Technische Mechanik I

Joachim Venghaus[*]

8. September 2023

Inhaltsverzeichnis

[*]Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund

Liebe Studierende,

ganz herzlich begrüße ich Sie zum Kurs Technische Mechanik I für die Studierenden der Studiengänge Maschinenbau und Motorsport Engineering.

Pandemievorwort 2020: Es tut mir sehr leid, dass wir uns nicht regelmäßig sehen. Die Präsenz der Studierenden ist es, was den Ansporn bringt, die eigenen Vorlesungsveranstaltungen zumindest erträglich zu gestalten, vielleicht sogar interessant. Vorlesung und Übung bestehen einerseits aus den dürren Fakten, die ich unter normalen Umständen an die Tafel schreiben würde und andererseits aus Erklärungen, Beispielen, Anekdoten und dem dummen Zeug, das mir spontan einfällt. Nun erfolgt das ganze ohne Präsenz (Ende Pandemievorwort).

Als grobe Orientierung gilt: Schwarzer Text entspricht dem Tafelbild in Vorlesung oder Übung. Blauer Text dient Organisatorischem (wie jetzt) und der Auflockerung im Spektrum Erklärungen bis dummes Zeug.

Es gibt nichts zu beschönigen, es gibt eine Semesterabschlussklausur. Sie werden drei Rechenaufgaben lösen müssen. Im Verlauf der Übungsaufgaben werde ich Sie darauf hinweisen, was klausurrelevant ist. Als Hilfsmittel bei der Klausur sind erlaubt: Taschenrechner und ein Blatt A4, beidseitig beliebig beschriftet. Verboten sind: diese Vorlesungs- und Übungsskripte, Lehrbücher, Handys u.Ä. Das Erstellen des „legalen Pfuschzettels“ ist eine sehr gute Klausurvorbereitung. Beim Nachrechnen der Übungsaufgaben merken Sie sehr schnell, was auf den Zettel gehört.

Als nächstes muss ich eine Warnung aussprechen. Sie richtet sich an diejenigen unter Ihnen, die im Fachgymnasium oder an einer Berufschule schon etwas von Mechanik gehört haben. Sie werden folgende Gedanken haben:

- Das kenne ich alles schon.
- Der macht das aber umständlich, das geht doch viel einfacher.
- Kräfte A_x oder B_y finde ich sehr ungewohnt, bei mir heißen Kräfte immer F.

Ihnen kann folgendes passieren: Sie lehnen sich entspannt zurück, lösen die einfachen Anfangsprobleme auf Ihre Art erfolgreich und schalten ab. Alsbald werden die Probleme schwieriger und dann benötigen Sie die aus Ihrer Sicht umständliche Methodik, die ich Ihnen beibringen will. Dann ist der Zug abgefahren. Bitte-bitte lassen Sie sich von Anfang an auf die hier vorgestellte Vorgehensweise ein und folgen ihr.

Bevor wir anfangen, will ich noch eine Merkwürdigkeit verraten. Bei den Klausuren gibt es fast so viele 1,0-Ergebnisse wie nicht-bestanden-Ergebnisse. Für mich heißt das: Ein Drittel langweile ich, ein Drittel erreiche ich nicht. Um das Drittel dazwischen bemühe ich mich. Finden Sie das nicht auch ziemlich bitter? :-)

Jetzt fangen wir einfach an.

Mathematische Grundlagen

Einheiten Banale Feststellung:

Nur Größen gleicher physikalischer Einheit dürfen addiert und subtrahiert werden.

$$3\ \mathrm{m} + 2\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}; \qquad 7\ \mathrm{m} + 5\ \mathrm{N} = \text{grober Unfug!}$$

Einheitenfehler sind die Hauptdurchfallursache in den Klausuren. Häufig entstehen die Fehler beim Kürzen.

$$\text{Finde den Fehler} \qquad \frac{\ell}{2\,\ell} = \frac{1}{\ell}, \qquad \frac{\ell}{2\,\ell} = \frac{1}{2}.$$

Wer mit $\frac{1}{\ell}$ weiter rechnet, erzeugt nur Kraut und Rüben.

Im Gegensatz dazu: Größen gleicher und unterschiedlicher Einheiten dürfen multipliziert und dividiert werden.

$$3\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{m}^2, \qquad 7\ \mathrm{m} \cdot 5\ \mathrm{N} = 35\ \mathrm{Nm}.$$

Wichtig hierbei ist, dass auch die Einheiten miteinander multipliziert werden. Das Ergebnis ist mit keinem seiner Faktoren vergleichbar.

Es gibt eine Konvention bei Setzen von mathematischen Texten: Variablen, die nur durch Leerzeichen voneinander getrennt sind, werden miteinander multipliziert.

$$2\ a\ b = 2 \cdot a \cdot b$$

Bei Gleichungen mit Zahlenwerten sind Malpunkte zu setzen.

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Spätestens in der Bachelorarbeit werden Sie selbst Formeln mit dem Computer schreiben. Was Sie dann auf keinen Fall benutzen sollten sind Schreibweisen wie

$$2\ \mathrm{x}\ 3 = 6 \qquad \text{oder} \qquad 3\ *\ 4 = 12$$

Sie brauchen den Punkt auf halber Höhe. Selbst bei Windows soll es einen geben. Hier in LaTeX wird er mit `\cdot` erzeugt.

SI-Einheiten Die Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems SI (frz. *Système international d'unités*) lauten

m Meter, Länge ℓ

s Sekunde, Zeit t

kg Kilogramm, Masse m

A Ampere, Elektrischer Strom I

K Kelvin, Temperatur T

mol Mol, Stoffmenge n

cd Candela, Lichtstärke ℓ_v

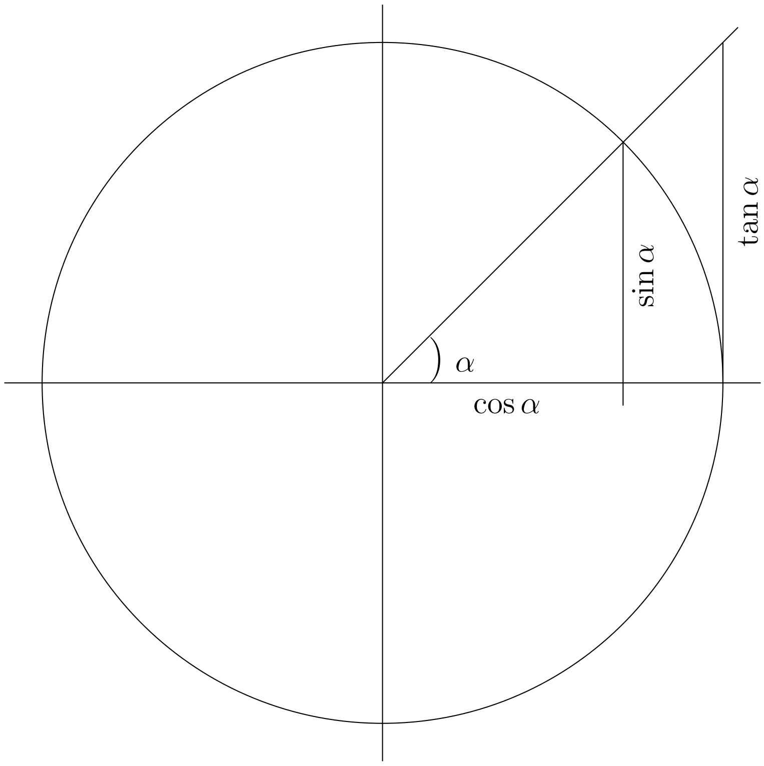
Daraus werden alle andere Einheiten abgeleitet. Beispiele:

$$\text{Kraft: N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}, \quad \text{Arbeit: J} = \text{Nm} = \text{Ws} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad \text{El. Spannung: V} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3},$$

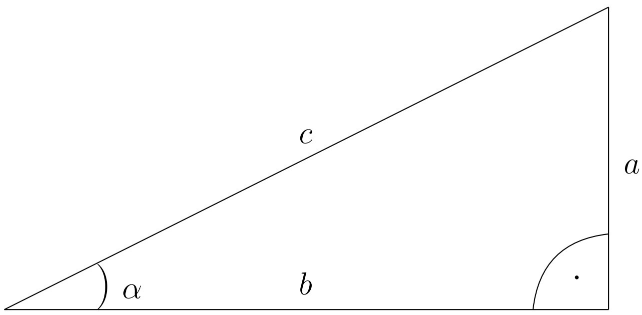
Beantworten Sie nach jeder Rechnung zwei Fragen

1. Habe ich nur Größen gleicher Einheit addiert?
2. Stimmt die errechnete Einheit mit der erwarteten Einheit überein.

Trigonometrische Funktionen: Anschauliche Darstellung im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1)



Gebräuchlich ist auch die Darstellung am rechtwinkligen Dreieck.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Hier drei Formeln auswendig zu lernen ist ziemlich blöd. Wenn wir künftig schräg stehende Kräfte (hier c) in achsenparallele Komponenten zerlegen, gehen wir wie folgt vor: Wir suchen zuerst die Komponente (Dreieckseite), die am Winkel dran liegt (hier b). Diese Komponente geht mit dem Kosinus. Die andere geht mit dem Sinus. Merkspruch: Wo sitzt der Co-Trainer? Dicht beim Trainer.

Winkelangaben sind in Grad oder Bogenmaß möglich. Bogenmaß ist mathematisch korrekt, für Gradzahlen haben wir ein Gefühl. Die Umrechnung ist einfach

$$\breve{\alpha} = \frac{2\pi}{360^o}\,\alpha^o = \frac{\pi}{180^o}\,\alpha^o$$

Sie kontrollieren bei Gelegenheit Ihren Taschenrechner. Er muss auf 'D' wie degree stehen. Die Alternativen sind 'R' wie radiant (Bogenmaß) oder 'G' wie gon. Letzteres ist sehr gemein. Der Buchstabe G ist verlockend (Verwechselung mit Grad). Jedoch misst ein rechter Winkel 100 gon. Diesen Fehler merkt man lange nicht, er versaut aber jedes Rechenergebnis. Artilleristen und Landvermesser rechnen in gon. Finger weg.

Wichtige trigonometrische Formeln

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \sin\beta + \sin\alpha\ \cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$

Die erste Gleichung ist wichtig. Die anderen beiden Gleichungen werden Additionstheoreme genannt, kein Mensch muss sie auswendig können.

Trigonometrische Umkehrfunktionen: Gegeben sei

$$y = \sin \alpha$$

Gesucht sei der Winkel α bei gegebenem Wert y. Es gilt

$$\alpha = \arcsin y$$

analog gibt es auch

$$\alpha = \arccos y$$

$$\alpha = \arctan y$$

Die Hersteller von Taschenrechnern machen es inzwischen alle falsch. Sie bezeichnen die Arcusfunktionen mit '$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$'. Das ist nicht die Umkehrfunktion, das ist der Kehrwert. Hewlett Packard (HP) hat sich lange gegen diesen Unfug gestemmt. Sie verwendeten asin, acos, atan. Inzwischen sind auch die eingeknickt und machen diesen Unfug mit. Arcus ist lateinisch und heißt Bogen. Die Arcusfunktionen liefern also einen Winkel im Bogenmaß. Es sei denn, Sie haben den Taschenrechner auf 'D' gestellt, dann liefern sie einen Winkel in Grad.

Exponential und Logarithmusfunktion

Bis wir die brauchen, waren sie in Mathematik dran

Technische Mechanik für Ingenieur*innen

Teil I Statik

1 Kräfte

1.1 Kraftbegriff

Jede Einwirkung auf einen Körper, die Bewegungs- und/oder Formänderung bewirkt, wird als „Kraft“ bezeichnet.

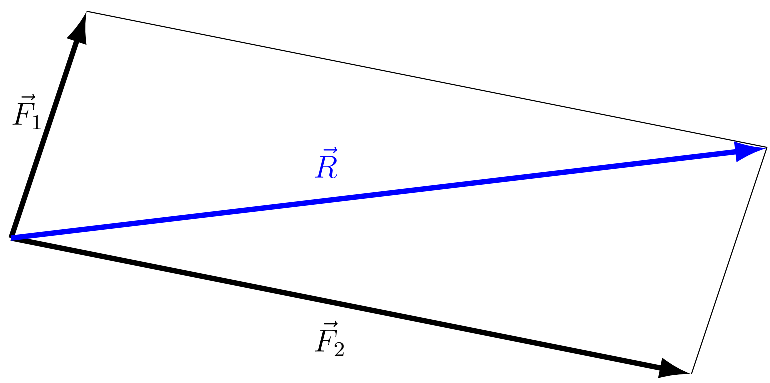
Maßeinheiten gemäß SI.

$$\text{Kraft } F: \quad 1\,\mathrm{N}{=}1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}.$$

Eine Kraft ist charakterisiert durch Betrag in N, Richtung und Kraftangriffspunkt. Daher stellen wir folgendes Axiom[1] auf:

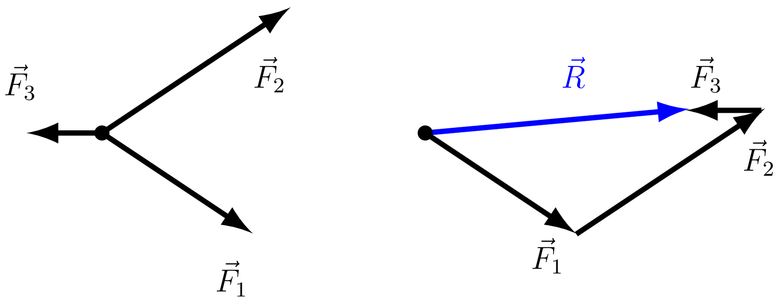
Kräfte sind Vektoren

Eigenschaften von Kräften sind mit Mitteln der Vektorrechnung beschreibbar. Z.B. Addition zweier Kräfte als Bildung einer Resultierenden.



