzen.

Sollte ein System mit N Freiheitsgraden von außen angeregt werden, so tritt (die gefürchtete) Resonanz ein, wenn eine der N Eigen(kreis)frequenzen von einer der äußeren Anregungen getroffen wird. Auch hier hilft entweder „schnell durch“ oder Dämpfung.

Übung zu Schwingern mit mehreren Freiheitsgraden

Zwei Wagen mit vernachlässigbaren Massenträgheitsmomenten der Räder stehen auf einer Schienenbahn und können reibungsfrei rollen. Sie sind elastisch aneinander gekoppelt. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen.



Gegeben: $c = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$.

Lösung

Bewegungsgleichung eines freien ungedämpften Geradeauschwingers mit mehreren Freiheitsgraden (hier 2).

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\vec{x}} + \underline{\underline{C}} \dot{\vec{x}} = \vec{0}$$

Bei einem vollständigen Geradeauschwinger befände sich links von m_1 eine Feder c_1 . Die fehlt hier. Links von m_2 befände sich c_2 . Diese Feder heißt hier c . Rechts von m_2 befände sich Feder c_3 , sie fehlt auch. Fehlende Federn haben die Federsteifigkeit Null. Hier gilt demzufolge

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c, \quad c_3 = 0.$$

Die Matrizen lauten hier

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}.$$

Ein harmonischer Ansatz liefert

$$(\underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \vec{a} = \vec{0}$$

d.u.n.d nichttrivial lösbar, wenn

$$\det(\underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0,$$

in diesem Fall

$$\begin{vmatrix} c - m_1 \omega^2 & -c \\ -c & c - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ein Ausmultiplizieren ergibt

$$(c - m_1 \omega^2) \cdot (c - m_2 \omega^2) - c^2 = 0$$

und weiter

$$c^2 - \omega^2 m_2 c - \omega^2 m_1 c + \omega^4 m_1 m_2 - c^2 = 0.$$

Kürzen und ordnen nach Potenzen von ω

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 c (m_1 + m_2) = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 c \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = 0$$

Hier ist es empfehlenswert, Zahlenwerte einzusetzen.

$$c \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = 4\,500 \frac{\text{N}}{\text{kg m}}$$

Substitution

$$\omega^2 = a$$

Quadratische Gleichung

$$a^2 - 4\,500 a = 0$$

Diese Quadratische Gleichung ist leicht zu lösen, da sie durch a teilbar ist.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 4\,500$$

Rücksubstitution

$$\omega_1 = \sqrt{0}, \quad \omega_2 = \sqrt{4\,500 \frac{\text{N}}{\text{kg m}}}$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 67,1 \sqrt{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{kg m}}}, \quad \omega_2 = 67,1 \frac{1}{\text{s}}$$

Gefragt war aber nach den Eigenfrequenzen. Es gilt $\omega = 2\pi f$.

$$f_1 = 0 \text{ Hz}, \quad f_2 = 10,68 \text{ Hz}.$$

Dieses System ist ein sog. frei-frei-System. Es ist an beiden Enden frei, das heißt, nicht an die starre Umgebung gekoppelt. Typisch ist für frei-frei-Systeme, dass eine Eigenfrequenz Null wird. Was heißt das? Unser Gespann aus zwei Wagen kann entlang der Schienenbahn fahren. Das ist keine Schwingung oder, wenn es unbedingt sein muss, eine Schwingung mit der Eigenfrequenz $f_1 = 0 \text{ Hz}$ (der kommt nie wieder). Dem Überlagert ist eine Schwingung mit $f_2 = 10,68 \text{ Hz}$. Mit dieser Frequenz schwingen die beiden Wagen zueinander, während sie sich auf der Schienenbahn fortbewegen. Hätten wir Anfangsbedingungen, könnten wir sogar sagen, wie schnell der Zug fährt und mit welchen Amplituden die Schwingung stattfindet.

Variante: Denken Sie an ein Notstromaggregat, also einen Maschinensatz, bestehend aus Kraft- und Arbeitsmaschine. Diese beiden Massenträgheitsmomente sind gekoppelt mit einer Welle der Drehfedersteifigkeit \tilde{c} . Der Dieselmotor (Kraftmaschine) habe das Massenträgheitsmoment J_1 und der Generator (Arbeitsmaschine) habe J_2 . Ein solches System ist überaus praxisnah. Sie können ausrechnen, mit welcher Frequenz die Welle wechselnd auf Torsion belastet wird. Die „Nichtschwingung“ bzw. Schwingung mit Frequenz Null ist hier das fortwährende Rotieren des Maschinensatzes.

So etwas kann in der Klausur drankommen. Es kann aber auch ein gefesselt System mit zwei Freiheitsgraden drankommen. c_1 und c_2 oder \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 sind dann von Null verschieden.

Zur Erinnerung: Maschinendynamik ist eine „Kofferklausur“ (Gegenstück zur Badehosenklausur TM und ET). Sie dürfen mitbringen, was Sie wollen, außer Menschen und vernetzbare elektronische Geräte. ■

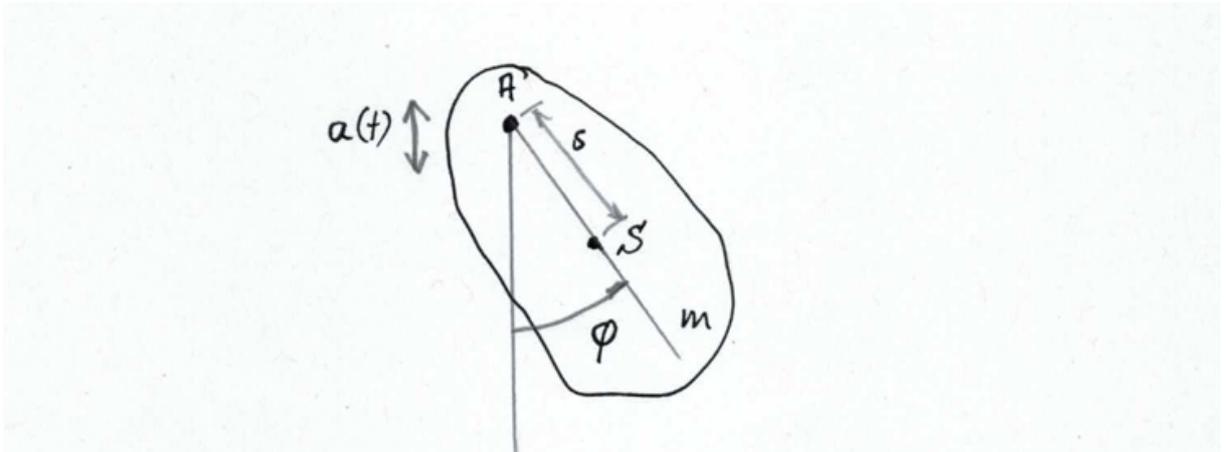
5. Parametererregte Schwingungen

Um dieses mathematisch durchaus anspruchsvolle Thema zumindest anzureißen, betrachten wir erneut Schwinger mit lediglich einem Freiheitsgrad.

Bisher gilt: Schwingungsfähige Systeme haben konstante Parameter z.B. Masse, Dämpfungskonstante und Federsteifigkeit m , k , c . Erregungen entstehen durch äußere Kräfte mit harmonischem, periodischem oder beliebigem Verlauf. Merkmal für diese Art von Schwingungen ist: Die Differentialgleichungen sind lösbar. Auch wenn wir nur Anregungen mit harmonischem Verlauf kennengelernt haben.

Schwingungen bei Parametererregung werden durch zeitlich veränderliche Parameter erzeugt. Merkmal: Parametererregung wirkt sich nicht aus, wenn der Schwinger in Gleichgewichtslage ist. Jedoch können geringste Störungen (d.h. Anfangsbedingungen) für ein Aufschwingen ausreichen.

Wir werden feststellen, dass die Differentialgleichungen zu diesen Systemen nicht geschlossen lösbar sind. Nur numerische Lösungen sind möglich, ansonsten werden Lösungsstrukturen vorgestellt, aus denen die Stabilität der Schwingung abgelesen werden kann. Ich habe fünf Jahre meines Lebens damit verbracht, mit diesen Differentialgleichungen zu ringen. Nicht ganz ohne Erfolg, denn sie führten zu zwei zusätzlichen Buchstaben und einem Punkt vor meinem Nachnamen. Eines sei schon vorab verraten: Parametererregung ist brandgefährlich und kann zu katastrophalen Unfällen führen. Ein paar davon gehen auf meine Kappe und waren anfangs ein Versehen, später dann mutwillig. Menschen kamen dabei nicht zu Schaden.

Beispiel 1 Körperpendel mit periodisch bewegtem Aufhängepunkt.