[1]Axiom: Arbeitshypothese, die nicht bewiesen werden kann. Die Hypothese ist gültig, so lange sie nicht widerlegt wird. Diese hier wurde bisher nicht widerlegt.

Es können beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt zu einer Resultierenden zusammengefasst werden. So etwas wird ein „zentrales Kräftesystem“[2] genannt. Vorgehensweise mittels „Krafteckkonstruktion“.



Allgemein gilt bei N Kräften

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{R} \tag{I.1}$$

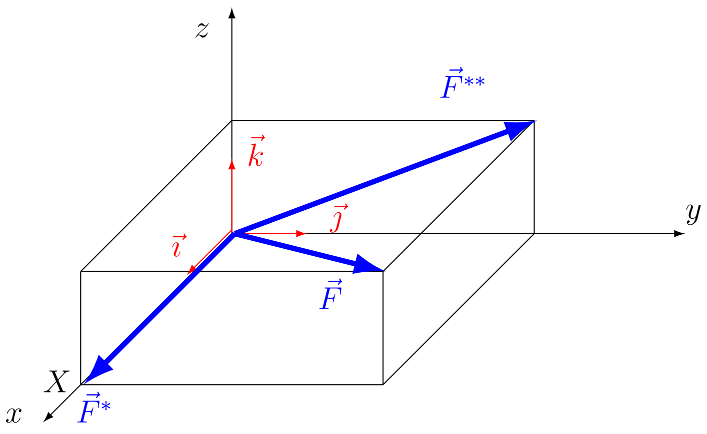
Solange alle Kräfte in einer Ebene liegen, sind zeichnerische Lösungen gut machbar. Spätestens bei räumlichen Problemen wird eine rechnerische Lösung mittels Gleichung (I.1) nötig.

Vorgehensweise:

- Vorgabe eines Koordinatensystems mit den Einheitsvektoren $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$. Geläufiger ist uns ein Koordinatensystem mit den Achsen x, y, z.
  Beides ist möglich und zulässig. Wir benötigen später die Kenntnis über Einheitsvektoren, die immer die Länge 1 haben. Nicht 1 cm, sondern 1 ohne Einheit.
- Zerlegen der Kraft $\vec{F}_i$ in ihre Komponenten in $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$-Richtung (x, y, z-Richtung).
- Komponentenweise Addition aller Kräfte $\vec{F}_i$.

Stellen Sie sich die blaue Kraft $\vec{F}$ vor, als sei sie die Raumdiagonale eines flachen Kartons.

[2]Zentrales Kräftesystem: Mehrere Kräfte mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt.

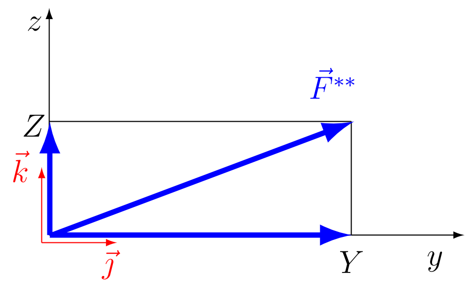


Wir gehen schrittweise vor.

1. $\vec{F}$ zerlegen in $\vec{F}^*$ (x-Komponente) und $\vec{F}^{**}$ (in y-z-Ebene), also

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \vec{F}^{**}, \qquad \vec{F}^* = X\,\vec{\imath}$$

2. $\vec{F}^{**}$ weiter zerlegen in y- und z-Komponente.



somit

$$\vec{F} = X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath} + Z\,\vec{k}. \tag{I.2}$$

Hierbei ist X die x-Komponente der Kraft $\vec{F}$, multipliziert mit $\vec{\imath}$, der x-Richtung.

Wir müssen künftig darauf achten, dass links und rechts vom Gleichheitszeichen jeweils Vektoren stehen (ist hier der Fall).

Komponentenweise Addition aller Kräfte

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} X_i\,\vec{\imath} + \sum_{i=1}^{N} Y_i\,\vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{N} Z_i\,\vec{k}. \tag{I.3}$$

Es ist $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i = R_x$ die x-Komponente der Resultierenden.

Hier sehen wir links und rechts vom Gleichheitszeichen skalare Größen. Das ist natürlich auch zulässig. Links Vektor, rechts Skalar, das ist verboten.

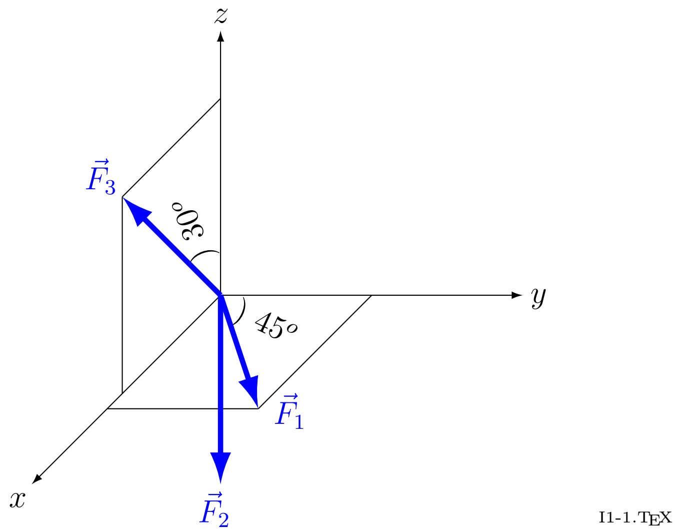
Für R_y und R_z gilt entsprechendes. Für den Betrag von $\vec{R}$ gilt

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

■

1.1.1 Übungsaufgabe

Gegeben: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ mit $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = F$.



Gesucht: Die Resultierende $\vec{R}$.

Vektoren, wie z.B. den Vektor der Resultierenden, schreiben wir zur Vereinfachung als Spaltenvektor

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern uns an die mathematisch korrekte Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für runde Winkel. Natürlich bevorzugen Sie die dezimalen Ergebnisse Ihres Taschenrechners. Zum Schluss gibt es zur Vermeidung des Taschenrechners noch eine gute Eselsbrücke.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Nun zerlegen wir die drei Kräfte in ihre Komponenten.
Wir beginnen mit $\vec{F}_1$ und sehen, dass der 45°-Winkel zwischen Kraft und y-Achse liegt. Die y-Komponente von $\vec{F}_1$ wird daher vom Kosinus gebildet. Die x-Komponente wird

demzufolge vom Sinus gebildet. Eine z-Komponente gibt es nicht, da $\vec{F}_1$ in der x, y-Ebene liegt.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \sin 45^o \\ F \cos 45^o \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{F}_2$ zeigt direkt nach unten, das ist die negative z-Achse.

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

Bei $\vec{F}_3$ liegt der Winkel 30° zwischen Kraft und z-Achse, also bildet der Kosinus die z-Komponente

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \sin 30^o \\ 0 \\ F \cos 30^o \end{pmatrix}$$

Nun wird komponentenweise addiert

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3$$

$$R_x = F \sin 45^o + 0 + F \sin 30^o$$

$$R_x = F \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$R_y = F \cos 45^o + 0 + 0$$

$$R_y = F \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_z = 0 - F + F \cos 30^o$$

$$R_z = F \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)$$

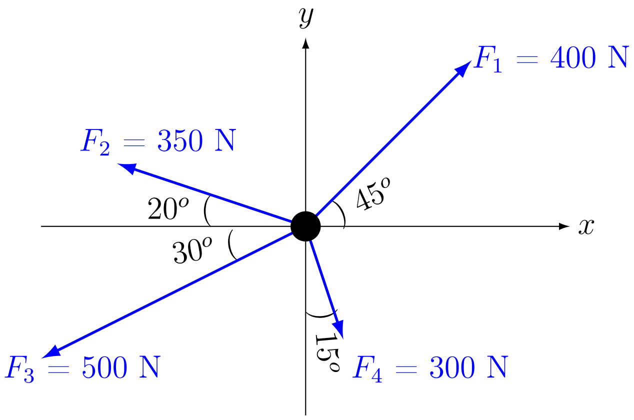
$$\vec{R} = F \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

Die versprochene Eselsbrücke für Sinus und Kosinus

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

1.1.2 Übungsaufgabe

Auf einen Leitungsmast wirken vier Kräfte in horizontaler Ebene



I11-2.TEX

Gesucht: Die Resultierende $\vec{R}$.

Eine andere Schreibweise war

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i$$

Wir zerlegen die vier Kräfte in Komponenten und beginnen jeweils mit der Komponente, die am 'Winkel dran liegt', sie wird vom Kosinus gebildet. Ab $\vec{F}_2$ kommt hinzu, dass manche Kraftkomponenten in negative Koordinatenrichtung zeigen.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cos 45^o \\ F_1 \sin 45^o \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -F_2 \cos 20^o \\ F_2 \sin 20^o \\ 0 \end{pmatrix}$$

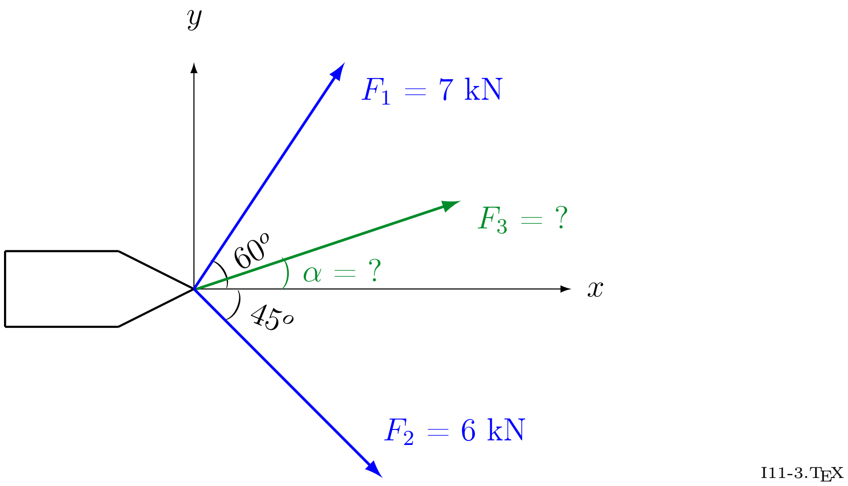
$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -F_3 \cos 30^o \\ -F_3 \sin 30^o \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} F_4 \sin 15^o \\ -F_4 \cos 15^o \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Taschenrechner liefert:

$$R_x = -401,4 \text{ N}, \quad R_y = -137,2 \text{ N} \qquad \text{oder} \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} -401,4 \\ -137,2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}.$$

1.1.3 Übungsaufgabe

Ein Schiff wird von drei Schleppern gezogen



Mit welchem Kraftbetrag und in welche Richtung muss Schlepper 3 ziehen, damit das Schiff mit 10 kN genau in x-Richtung geschleppt wird?

Hier kennen wir die Resultierende (=resultierende Kraft) und müssen eine unbekannte Kraft berechnen. Erstmalig wird hier ein Farbschema eingeführt, das der Übersicht dienen soll. Bekannte Kräfte sind blau dargestellt, gesuchte Kräfte grün.

Es gilt

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

mit

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cos 60^o \\ F_1 \sin 60^o \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} +F_2 \cos 45^o \\ -F_2 \sin 45^o \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den Vektor $\vec{R}$ haben wir aus der Aufgabenstellung erstellt. Mit $R = 10$ kN soll es genau in x-Richtung gehen. Für $\vec{F}_3$ haben wir eine Arbeitshypothese aufgestellt. Es wird eine x- und eine y-Komponente geben, wie kennen sie nur noch nicht.

Kundige fragen sich, warum bei ebenen Problemen die Vektoren drei Komponenten haben. Die z-Komponente ist doch immer Null, also weg damit. Es ist besser die dritte Komponente mitzuführen, denn bald wird auch bei ebenen Problemen die z-Komponente von Bedeutung. Für die Spezialisten: Wir werden aus Kräften und Ortsvektoren (Hebelarmen) Momente berechnen, und das geht mit dem räumlichen Kreuzprodukt. Kommt alles noch.

Wir stellen zwei Komponentengleichungen auf

$$F_1 \cos 60^o + F_2 \cos 45^o + F_{3x} = R$$

$$F_1 \sin 60^o - F_2 \sin 45^o + F_{3y} = 0$$

Taktischer Hinweis: Unbekannte Größen farblich hervorzuheben dient der Übersicht. Sie unterstreichen unbekannte Größen grün (geht hier nicht). Wir lösen zu den unbekannten Größen auf:

$$F_{3x} = R - F_1 \cos 60^o - F_2 \cos 45^o$$

$$F_{3x} = 2,26 \text{ kN}$$

$$F_{3y} = -F_1 \sin 60^o + F_2 \sin 45^o$$

$$F_{3y} = -1,82 \text{ kN}$$

Mit dem Ergebnis

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} +2,26 \\ -1,82 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

kann der Skipper auf Schlepper 3 nichts anfangen. Der braucht die Information 'wie doll' und 'wohin'.

$$F_3 = |\vec{F}_3| = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2}, \qquad F_3 = 2,90 \text{ kN}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{3y}}{F_{3x}}, \qquad \alpha = -38,8^o.$$

Versuchen Sie an Hand der Aufgabenskizze den Tangens bzw. Arcustangens nachzuvollziehen. Unsere Arbeitshypothese stellt sich als nicht richtig heraus. Schlepper 3 muss nicht oberhalb (unsere Annahme) sondern unterhalb der x-Achse ziehen, der negative Winkel α fordert das.

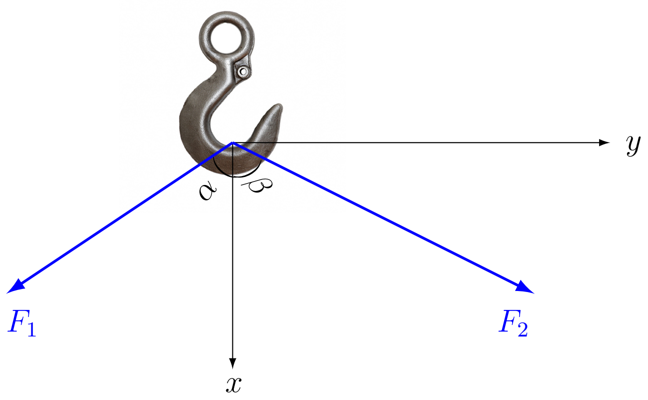
1.1.4 Übungsaufgabe

Am Lasthaken eines Krans wirken zwei Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

a) Welchen Betrag hat die auf den Haken ausgeübte Zugkraft?

b) Wirkt diese in lotrechter Richtung?

$$F_1 = 8,2\,\mathrm{kN}, \qquad F_2 = 9,7\,\mathrm{kN}, \qquad \alpha = 50^o, \qquad \beta = 65^o.$$



I11-4.TEX

a)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = F_1 \begin{pmatrix} +\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = F_2 \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 9,4 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \qquad R = 9,7 \text{ kN}$$

b)

$$\varphi = \arctan\frac{R_y}{R_x}, \qquad \varphi = 14,9^o$$

Da $\varphi \neq 0^o$ ist, lautet die Antwort 'nein'.

1.2 Gleichgewichtsbedingung

Axiom:

Ein System von Kräften mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt befindet sich im Gleichgewicht, wenn gilt $\vec{R} \equiv \vec{0}$

Zwei Anmerkungen: 1. Dieses Axiom wurde bisher nicht widerlegt (Freiwillige vor :-).
2. das Zeichen $\equiv$ bedeutet 'ist identisch'. Der Ausdruck $\vec{R} \equiv \vec{0}$ bedeutet daher, der Vektor R ist dauerhaft gleich dem Nullvektor (nicht nur vorübergehend).
$\equiv$ ist ein besonders wichtigtuerisches ist-gleich-Zeichen.

Bisher haben wir über Gleichgewicht nicht nachgedacht. Unser Leitungsmast war z.B. fest in der Erde verankert. Denken wir bei dem Thema Gleichgewichtsbedingung an ein völlig freischwebendes zentrales Kräftesystem, welches wir daraufhin überprüfen wollen, ob es sich in Bewegung versetzt oder an Ort und Stelle bleibt. In der Statik muss es dies ja tun. Viele Beispiele mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt fallen einem hierzu nicht ein. Denken Sie an ein Tauziehen. Wenn eine Markierung am Seil sich weder in die eine noch in die andere Richtung bewegt, dann ist das System im Gleichgewicht.

Unser Axiom angewandt auf Gleichung I.3 auf Seite 11 lautet

$$R_x = \sum_{i=1}^{N} X_i \equiv 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^{N} Y_i \equiv 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^{N} Z_i \equiv 0. \tag{I.4}$$

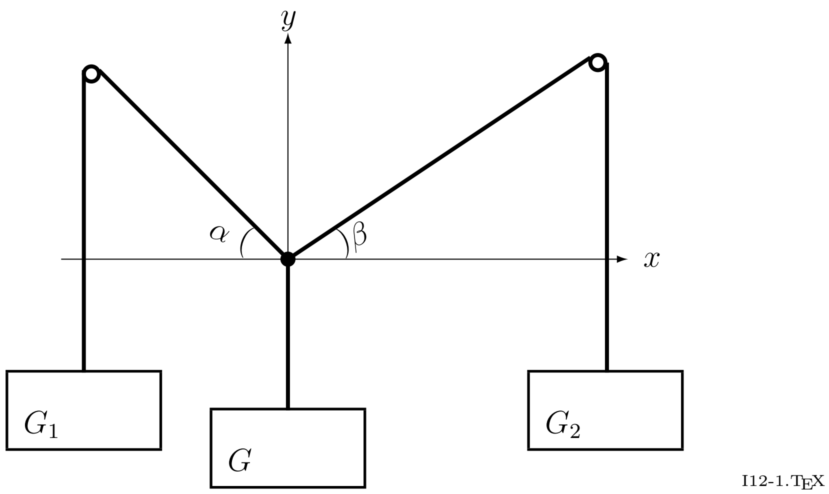
Künftig werden wir diesen Zusammenhang abgekürzt anschreiben.

$$\sum X \equiv 0, \qquad \sum Y \equiv 0, \qquad \sum Z \equiv 0$$

Vorgelesen lautet das: „Summe X identisch Null, Summe Y identisch Null, Summe Z identisch Null“. Wenn Sie gefragt werden, ob TM schwer ist, müssen Sie antworten „ja, unheimlich, jede Menge Formeln“. Von diesen dreien fällt häufig eine weg, dazu kommt noch eine andere hinzu ($\sum M_{[\mathrm{P}]} \equiv 0$, die können Sie noch nicht verstehen). Damit kommen wir sehr sehr lange aus. Drei Gleichungen liefern drei unbekannte Größen. Das ist die Kernkompetenz in TM I. ■

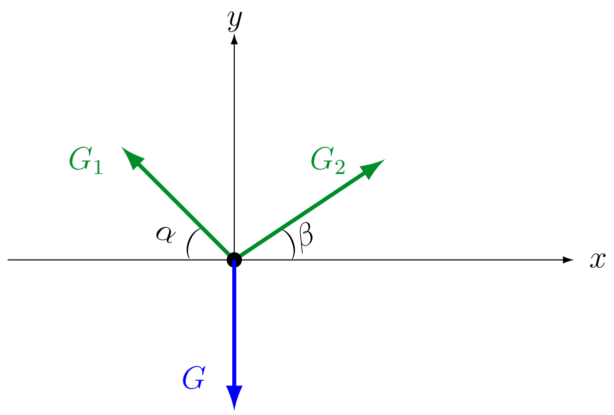
1.2.1 Übungsaufgabe

Gegeben: Gewichtskraft G, α, β



Gesucht: G_1, G_2

Uns fehlt gegenwärtig ein wichtiges Prinzip der Technischen Mechanik (Schnittprinzip), weshalb näher erläutert wird. Drei Gewichte sind mit Leinen verbunden, die über zwei Umlenkrollen geführt werden. Als Vorgriff auf das Schnittprinzip schneiden wir alle Leinen durch und bringen die Kräfte G, G_1, G_2 an. Die Kräfte wirken ziehend an den Seilen (nur Idioten schieben an Seilen). Diesen Schritt nehmen wir als vorgegeben hin, jetzt wenden wir die Gleichgewichtsbedingung an.



Wie gewohnt gilt :

$$\vec{G}_1 = \begin{pmatrix} -G_1 \cos\alpha \\ +G_1 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{G}_2 = \begin{pmatrix} G_2 \cos\beta \\ G_2 \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\vec{R} \equiv \vec{0} = \vec{G} + \vec{G}_1 + \vec{G}_2.$$

Besser handhabbar ist

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = -G_1 \cos\alpha + G_2 \cos\beta$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = -G + G_1 \sin\alpha + G_2 \sin\beta$$

$$(3) \quad \sum Z \equiv 0 = 0 \qquad \text{von selbst erfüllt.}$$

Die unbekannten Größen werden grün markiert, Sie unterstreichen, ich färbe ein.

Wir haben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Durch unsere Farbspiele sehen wir deutlich, dass es diesmal nicht so trivial, wie beim letzten Mal ist. Wir entwerfen eine Strategie.

Strategie:
Gleichung (1) nach G_1 auflösen.
G_1 in Gleichung (2) einsetzen und nach G_2 auflösen.

Künftig verwenden wir folgende Kurzschrift:
(1) $\rightarrow$ G_1
G_1 in (2) $\rightarrow$ G_2.

Diese Überlegung ist gut investierte Zeit. Wir trennen fehleranfällige Tätigkeiten voneinander. Das Umstellen von Gleichungen ist fehleranfällig, die Planung der Abfolge ist fehleranfällig.

$$(1) \rightarrow G_1 : \qquad G_1 = \frac{G_2 \cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$\text{in } (2) \rightarrow G_2 : \qquad G_2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \sin\alpha + G_2 \sin\beta = G$$

$$G_2 \left(\cos\beta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\beta \right) = G$$

$$G_2 (\cos\beta \tan\alpha + \sin\beta) = G$$

$$G_2 = \frac{G}{\cos\beta \tan\alpha + \sin\beta}$$

Es empfiehlt, von vorne zu beginnen, (1) nach G_2 aufzulösen und in (2) einzusetzen, um G_1 auszurechnen.

$$(1) \ \rightarrow \ G_2: \qquad G_2 = \frac{G_1 \ \cos\alpha}{\cos\beta}$$

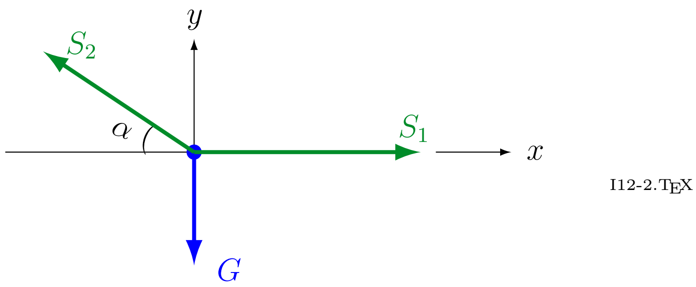
$$\text{in } (2) \ \rightarrow \ G_1: \qquad G_1 \left(\sin\alpha + \sin\beta \ \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \right) = G$$

$$G_1 \left(\sin\alpha + \tan\beta \ \ \cos\alpha \right) = G$$

$$G_1 = \frac{G}{\cos\alpha \ \ \tan\beta + \sin\alpha}$$

1.2.2 Übungsaufgabe

Gegeben: G, α



Gesucht: S_1, S_2

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -S_2\ \cos\alpha \\ +S_2\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = S_1 - S_2\ \cos\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = S_2\ \sin\alpha - G$$

(2) $\rightarrow S_2$, dann S_2 in (1) $\rightarrow S_1$

Die Farbmarkierungen sagen uns sehr deutlich, dass wir nicht mit Gleichung (1) anfangen sollen. In Gleichung (2) steht nur eine unbekannte Größe, damit fangen wir an. Künftig wird das unsere Taktik sein: Gibt es eine Gleichung mit nur einer Unbekannten? Auf die stürzen wir uns zuerst.

$$(2) \ \rightarrow \ S_2 \qquad S_2 = \frac{G}{\sin\alpha}$$

$$S_2 \text{ in } (1) \ \rightarrow \ S_1 \qquad S_1 = \frac{G}{\sin\alpha}\ \cos\alpha$$

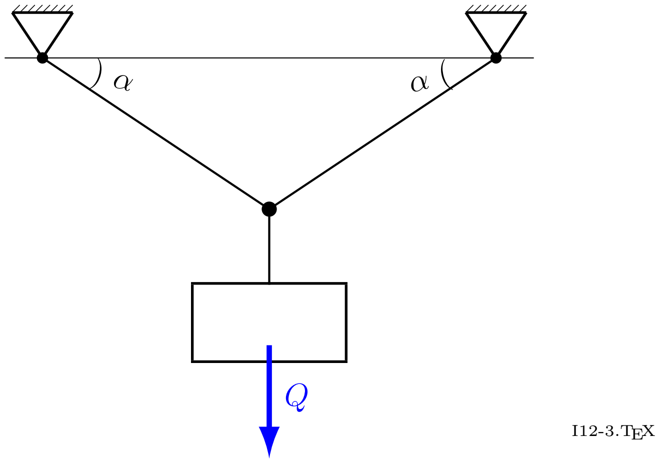
$$S_1 = \frac{G}{\tan\alpha} = G\ \cot\alpha.$$

Der Kotangens (cot) ist der Kehrwert des Tangens. Es gilt $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \tan^{-1}\alpha$. Das erklärt, warum ich mich immer so abfällig über die Hersteller von Taschenrechnern äußere. Wir kommen künftig ohne den Kotangens aus. Man sollte ihn nur erkennen können. Gelegentlich gibt es auch die Schreibweise $\operatorname{ctg}\alpha$.

Spielen Sie mit Zahlenwerten. $G = 100$ N, $\alpha = 20°,\ 10°,\ 5°,\ 1°,\ 0{,}1°$. Wundern Sie sich über die wundersame Kraftvermehrung. In der nächsten Aufgabe kümmern wir uns um das Phänomen.

1.2.3 Übungsaufgabe

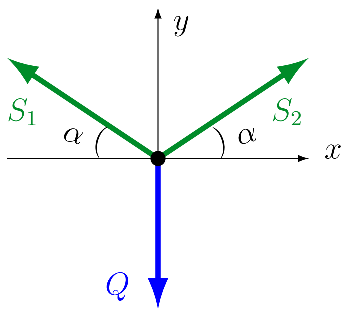
Eine Last (Gewichtskraft $Q = 10$ kN) soll durch ein Seil gehalten werden, dessen Tragfähigkeit 20 kN beträgt.