Betrachten wir zunächst ein Körperpendel mit ruhendem Aufhängepunkt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{m s}{J} g \sin \varphi = 0$$

Diese DGL ist schon ungewohnt, da der Sinus zu einer nichtlinearen DGL führt. Üblicherweise begrenzen wir den Winkelausschlag und wenden den häufigen Trick bei kleinen Winkeln an, der da lautet $\sin \varphi \approx \varphi$. Schon haben wir eine uns vertraute DGL.

Nun bewegen wir den Aufhängepunkt auf und ab, was zu einer Beschleunigung $a(t)$ des Aufhängepunkts führt.

$$\ddot{\varphi} + \frac{m s}{J} [g + a(t)] \sin \varphi = 0$$

Die konstante Erdbeschleunigung g wird mit einer zeitveränderlichen Beschleunigung überlagert. Ein Parameter, in übertragenem Sinne die Erdbeschleunigung, ist nun zeitveränderlich.

Beispiel 2 Getriebe mit ungleichmäßigen Übersetzungsverhältnissen. In Textil-, Verarbeitungs- und Umformmaschinen werden solche Getriebe verwendet, um bestimmte Bewegungen zu erzielen.

- Exzentergetriebe
- Konturfolgesteuerungen
- Umschlingungsgetriebe mit elliptischen Rädern

- Gelenkwellenantriebe

Wenn das Gelenk ein klassisches Kardangelenk ist und die beiden verbundenen Wellen in einem Winkel zueinander stehen, laufen diese Wellen nicht synchron. Die Abtriebswelle ist wechselweise schneller und langsamer als die Antriebswelle. Um diesen Effekt bei Vorderradantrieben im Automobilbau zu vermeiden, werden dort sog. Gleichlaufgelenke verbaut, die diesen Effekt nicht haben. Daher der Name.

Das ungleichmäßig übersetzende Getriebe, als Torsionsfeder betrachtet, hat eine zeitveränderliche Steifigkeit \tilde{c} .

$$J \ddot{\varphi} + \tilde{c}(t) \varphi = 0$$

Weitere Beispiele Kinderschaukel/Schiffschaukel: Durch Schwerpunktverlagerung wird der Parameter Pendellänge zeitveränderlich.

Stäbe oder Saiten mit veränderlichen Zug- oder Druckkräften führen Querschwingungen aus. Dies betrifft Pleuelstangen, Stützen von Maschinenfundamenten oder Antriebswellen von Laborzentrifugen.

Laborzentrifugen waren mein Promotionsthema. Sie bestehen aus einem Aluminiumrotor mit Aufnahmebohrungen für Reagenzgläser und einem Elektromotor, der elastisch im Zentrifugegehäuse gelagert ist und so überkritischen Betrieb ermöglicht. Ein Hersteller wollte besser sein als seine Konkurrenz und beauftragte das Institut, an dem ich tätig war, seine Zentrifuge schneller zu machen. Nichts einfacher als das. Mit Hilfe einer unabhängigen Stromversorgung baute ich eine 460 V-Betriebsspannung auf und machte Testfahrten. Kurz oberhalb der branchenüblichen Höchstdrehzahl von 16 000 1/min brach der Wellenstummel, der den Motor mit dem Rotor verband. Der kompakte Rotor lief wie ein Brummkreisel aus und hat außer ein wenig Metallabrieb keinen Schaden angerichtet. Von einem anderen Schaden haben wir lediglich gehört. In einer Pathologie in Dänemark ist eine Zentrifuge mit sog. Schwenkbechern zur Aufnahme von Blutkonserven explodiert. Dieser Rotor soll sich zerlegt haben. Trümmer verließen den Zentrifugenkessel und schlugen wie Schrapnell ein. Eine riesen Sauerei (vier Liter Blut). Lebende Menschen kamen zum Glück nicht zu Schaden. Unser Kunde hatte aber daraufhin ein Importverbot für Dänemark.

Die Ursachenforschung erbrachte, dass durch Unwuchten am Rotor zeitveränderliche Axialkräfte in dem Wellenstummel auftreten, die die Welle zu Querschwingungen anregt, in einem Maß, dass sie brechen kann. Der zeitlich veränderliche Parameter ist hier die axiale Federsteifigkeit des Wellenstummels. Wir hatten inzwischen einen Kellerraum mit einer Tapete aus 10 cm x 10 cm Kantholz versehen, in dem wir reihenweise Zentrifugen ferngesteuert zerlegt haben.