Wie klein darf der Winkel α werden, ohne dass das Seil reißt?

10 kN soll von zwei Seilen getragen werden, die jeweils 20 kN tragen können. Wo ist das Problem, fragt man sich zunächst. Wir haben in der vorherigen Übungsaufgabe schon festgestellt, dass Kräfte überraschend groß werden können.

Erneut schneiden wir alle Seile durch und ersetzen sie durch Kräfte.



Wir wollen künftig Schreibarbeit sparen und überspringen das Aufstellen der Spaltenvektoren. Wir beginnen gleich mit den Kräftegleichgewichten. Sie schreiben die Gleichungen an und markieren die unbekannten Größen anschließend grün.

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = -S_1 \; \cos\alpha + S_2 \; \cos\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = S_1 \; \sin\alpha + S_2 \; \sin\alpha - Q$$

(1) $\rightarrow S_1$, dann S_1 in (2)

$$(1) \;\rightarrow S_1 \qquad S_1 = S_2 \,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = S_2 = S$$

$$S \text{ in } (2) \qquad S \; \sin\alpha + S \; \sin\alpha = Q$$

$$S = \frac{Q}{2 \; \sin\alpha}.$$

$$\text{auflösen nach } \alpha \qquad \sin\alpha = \frac{Q}{2\,S}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{Q}{2\,S}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{10\,000}{40\,000}, \qquad \alpha = 14,5^o$$

Kranfahrer und Seenotretter müssen über diesen Tatbestand Bescheid wissen. Je kleiner der Winkel α wird, um so größer werden die Kräfte im schräg verlaufenden Hebezeug.

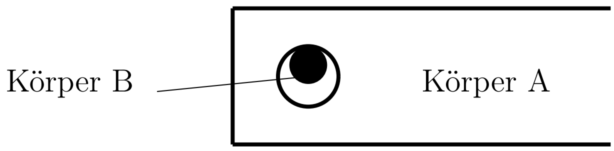
Auf Grund gelaufene Segelyachten werden gerne mit einer sich gabelnden Schleppleine (einem Hahnepot) quer freigeschleppt. Durch die Zugkräfte neigt sich die querstehende Segelyacht zum Seenotrettungsboot hin (sie krängt), dadurch wird der Tiefgang kleiner und die Yacht löst sich vom Grund. Ist aber der Hahnepot zu kurz (zu kleiner Winkel α), werden die Kräfte im Hahnepot zu groß. Dann besteht die Gefahr, dass wir eine Klampe aus dem Deck reißen. Sie fliegt anschließend wie ein Geschoss durch die Gegend. Ist mir zum Glück noch nie passiert. Bei der Hahnepotlänge gilt das 'landwirtschaftliche Nutzprinzip': viel hilft viel :-).

Spielen Sie mit der Formel $S = \frac{Q}{2 \; \sin\alpha}$. Je kleiner Sie α wählen, desto größer wird die Seilkraft S.
Bei $\alpha = 0$ explodiert Ihr Taschenrechner. Sie versuchen durch Null zu teilen. Wie man weiß, kann das nur Chuck Norris[3]. Die Seilkräfte werden unendlich.

[3] Wieviele Liegestütze kann Chuck Norris? Antwort: Alle.

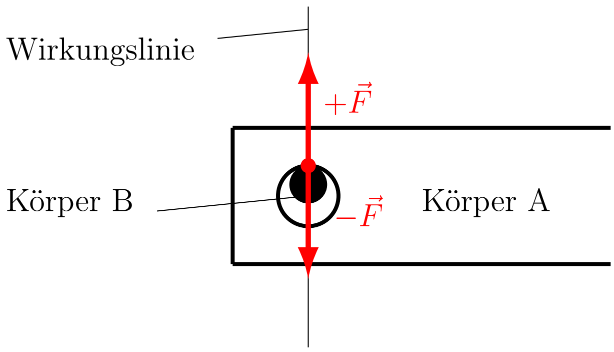
1.3 Schnittmethode

Wirken zwei Körper A und B aufeinander, z.B.



so entstehen sowohl eine Kraft von Körper A auf B als auch umgekehrt. Beide Kräfte liegen auf derselben Wirkungslinie, haben gleiche Größe aber entgegengesetzte Richtung (Gegenwirkungsprinzip, drittes Newtonsches[4] Gesetz, actio = reaction)

Also:



Nach außen keine Wirkung, d.h. Gleichgewicht.

Wird Körper A von B getrennt (schneiden, freischneiden, freimachen), so bleiben die Körper A und B für sich betrachtet im Gleichgewicht, wenn an den Berührstellen ihre Reaktionskräfte angebracht werden.

[4] Sir Isaac Newton
∗ 25. Dezember 1642 jul. / 4. Januar 1643 greg.
† 20. März 1726 jul. / 31. März 1727 greg.
Er gilt als einer der bedeutendsten Wissenschaftler aller Zeiten. Wir wenden hier sein berühmtes Werk, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, von 1687 an. Es gilt als eines der wichtigsten wissenschaftlichen Werke.

Das heißt, Lagerungen werden durch Reaktionskräfte – auch Schnittkräfte genannt – ersetzt.

Es kommt bei Schnittkräften **nicht** darauf an, sie mit der richtigen Richtung (hier Vorzeichen) anzutragen.

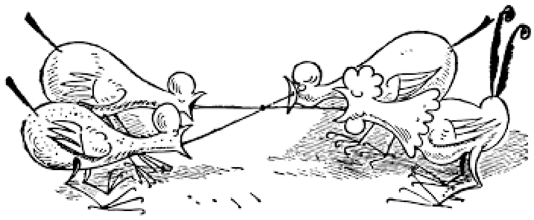
Oben erfolgt eine besondere und nur sehr selten benutzte Hervorhebung, dass es sich zweimal um den gleichen Kraftvektor handelt, der in zwei entgegengesetzte Richtungen zeigt ($+\vec{F}$, $-\vec{F}$). Demnächst und insbesondere in Übungen werden wir in Skizzen die Vektorpfeile auf $\vec{F}$ weglassen und auch keine Vorzeichen anbringen.

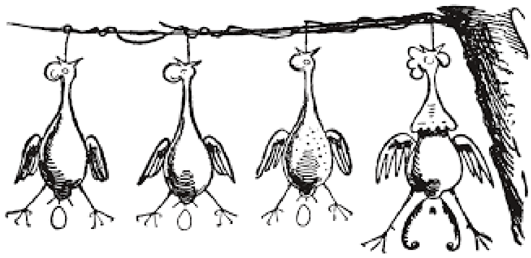
Wir sehen zweimal die gleiche Kraft F, einmal zeigt sie nach oben, einmal nach unten. Erst beim Aufstellen der Kräftegleichgewichte werden wir Vorzeichen berücksichtigen, indem wir die Kraftrichtung mit der Koordinatenrichtung vergleichen.

Wichtig! Mit Pfeil auf dem Symbol ($\vec{F}$): Minuszeichen sind in Skizzen möglich ($-\vec{F}$). Ohne Pfeil auf dem Symbol (F): Minuszeichen sind in Skizzen verboten!

1.4 Kräfte an starren Körpern

Bisher hatten alle Kräfte einen gemeinsamen Kraftangriffspunkt. An starren Körpern können Kräfte auch verschiedene Kraftangriffspunkte haben.



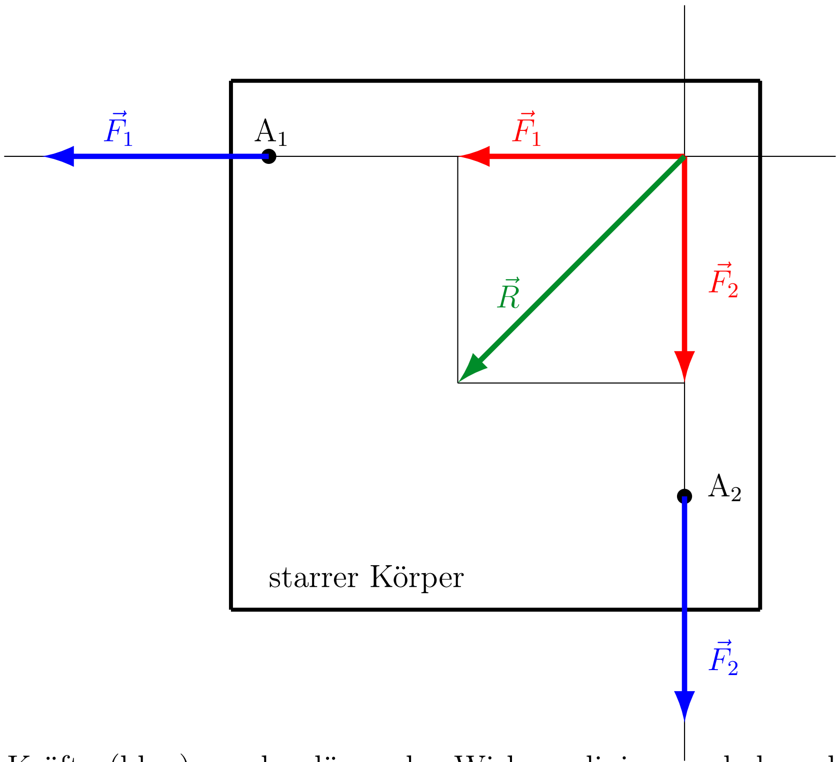


Axiom:

Eine Kraft, die an einem starren Körper angreift,
darf längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

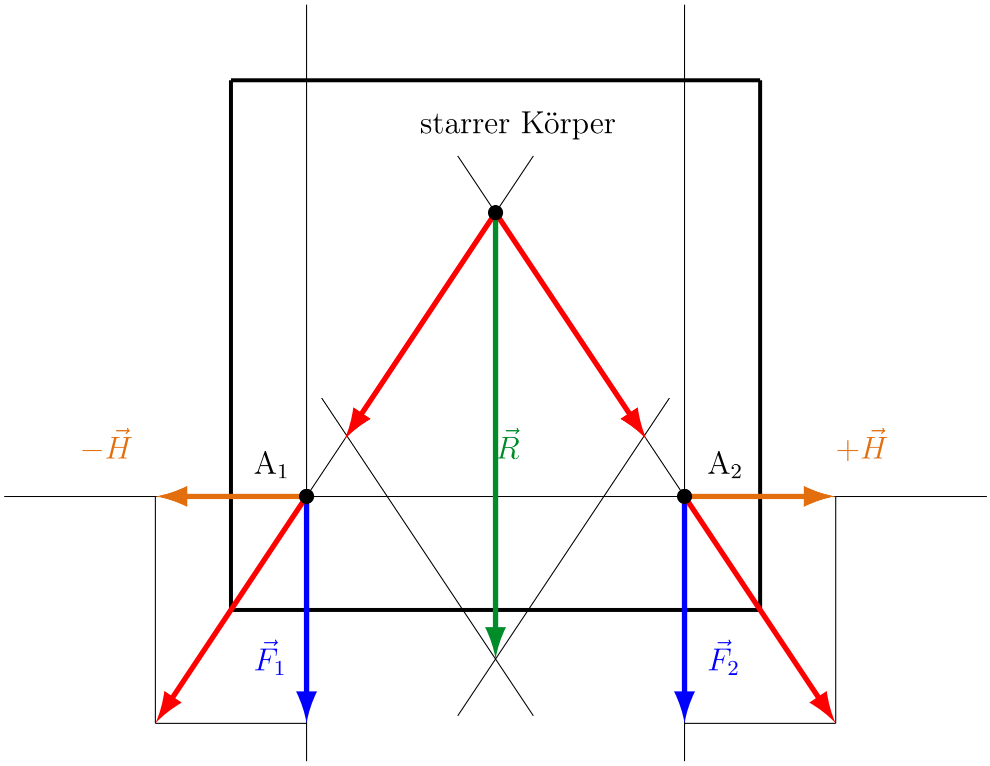
Bildung der Resultierenden.

Gegeben $\vec{F}_1[\mathrm{A}_1]$, $\vec{F}_2[\mathrm{A}_2]$, gesucht $\vec{R}$.



Gegebene Kräfte (blau) werden längs der Wirkungslinie verschoben, bis sie einen gemeinsamen Kraftangriffspunkt haben (rot), dann Resultierende bilden.

Mit einem Zwischenschritt gelingt dies auch bei parallelen Wirkungslinien. An den Kraftangriffspunkten der gegebenen blauen Kräfte mit parallelen Wirkungslinien bringen wir das orange Gleichgewichtssystem $+\vec{H}$, $-\vec{H}$ an (Hilfskräfte). Diese beiden entgegengesetzten Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie heben sich auf und verfälschen daher nichts. Wir bilden zwei rote Teilresultierende, die nun sich schneidende Wirkungslinie haben. Wir verschieben längs der Wirkungslinien und bilden die grüne Gesamtresultierende.

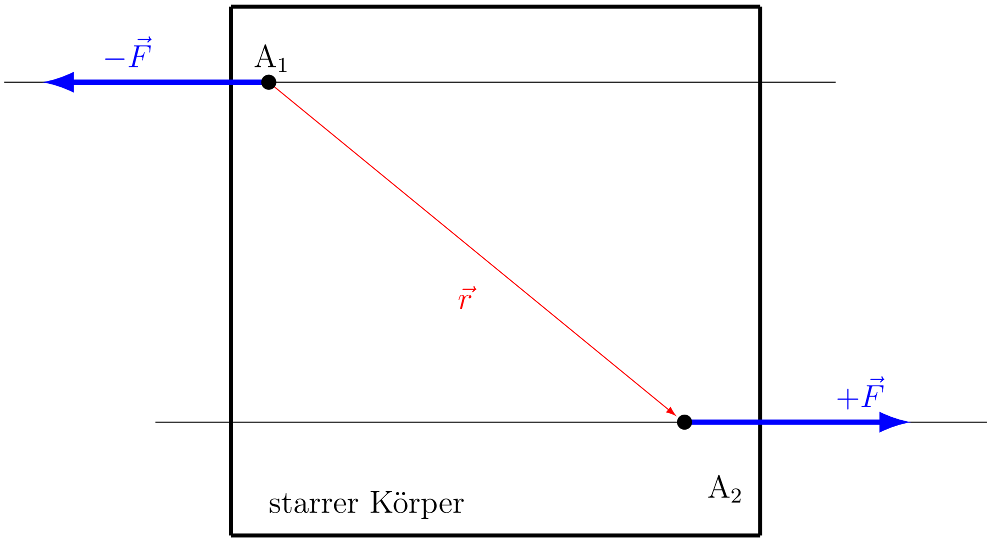


Jetzt könnten wir meinen, es ist alles gut, wir können weitermachen, wie bisher, eine Resultierende werden wir schon finden. Leider nein. Es gibt Fälle, da gelingt uns das eben beschriebene Manöver nicht.

Es taucht bei folgendem Spezialfall ein Problem auf: Zwei Kräfte haben parallele Wirkungslinien, sind gleich groß, haben aber entgegengesetzte Richtung. Eine Zusammenfassung zu einer Resultierenden ist nicht möglich.

Nächste Fehleinschätzung: Das ist doch so speziell, so oft wird das doch nicht passieren. Lass uns das auf Lücke setzen, wenn sowas kommt, müssen wir halt passen. Falsch. Dieser Spezialfall ist überaus häufig, wir werden das bald erleben.

Beispiel



Dieser Sonderfall wird „Kräftepaar“ genannt. Kräftepaare bilden neben den Kräften eine neue physikalische Realität. Der rote Vektor $\vec{r}$ ist der Verbindungsvektor von Kraftangriffspunkt A_1 zu A_2. Er wird auch Ortsvektor genannt und stellt ein Längenmaß dar. ■

2 Momente

2.1 Kräftepaare

Der neuen physikalischen Realität „Kräftepaar“ wird erneut eine vektorielle Größe zugeordnet.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{I.5}$$

mit

$\vec{M}$: Momentenvektor,

$\vec{r}$: Verbindungsvektor der Kraftangriffspunkte,

$\times$: Symbol für das Kreuzprodukt, auch Vektorprodukt genannt,

$\vec{F}$: Kraftvektor

Einschub Kreuzprodukt

Bevor wir den Momentenvektor näher betrachten, beleuchten wir ganz allgemein das Kreuzprodukt

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ wird definiert durch

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$.

   Das heißt, das Kreuzprodukt steht auf beiden erzeugenden Vektoren senkrecht ($\perp$).

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b})$ bilden ein Rechtssystem.

   Spreizen Sie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, dass der Mittelfinger senkrecht zu Daumen und Zeigefinger steht. Ohne Knochenbruch geht das nur auf eine bestimmte Art: Daumen nach oben, Zeigefinger nach vorn, Mittelfinger nach links. Der Daumen repräsentiert $\vec{a}$, der Zeigefinger $\vec{b}$, der Mittelfinger $(\vec{a} \times \vec{b})$.

3. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \qquad$ mit $\varphi : \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

   $\varphi : \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ bedeutet: φ (phi) ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Rechenregeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \text{Kommutativgesetz gilt nicht !!!}$$

$$(c\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (c\,\vec{b}) = c\,(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \text{Assoziativgesetz gilt wie üblich}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{d} = \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d} \qquad \text{Distributivgesetz gilt wie üblich}$$

Nun kümmern wir uns um das handwerkliche. Wie berechnet man ein Kreuzprodukt? Es gibt zwei Methoden. Eine offizielle, die sehr umständlich ist und eine andere, die in die Rubrik *quick and dirty* fällt. Die Ergebnisse beider Methoden sind natürlich gleich.

Es gelte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Formales Berechnen des Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Wir wollten doch nur ein Kreuzprodukt ausrechnen und jetzt das? Wir sehen eine Determinante, die senkrechten Striche sagen uns das. In der ersten Zeile stehen unsere drei Einheitsvektoren in alphabetischer Reihenfolge. In der zweiten Zeile steht unser erster Spaltenvektor als Zeile, darunter der zweite Spaltenvektor.

Wir prägen uns folgendes einfaches Vorzeichenschema ein:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ \ominus & \oplus & \ominus \\ \oplus & \ominus & \oplus \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \oplus & \ominus \\ \ominus & \oplus \end{vmatrix}$$

Dann entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile.

Wir streichen in der Determinante die erste Zeile (nach der entwickeln wir). Nur diese Zeile des Vorzeichenschemas gilt jetzt für uns. Dann streichen wir vorübergehend die erste Spalte. Wir suchen im Vorzeichenschema das Vorzeichen des zweimal gestrichen $\vec{\imath}$ und schreiben es als Faktor hin. Dahinter kommt die Unterdeterminante aus den nicht gestrichenen Elementen.

Als nächstes streichen wir die zweite Spalte. $\vec{\jmath}$ steht im 'Fadenkreuz'. Diese Position bekommt gemäß Schema ein Minuszeichen. Wir schreiben $-\vec{\jmath}$ an und ergänzen die Unterdeterminante aus erster und letzter Spalte.

Und noch einmal mit gestrichener dritter Spalte, wieder mit einem Pluszeichen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = +\vec{\imath} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Tolle Nummer, jetzt haben wir nicht eine, sondern drei Determinanten. Die sind aber kleiner, sie sind von der Dimension 2×2. Die können wir direkt ausmultiplizieren und zwar mit der gleichen Vorgehensweise. Wir entwickeln nach der ersten Zeile. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y\, b_z - a_z\, b_y$$

Der im Beispiel weggelassene Vorfaktor $\vec{\imath}$ sagt uns: „Schreib das in die obere, die x-Position des Ergebnisvektors". Denn es gilt

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

. Wir fassen zusammen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z & - & a_z\, b_y \\ -(a_x\, b_z & - & a_z\, b_x) \\ a_x\, b_y & - & a_y\, b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z & - & a_z\, b_y \\ a_z\, b_x & - & a_x\, b_z \\ a_x\, b_y & - & a_y\, b_x \end{pmatrix}$$

Qick and dirty

Wir schreiben den ersten Vektor zwei mal untereinander, rechts daneben den zweiten genauso. Anschließend streichen wir die erste und die letzte Zeile und multiplizieren wie eben bei den 2×2 Determinanten drei mal über Kreuz. Das schöne dabei ist, dass das unerwartete Minuszeichen vor $\vec{\jmath}$ nicht berücksichtigt werden muss, es kommt von alleine.

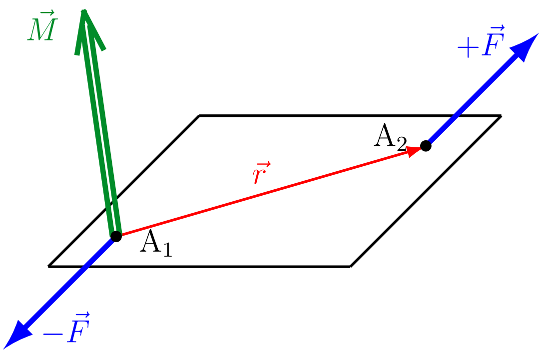
$$\begin{array}{ccc} \cancel{a_x} & & \cancel{b_x} \\ a_y & & b_y \\ & \times & \\ a_z & & b_z \\ & \times & \\ a_x & & b_x \\ & \times & \\ a_y & & b_y \\ \cancel{a_z} & & \cancel{b_z} \end{array} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z & - & b_y\, a_z \\ a_z\, b_x & - & b_z\, a_x \\ a_x\, b_y & - & b_x\, a_y \end{pmatrix}$$

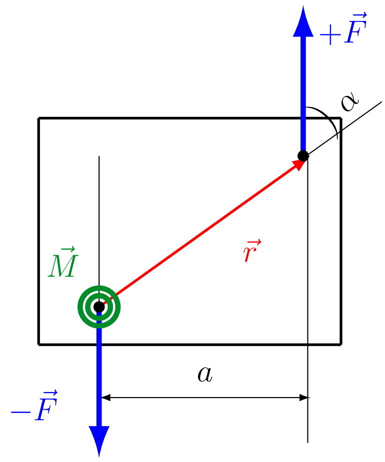
Probieren Sie es aus. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} +8 \\ +2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ey – machen! Kommt in der Klausur dran. Das mit den Vorzeichen geht leicht schief.

Zurück zum Momentenvektor





Eigenschaften des Momentenvektors $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ bzw. des zugehörigen Kräftepaars

$$-\vec{F}[A_1] \,||\, \vec{F}[A_2]$$

1. $\vec{M}$ steht senkrecht auf der von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Ebene. Er wird mit einem Doppelpfeil dargestellt.
2. $M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha = \pm F \cdot a$
3. Liegt das Kräftepaar in der x-y-Ebene, so hat $\vec{M}$ die Gestalt

$$\vec{M} = M \cdot \vec{k} \tag{I.6}$$

mit

M : Betrag des Momentenvektors zuzüglich ggf. Vorzeichen

$\vec{k}$: Einheitsvektor in z-Richtung

Es gilt

$$
\begin{aligned}
M &= +|\vec{M}|, \text{ sofern} \quad 0^o &< \alpha < 180^o \\
M &= -|\vec{M}|, \text{ sofern} \quad 180^o &< \alpha < 360^o
\end{aligned}
\tag{I.7}
$$

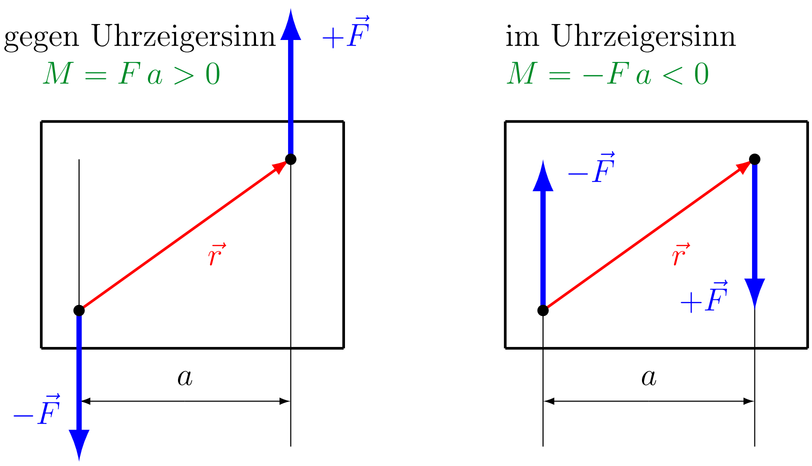
Diese Vorzeichenregelung ist zwar mathematisch korrekt (der Sinus wird zwischen 180° und 360° negativ), gut anwendbar ist diese Vorzeichenregelung hingegen nicht. Wir werden noch etwas praktikables erfinden.

4. Das Moment M und der Momentenvektor $\vec{M}$ haben die Einheit Nm (Newton-Meter).
5. Kräftepaare dürfen beliebig in der Ebene verschoben werden, sofern ihr Moment M (Betrag und Drehsinn = Vorzeichen) erhalten bleibt. D. h. der zugehörige Momentenvektor $\vec{M}$ darf beliebig parallel verschoben werden. Bei Kräften ist das nicht zulässig, die dürfen nur in Längsrichtung (entlang der Wirkungslinie) verschoben werden.
6. Die Momente zweier Kräftepaare in einer Ebene addieren sich algebraisch.

$$\text{Wenn } \vec{M}_1 \,||\, \vec{M}_2, \text{ dann} \qquad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \qquad \text{oder} \qquad M = M_1 + M_2.$$

Einfache Vorzeichenregel für ebene Fälle

Liegt das Kräftepaar in der x-y-Ebene, so gilt folgende Regel: Ein Moment oder ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung gegen den Uhrzeigersinn anstrebt, ist positiv. Ein Moment oder ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung mit dem Uhrzeigersinn anstrebt, ist negativ.



Bei ebenen Problemen werden wir auf das Kreuzprodukt verzichten und stattdessen formulieren:

Moment ist gleich $\pm$ Kraft F mal Hebelarm a.

Wobei der Hebelarm der Abstand zwischen den beiden parallelen Wirkungslinien ist. Das Vorzeichen wird über den Drehsinn festgelegt.