5.1. Mathematische Betrachtung

Es gelte die Bewegungsgleichung

$$(III.5.1) \quad \ddot{y} + P(t)y = 0 \quad \text{HILLsche DGL}$$

$$(III.5.2) \quad \ddot{y} + [P_0 + \Delta P \cos(\Omega t)]y = 0 \quad \text{MATHIEUSche DGL}$$

y stehe hier stellvertretend wahlweise für Wege x oder Winkel φ .

Beide DGLn sind homogen (rechte Seite Null), von zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Eine geschlossene Lösung ist für beide Typen nicht angebar. Jedoch kann die Lösungsstruktur zu diesen DGLn ermittelt werden. Das heißt, Teile der Lösung sind berechenbar, andere Teile der Lösung entziehen sich einer analytischen Berechnung. Die Lösungsstruktur lautet

$$(III.5.3) \quad y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} y_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} y_2(t)$$

mit

C_1, C_2 : Konstanten, aus Anfangsbedingungen bestimmbar.

μ_1, μ_2 : Charakteristische Exponenten, i.A. komplexe Zahlen, also

$$\mu_1 = a_1 + j b_1, \quad \mu_2 = a_2 + j b_2.$$

Sie sind nur von $P(t)$ bzw P_0 und ΔP abhängig, nicht hingegen von den Anfangsbedingungen.

$y_1(t)$: Zeitperiodische, beschränkte Funktionen, i.A. nicht analytisch berechenbar, $y_2(t)$ ebenfalls.

Es ist allenfalls ein Schönheitsfehler, dass $y_1(t), y_2(t)$ nicht analytisch berechenbar sind. Diese Lösungsbestandteile sind beschränkt (haben eine obere Grenze) und sind daher nicht für die schon angedeuteten Zerstörungen verantwortlich.

Besonders interessant sind μ_1, μ_2 .

$$y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} y_1(t) + \dots$$

$$y(t) = C_1 e^{(a_1 + j b_1)t} y_1(t) + \dots$$

$$y(t) = C_1 e^{a_1 t} e^{j b_1 t} y_1(t) + \dots$$

$$y(t) = C_1 e^{a_1 t} [\cos(b_1 t) + j \sin(b_1 t)] y_1(t) + \dots$$

Die Realteile a_1, a_2 der charakteristischen Exponenten bestimmen das Stabilitätsverhalten des Schwingers. Drei Fälle sind zu unterscheiden:

$a_1, a_2 < 0$: Dämpfungähnliche Abnahme der Schwingungsamplitude.

$a_1, a_2 = 0$: Periodische Schwingung, also konstante Amplitude.

$a_1, a_2 > 0$: Exponentiell anwachsende Amplitude, Instabilität.