Zusammenfassung von N Kräften in einem beliebigen Punkt

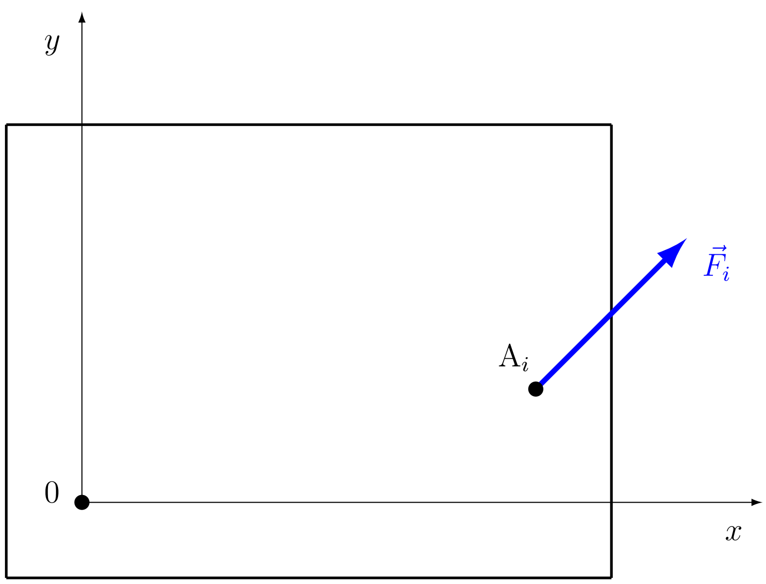
Wir befinden uns wieder an der Stelle, an der wir Kräfte mit verschiedenen Kraftangriffspunkten am ausgedehnten Körper zu einer Resultierenden zusammenfassen wollen. Wir stellten fest, dass das nicht immer geht. Unsere erste Vermutung war, dass nur ein seltener Sonderfall zur neuen physikalischen Realität 'Moment' führt. Gleich werden wir sehen, dass das Auftauchen von Momenten der Regelfall ist.

Wir wollen nicht mühsam und trickreich Kräfte längs verschieben, mit Hilfskräften $\vec{H}$ jonglieren um einen gemeinsamen Kraftangriffspunkt zu konstruieren, was – wie wir wissen – auch mal schief gehen kann. Wir wollen uns selbst einen willkürlichen Punkt definieren, dort sollen alle Kräfte vereint sein, so dass wir die Resultierende ausrechnen können. Das läuft auf eine erlaubte Längsverschiebung und auf eine verbotene Parallelverschiebung von Kräften hinaus.

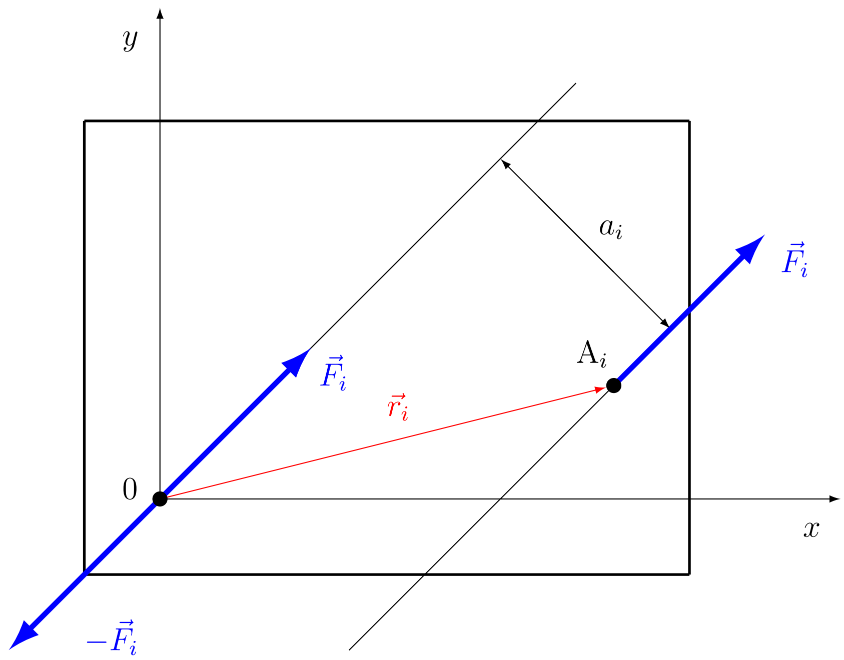
Zur Parallelverschiebung holen wir uns eine Sondererlaubnis, indem wir die Momentenwirkung der ursprünglichen Kraft erfassen.

Stellvertretend für alle N Kräfte wird die Kraft $\vec{F_i}$ am Kraftangriffspunkt A_i betrachtet, die wir in den von uns frei gewählten Punkt 0 verlagern wollen.

Ausgangslage:



Wir fügen an dem von uns willkürlich festgelegten Punkt 0, an dem zufällig unser Koordinatensystem entspringt ein parallel liegendes Gleichgewichtssystem hinzu, das in Summe 0 ist, also nichts verfälscht.



Also $\vec{F}_i[\mathrm{A}_i]$ ist gleichwertig mit

1. einer Kraft $\vec{F}_i[0]$ **und**
2. einem Moment (Kräftepaar) $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ bzw. $M_i = \pm\, a_i\, F_i$

Und schon taucht unser 'seltene Sonderfall' ständig auf. Zusatzfrage: Welches der beiden Vorzeichen $\pm$ gilt in diesem Bild?

Allgemein gilt: Die Zusammenfassung von N Kräften in einem beliebigen Punkt ergibt

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad \text{in beliebigem Punkt} \\ \vec{M}_R &= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \quad \text{um diesen Punkt} \end{aligned} \tag{I.8}$$

Vereinfachende Begriffsbestimmung:

Das Moment einer Kraft um einen Bezugspunkt
ist $\pm$ Kraftbetrag mal Abstand der
Wirkungslinie vom Bezugspunkt.

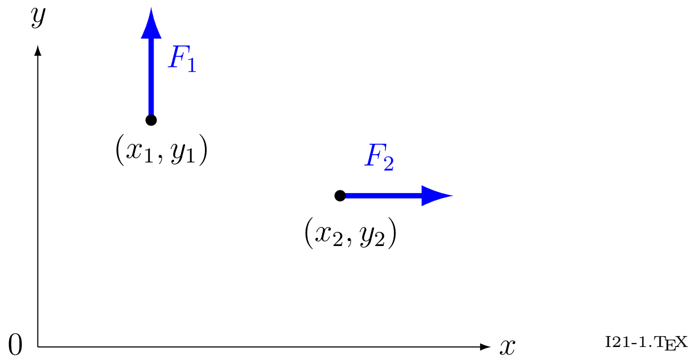
Kurz: **Moment ist gleich $\pm$ Kraft mal Hebelarm**

■

2.1.1 Übungsaufgabe

Gegeben:

$$x_1 = 1,5\,\mathrm{m}, \quad y_1 = 3\,\mathrm{m}, \quad x_2 = 4\,\mathrm{m}, \quad y_2 = 2\,\mathrm{m}, \quad F_1 = 10\,\mathrm{N}, \quad F_2 = 20\,\mathrm{N}.$$



Gesucht: Resultierende Kraft im Punkt 0, dazugehöriges Moment um den Punkt 0.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

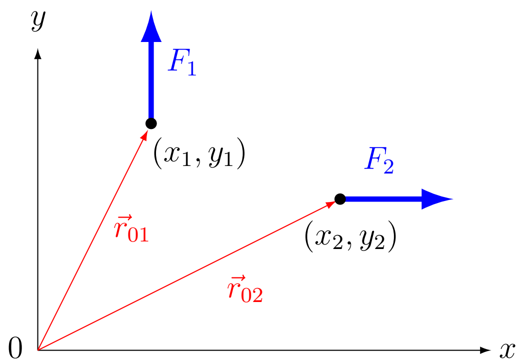
Dies gilt für den Punkt 0, wie auch für alle anderen Punkte.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Momentenwirkung der Kräfte, bezogen auf den Punkt 0 gilt:

$$\vec{M}_{1[0]} = \vec{r}_{01} \times \vec{F}_1, \qquad \vec{M}_{2[0]} = \vec{r}_{02} \times \vec{F}_2, \qquad \vec{M}_{[0]} = \vec{M}_{1[0]} + \vec{M}_{2[0]}$$

Wir benötigen die Ortsvektoren $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$. Der Doppelindex bei $\vec{r}_{01}$ beschreibt, dass der Ortsvektor vom Punkt 0 zum Punkt 1 zeigt (woher – wohin).



$$\vec{r}_{01} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{02} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

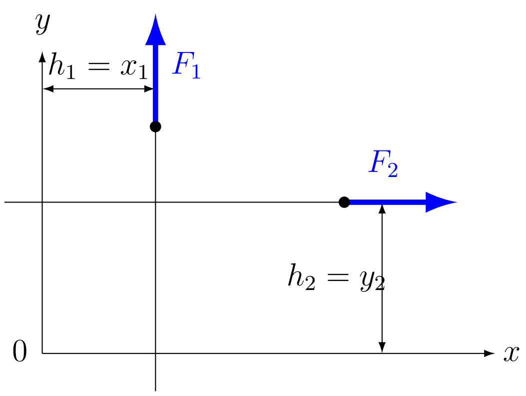
Nun berechnen Sie die beiden Kreuzprodukte mit einer Methode Ihrer Wahl. Bitte mit Formelzeichen, nicht mit Zahlen. Jede Wette, Sie nehmen *quick and dirty*, was vollkommen ok ist. Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss. Achten Sie bitte auf die richtige Reihenfolge beim Kreuzprodukt.

$$\vec{M}_{1[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1\,F_1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{M}_{2[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_2\,F_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1\,F_1 - y_2\,F_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{M}_{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix}\ \text{Nm}.$$

Bei diesem ebenen Problem können wir auch eine einfachere Methode anwenden, die wir, wenn immer möglich, bevorzugen werden.

Wir verabschieden uns von allen vektoriellen Darstellungen. Stattdessen gehen wir mit der Methode 'Kraft mal Hebelarm' vor. Dabei dürfen wir Kräfte längs ihrer hier gepunkteten Wikungslinien verschieben. Der Abstand der Wirkungslinie vom Bezugspunkt (hier 0) ist der Hebelarm h.



Die Vorzeichen, die das Kreuzprodukt liefert, müssen wir selbst herausfinden. Wir haben ein $x-y$-Koordinatensystem, in dem gilt, Momente gegen den Uhrzeigersinn sind positiv. Falls Ihnen die Vorstellung fehlt, machen Sie anfangs folgendes auf einer Papierskizze: Tippen Sie mit dem linken Zeigefinger auf den Punkt 0. Mit dem rechten Zeigefinger tippen Sie auf die betrachtete Kraft und bewegen ihn in Pfeilrichtung. Das Papier möchte sich um den Punkt 0 drehen. Der Drehsinn liefert das Vorzeichen.

Die Kraft F_1 dreht gegen den Uhrzeigersinn $(+)$ am Hebelarm h_1,

$$M_1 = +F_1\ h_1 = +F_1\ x_1.$$

Die Kraft F_2 dreht im Uhrzeigersinn (–) am Hebelarm h_2,

$$M_2 = -F_2\, h_2 = -F_2\, y_2.$$

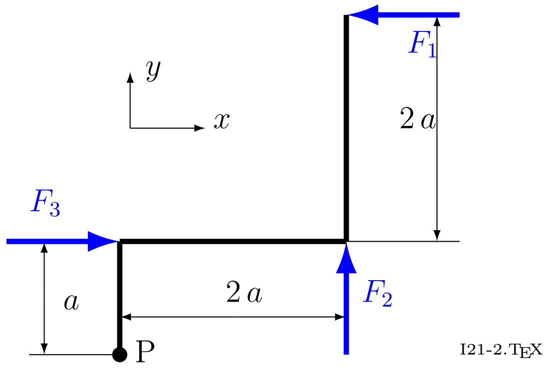
$$M_1 = +15 \text{ Nm}, \quad M_2 = -40 \text{ Nm}, \qquad M = M_1 + M_2, \quad M = -25 \text{ Nm}$$

Stellen Sie sich auf folgendes ein: Bei räumlichen Problemen benutzen wir das Kreuzprodukt (kann in der Klausur drankommen), bei ebenen Problemen verwenden wir die '± Kraft mal Hebelarm' Methode (kommt ständig dran, so sicher wie das Amen in der Kirche).

2.1.2 Übungsaufgabe

Ein Rahmen wird durch drei Kräfte belastet.

$$F_1 = F_2 = 2\,F, \quad F_3 = F, \quad a.$$



Gesucht: Resultierende Kraft im und resultierendes Moment um den Punkt P.

Wir sehen ein ebenes Problem, weshalb wir mit der '± Kraft mal Hebelarm' Methode beginnen. Zunächst aber die Resultierende.

$$\left.\begin{array}{ll} R_x = F_3 - F_1 & = -F \\ R_y = F_2 & = 2\,F \\ R_z = 0 & \end{array}\right\} \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} -F \\ 2\,F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für das gesamte resultierende Moment gilt

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3$$

$$M_R = +3\,a\,F_1 + 2\,a\,F_2 - a\,F_3$$

$$M_R = F\,a\,(6 + 4 - 1) = 9\,F\,a$$

Da wir noch neu im Geschäft sind, berechnen wir das resultierende Moment noch einmal mit Hilfe des Kreuzprodukts. Hierzu müssen alle Beteiligten als Spaltenvektor angetragen werden.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2\,F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,F \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2\,a \\ 3\,a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2\,a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

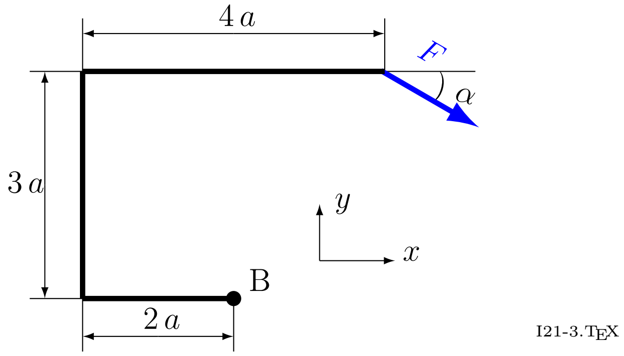
Los los keine Müdigkeit.

$$\vec{M}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\,Fa + 4\,Fa - Fa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9\,Fa \end{pmatrix}$$

2.1.3 Übungsaufgabe

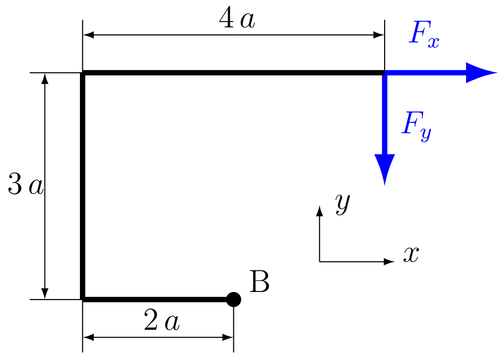
Ein Rahmen wird durch eine Kraft belastet. Gegeben:

$$F, \quad \alpha, \quad a.$$



Gesucht: Resultierendes Moment der Kraft F um den Punkt B.

Wir sehen ein ebenes Problem, weshalb wir mit der Hebelarmsuche anfangen. Dabei stellen wir fest, dass das alles andere als trivial ist. Wir verabschieden uns von der Idee, den Hebelarm zur schiefen Kraft zu finden und wenden eine List an. Wir zerlegen die Kraft F in seine Komponenten. Für diese sind die Hebelarme dann ganz leicht zu finden.



Zur Erinnerung: Wenn die Kräfte nur mit F bezeichnet werden, also nicht mit $\vec{F}$, so sind Vorzeichen in der Skizze verboten. Bei F_y könnte man ins Grübeln geraten: zeigt doch nach unten, gegen die y-Richtung, muss da kein Minus hin? Nein. Das machen wir zu einem anderen Zeitpunkt.

Es gilt

$$F_x = F\,\cos\alpha, \qquad F_y = F\,\sin\alpha$$

Vorsicht: scheinbarer Widerspruch zu

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F\cos\alpha \\ -F\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren beziehen sich auf das Koordinatensystem, daher das Minuszeichen. In der Skizze steht hingegen, die Kraft heißt F_y (ohne Vorzeichen) und die Kraftrichtung, die später bezüglich Vorzeichen berücksichtigt werden muss, ist der Pfeilrichtung zu entnehmen. Erst beim Aufstellen eines Vektors (s.o.) oder beim Aufsummieren mit anderen Kräften (s. letzte Übungsaufgabe $F_3 - F_1$) werden die Minuszeichen – wo nötig – vergeben. Erst dann orientieren wir uns am Koordinatensystem.

F_x hat den Hebelarm $3a$ und dreht im Uhrzeigersinn (–), F_y hat den Hebelarm $2a$ und dreht auch im Uhrzeigersinn (–).

$$M_{[B]} = -F_x\,3a - F_y\,2a$$

bzw.

$$M_{[B]} = -F a\,(3\,\cos\alpha + 2\,\sin\alpha)$$

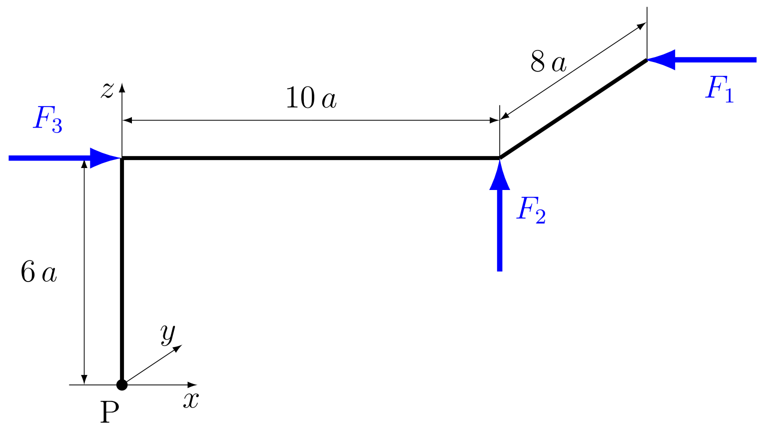
Versuchen Sie mit dem Kreuzprodukt auf das gleiche Ergebnis zu kommen.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2\,a \\ 3\,a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F\cos\alpha \\ -F\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Übungsaufgabe

An einem zwei mal rechtwinklig gebogenen Rahmen wirken drei Kräfte. Bestimmen Sie die resultierende Kraft und das resultierende Moment bezogen auf den Punkt P.

Gegeben: $F_1 = 2\,F$, $F_2 = F$, $F_3 = 2\,F$, a.



Wir sehen ein räumliches Problem, weshalb die vektorielle Vorgehensweise zu bevorzugen ist.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 2F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{P1} = \begin{pmatrix} 10\,a \\ 8\,a \\ 6\,a \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{P2} = \begin{pmatrix} 10\,a \\ 0 \\ 6\,a \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{P3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\,a \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{1[P]} = \vec{r}_{P1} \times \vec{F}_1, \qquad \vec{M}_{2[P]} = \vec{r}_{P2} \times \vec{F}_2, \qquad \vec{M}_{3[P]} = \vec{r}_{P3} \times \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_{1[P]} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12\,Fa \\ +16\,Fa \end{pmatrix}, \qquad \vec{M}_{2[P]} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10\,Fa \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{M}_{3[P]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12\,Fa \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{R[P]} = \vec{M}_{1[P]} + \vec{M}_{2[P]} + \vec{M}_{3[P]}, \qquad \vec{M}_{R[P]} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10\,Fa \\ +16\,Fa \end{pmatrix}.$$

2.2 Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte mit verschiedenen Kraftangriffspunkten

Bei den Übungsaufgaben mit den Ordnungsnummern 2.1.n hatten wir keine Gleichgewichtsbedingungen angewandt. Es ging nur um das Berechnen von resultierenden Kräften und Momenten bezüglich eines bestimmten Punktes. Nun greifen wir das Grundprinzip der Statik wieder auf, die Gleichgewichtsbedingungen.

Ebenes Kräftesystem

Bei einem ebenen Kräftesystem an einem starren Körper herrscht Gleichgewicht, wenn gilt

$$\vec{R} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} M_{i[\;]} \equiv 0 \tag{I.9}$$

Das Momentengleichgewicht ist skalar (nicht vektoriell) angeschrieben, da ausschließlich Momentenvektoren auftreten können die auf der Ebene der Kräfte senkrecht stehen. Eine vektorielle Schreibweise ist natürlich möglich, jedoch überflüssig.

In Komponentenschreibweise:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \equiv 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} Y_i \equiv 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} M_{i[\;]} \equiv 0. \tag{I.10}$$

In die leere eckige Klammer bei den Momenten ist der Bezugspunkt einzutragen. Gleichung (I.10) wird Kräfte- und Momentengleichgewicht bezeichnet. Abgekürzt KG und MG.

KG und MG sind unser Kerngeschäft für den Rest des Semesters.

Räumliches Kräftesystem

Bei räumlichen Systemen gilt ganz ähnlich (Summengrenzen $i = 1$ bis N weggelassen)

$$\begin{aligned} \sum X_i &\equiv 0, \qquad & \sum M_x &\equiv 0 \\ \sum Y_i &\equiv 0, \qquad & \sum M_y &\equiv 0 \\ \sum Z_i &\equiv 0, \qquad & \sum M_z &\equiv 0 \end{aligned} \tag{I.11}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\vec{R} \equiv \vec{0}, \qquad \vec{M}_R \equiv \vec{0}.$$

Hinweis: $\sum M_x \equiv 0$ bedeutet 'Summe aller Momente um die x-Achse ist identisch Null'

2.3 Körpersysteme

Vorgegeben seien starre Körper, die untereinander irgendwie verbunden sind (Gelenk, Lagerung, Führung, Fügung).

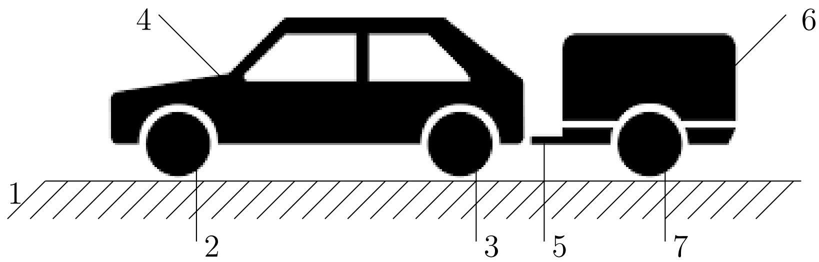
Gelenk: Denken Sie an ein Bolzengelenk (eben) oder an die Anhängekupplung eines Autos mit Anhänger (räumlich).

Lagerung: Denken Sie an die Auflager von Brücken oder an Wälz- und Gleitlager von Wellen.

Führung: Denken Sie an die Schwalbenschwanzführung eines Reitstocks auf einer Drehbank oder des beweglichen Teils eines Schraubstocks.

Fügung: Jedwede Verbindung zwischen zwei Körpern durch Schrauben, Nieten oder durch das Schweißen, Löten, Kleben.

Gefragt ist nach den Kräften und Momenten (Kraftvektor und Momentenvektor), die bei Belastung eines oder mehrerer Teilkörper zwischen den Teilen herrschen.



2.4 Die Schnittmethode und ihre Anwendung

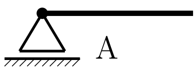
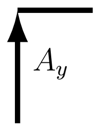
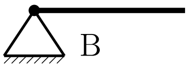
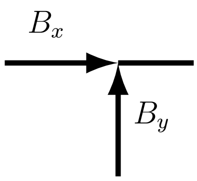
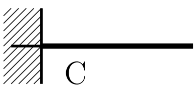
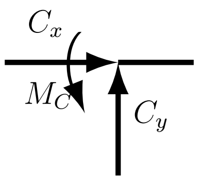
Zerschneiden des Systems in geeignete Teilkörper. Bewertung der Lager- und Schnittstellen. Anbringen von Kraft- und Momentenvektoren an den Schnittstellen (häufig komponentenweise).

Berücksichtigung des Gegenwirkungsprinzips.

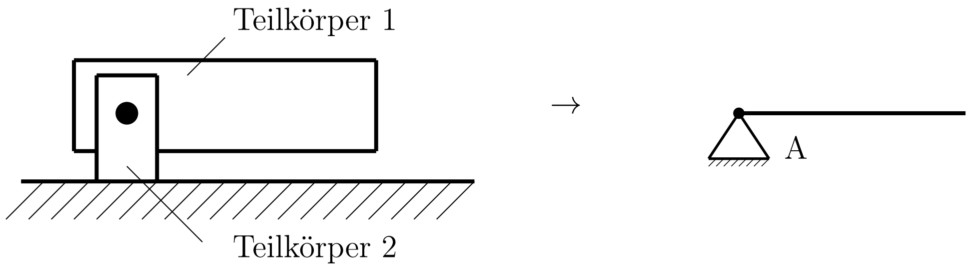
Anschließend für jeden vollständig freigeschnittenen Teilkörper Kräfte- und Momentengleichgewicht aufstellen.

Für die Bewertung von Lagerungen gibt es das folgende Hilfsmittel. Dieses Blatt ist in der Klausur ein zusätzliches zugelassenes Hilfsmittel. Abgekürzt wird es genannt

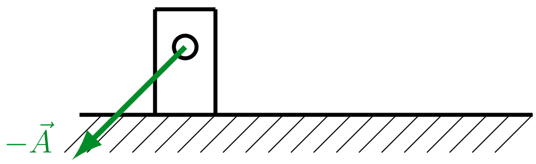
der Lagerzettel.

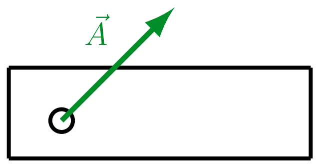
Auflager linienförmiger Tragwerke, zugehörige Lagerreaktionen				
Symbol	Wertigkeit	Schnittbild	Bewegungs-möglichkeit	Rand-bedingung(en)*
	einwertig		Drehung und Verschiebung	$w(x = a) = 0$
	zweiwertig		Drehung	$w(x = a) = 0$
	dreiwertig		keine	$w(x = a) = 0$ $w'(x = a) = 0$
* für die Variable a ist die tatsächliche x-Position des Lagers einzusetzen				
Prof. Dr.-Ing. Joachim Venghaus				Technische Mechanik

Beispiel für Starrkörperverbindungen: Bolzengelenk

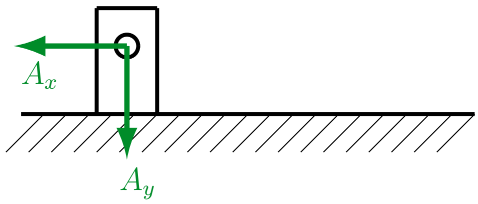


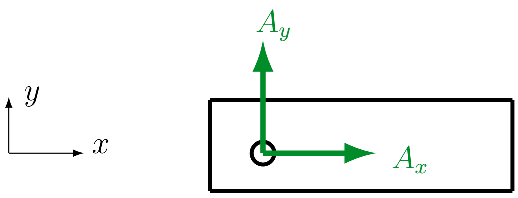
Schnitt





oder gleichbedeutend





Grundsätzlich: Gegenwirksame Vektoren mit Vorzeichen versehen (z.B. $\vec{A},\ -\vec{A}$). Bei der Komponentendarstellung (z.B. $A_x,\ A_y$) dürfen keine Vorzeichen gesetzt werden. Pfeilrichtung und Bezeichnung (z.B. $A_x,\ A_y$) gemeinsam beschreiben die Kraftkomponente.

Ein negativer Zahlenwert bei einer Kraftkomponente besagt dann: „Die Kraft wirkt nicht wie eingezeichnet, sondern gegenan“.