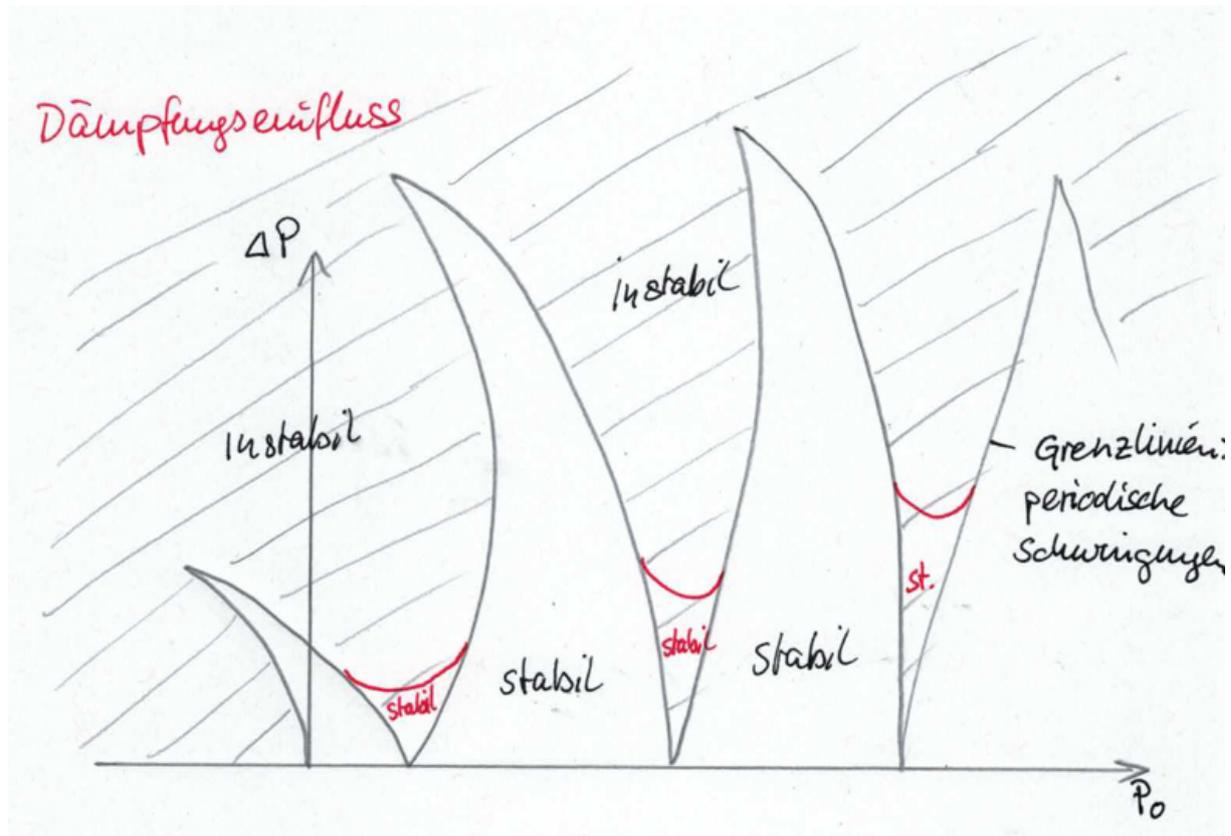
Das exponentielle Anwachsen der Schwingungsamplitude ist ein Merkmal für instabile parametererregte Schwingungen. Instabile Schwingungssysteme mit konstanten Parametern aber äußerer Anregung (Resonanz) zeigen hingegen linearen Amplitudenanstieg.

Einmal konnte ich das Sterben einer Laborzentrifuge messtechnisch beobachten und fand einen exponentiellen Amplitudenanstieg. Das war der Durchbruch. Bis dahin hatten wir Resonanz vermutet und gesucht, woher die Eigenfrequenz kommt, die mit der erhöhten Drehfrequenz übereinstimmt. Nun wussten wir, dass wir auf dem Holzweg waren. Nicht Resonanz sondern Parametererregung war das Problem.

Wir hätten es schon vorher ahnen können. Bei Resonanzproblemen bahnt sich durch den linearen Amplitudenanstieg das Unheil merkbar an. Manchmal gibt es noch die Chance per Notaus das System zu retten. Parametererregte Katastrophen kommen hingegen wie ein Blitz aus heiterem Himmel. Bei der Ursachenforschung im Nachgang eines Schadens sind Aussagen von Betreiber Mannschaften manchmal ein Indiz. „Ich dachte noch, da stimmt etwas nicht ...“ spricht für Resonanz. „Eben noch beste Maschine und plötzlich flogen die Trümmer“ spricht für Parametererregung.

5.2. Stabilitätsbetrachtung

Systematische Stabilitätsbetrachtungen können in sog. STRUTTSchen Karten dargestellt werden.



In diesem Zusammenhang wird P_0 gerne 'Pumpfrequenz' und ΔP 'Pumpamplitude' genannt. Es gibt wiederkehrende Bereiche, in denen geringste Pumpamplituden ausreichen um das System zu destabilisieren. Der 'erste Zipfel der Karnevalsmütze' ragt in den Bereich negativer Pumpfrequenz. In diesem seltenen Fall kann Parametererregung stabilisierend wirken. Einen Besenstiel auf einem Finger stehend zu balancieren könnte ein solches Beispiel sein.

Dargestellt ist auch der Dämpfungseinfluss. Er verbessert ein wenig das Stabilitätsverhalten in den besonders gefährdeten Zonen.

Gegen Parametererregung hilft

1. Beseitigung des Wirkmechanismus Parametererregung
2. Verstimmen
3. Dämpfen

Dämpfung ist das Universalmittel der Maschinendynamik um Instabilitäten zu verhindern. Vorsicht dabei, Dämpfung verschleißt und wird mit der Zeit geringer.

Hier endet diese Vorlesungsreihe. So endet nun auch unsere viersemestrige Vorlesungsbekannntschaft. ■