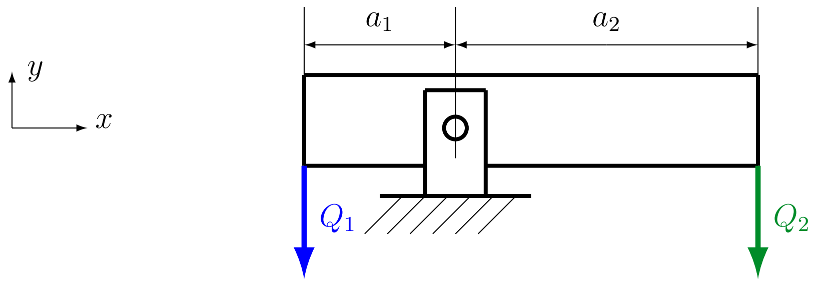
Beim Antragen von Schnittkräften in Komponentenform ist das ein unschätzbarer Vorteil. Wir müssen nicht 'ahnen' wohin eine Kraftkomponente wirklich wirkt (links oder rechts, oben oder unten). Wir können die Kraftkomponente am ersten Schnittufer anbringen wie wir wollen. Am anderen Schnittufer sind wir jedoch festgelegt, das Newtonsche Gegenwirkungsprinzip muss erfüllt werden.

Sollte am Ende einer Berechnung ein negativer Zahlenwert auftauchen ist das kein Schönheitsfehler! Jedoch dürfen wir in solchen Fällen nachträglich auf gar keinen Fall die Pfeilrichtung ändern.

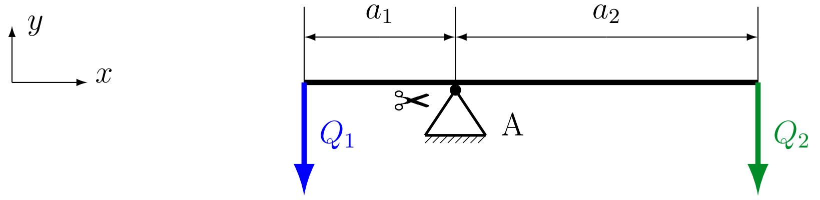
Noch etwas: Ob eine Kraft mit der Spitze drückt oder mit dem Fuß zieht ist unerheblich. Kräfte dürfen längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Beispiele für die Anwendung der Schnittmethode

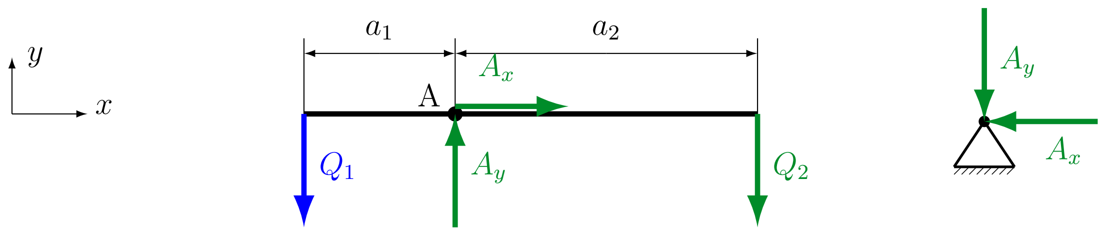
Gegeben: $Q_1,\ a_1,\ a_2$, gesucht Q_2.



Dies ist gleichbedeutend mit



Wir schneiden das Lager ab ✂ und ersetzen es durch Lagerreaktionen, hier: zweiwertiges Lager.



Wir geben den Lagern willkürliche Buchstaben als Bezeichnung, beginnend mit A. Demzufolge heißen die Lagerkräfte in diesem Fall $A_x,\ A_y$. Die Richtung der grünen Pfeile am Waagebalken (A_x nach rechts, A_y nach oben) ist willkürlich festgelegt. Eine oder beide Kräfte andersherum einzuzeichnen ist genauso zulässig.

Am vollständig freigeschnittenen Waagebalken wenden wir die Gleichgewichtsbedingungen für ebene Fälle an.

Das abgetrennte Lager ist nicht vollständig freigeschnitten. Dies ist erkennbar an der Schraffur. Sie besagt, dass der 'Lagerbock' noch mit dem Rest der Welt verbunden ist.

An solchen Teilen mit Schraffur ist es unsinnig, Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen. Beim nächsten mal werden wir solche Teilbilder gleich weglassen. Ich wollte Ihnen diesmal nur daran zeigen, dass das Newtonsche Gegenwirkungsprinzip angewandt wurde. Am zweiten Schnittufer, das wir betrachten, haben wir keine freie Wahl mehr. Hier muss alles umgekehrt zum ersten Schnittufer sein.

Wir wählen den Punkt A als Bezugspunkt für die Momente.

Künftig wählen wir immer den Punkt als Bezugspunkt, an dem die meisten unbekannten (grünen) Kräfte angreifen. Die haben dann keinen Hebelarm und tauchen im Momentengleichgewicht nicht auf. So schaffen wir uns günstige Gleichungssysteme.

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = -Q_1 + A_y - Q_2$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = Q_1\, a_1 - Q_2\, a_2$$

Das Momentengleichgewicht vorgelesen lautet wie folgt: Die Summe aller Momente bezüglich Punkt A ist identisch Null. Die Kraft Q_1 dreht am Hebelarm a_1 gegen den Uhrzeigersinn (positiv), die Kraft Q_2 dreht am Hebelarm a_2 im Uhrzeigersinn (negativ).

Durch unsere Farbmarkierungen ist die Vorgehensweise sonnenklar
$(1) \rightarrow\ A_x; \qquad (3) \rightarrow\ Q_2; \qquad Q_2$ in $(2) \rightarrow\ A_y.$

$$A_x = 0$$

$$Q_2 = Q_1\,\frac{a_1}{a_2}$$

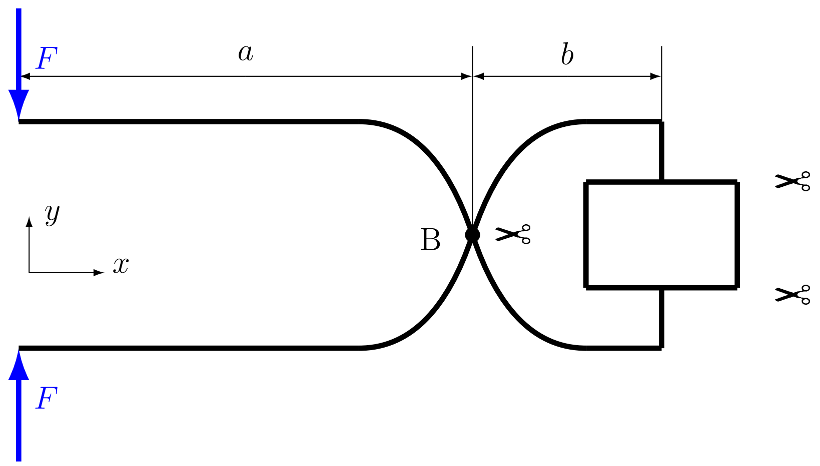
$$A_y = Q_1\,\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right).$$

Betrachten wir kurz diese Ergebnisse. Die Lagerkraft A_x ist 0. Das heißt, in horizontaler Richtung muss unser Lager keine Kräfte aufnehmen. Aus diesem Grund ist es müßig, zu überlegen, ob wir die Kraft A_x am Waagebalken 'richtigherum' eingezeichnet haben.
Die Kraft A_y ist erkennbar positiv. Das bedeutet, dass sie tatsächlich so wirkt, wie eingezeichnet. Am Waagebalken drückt sie nach oben, am Lagerbock nach unten. Hätten wir A_y anders eingezeichnet, hätten wir ein führendes Minuszeichen bekommen. Probieren Sie es aus.

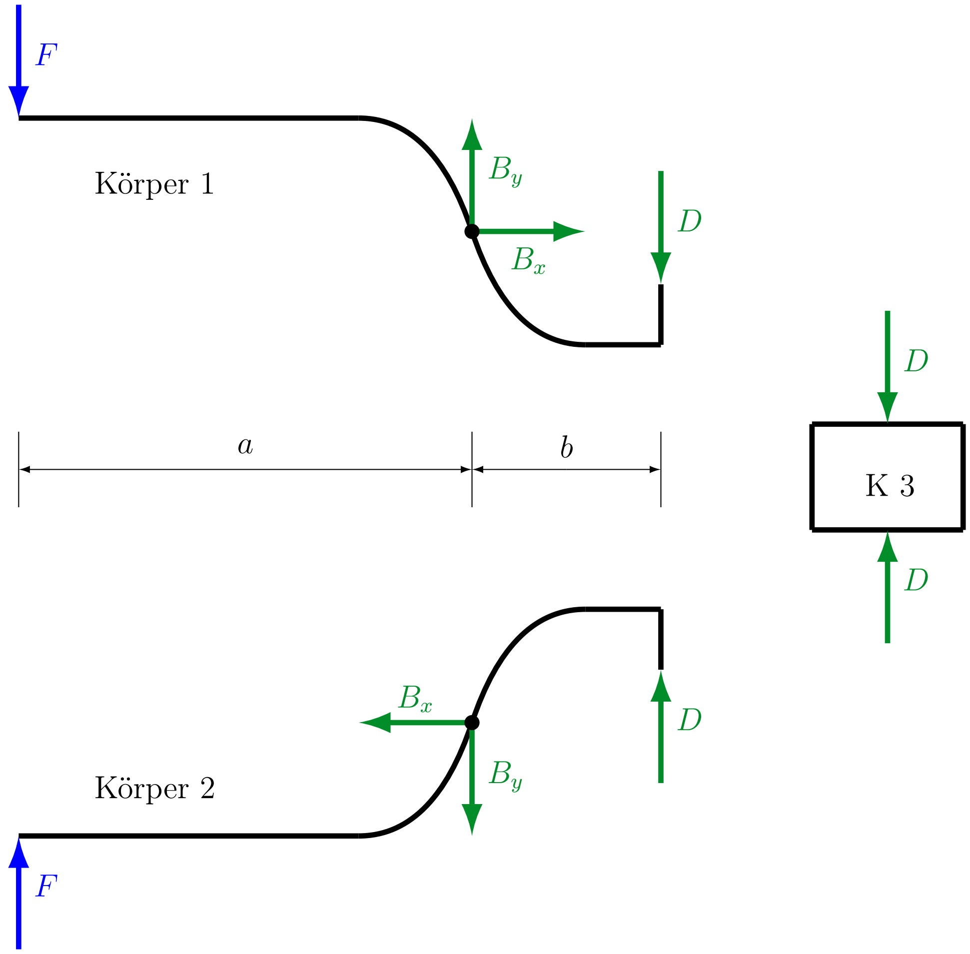
Am Ergebnis für Q_2 sehen wir das klassische Hebelgesetz, das jeder Einbrecher beherrscht, der mit einem Kuhfuß ein Fenster aushebelt. Oder „gewaltig ist des Schlossers Kraft, wenn er mit dem Hebel schafft“.

Beispiel Kneifzange

Gegeben: $F,\ a,\ b$, gesucht: Kräfte im Bolzengelenk und auf eingespannten Gegenstand



Freischneiden des Gegenstandes und des Bolzengelenks



Kräfte- und Momentengleichgewicht am Körper 1

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = B_x$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = -F + B_y - D$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{B}]} \equiv 0 = F\,a - D\,b$$

Kräfte- und Momentengleichgewicht am Körper 2

$$(1') \qquad \sum X \equiv 0 = -B_x$$

$$(2') \qquad \sum Y \equiv 0 = F - B_y + D$$

$$(3') \qquad \sum M_{[\mathrm{B}]} \equiv 0 = -F\,a + D\,b$$

Körper 2 liefert keine neuen Erkenntnisse, da durch Multiplikation der Gleichungen mit (-1) die Gleichungen des Körper 1 hergeleitet werden.

Das Kräfte- und Momentengleichgewicht an Körper 3 ist von selbst erfüllt.

Zugegeben, die Kräfte an Körper 3 sind sehr minimalistisch dargestellt. Es wird als vorgegeben angesehen, dass keine Kräfte in x-Richtung wirken und dass der Körper 3 masselos ist. Nehmen Sie diese Vorgaben einfach hin.

(1) $\rightarrow$ B_x; (3) $\rightarrow$ D; D in (2) $\rightarrow$ B_y.

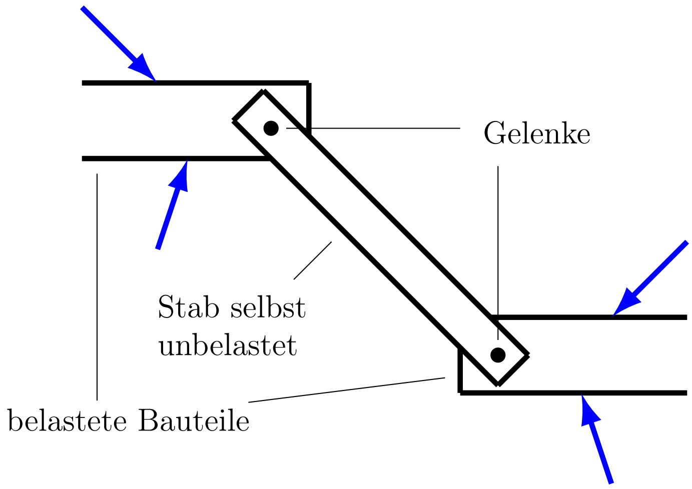
$$B_x = 0$$

$$D = F\,\frac{a}{b}$$

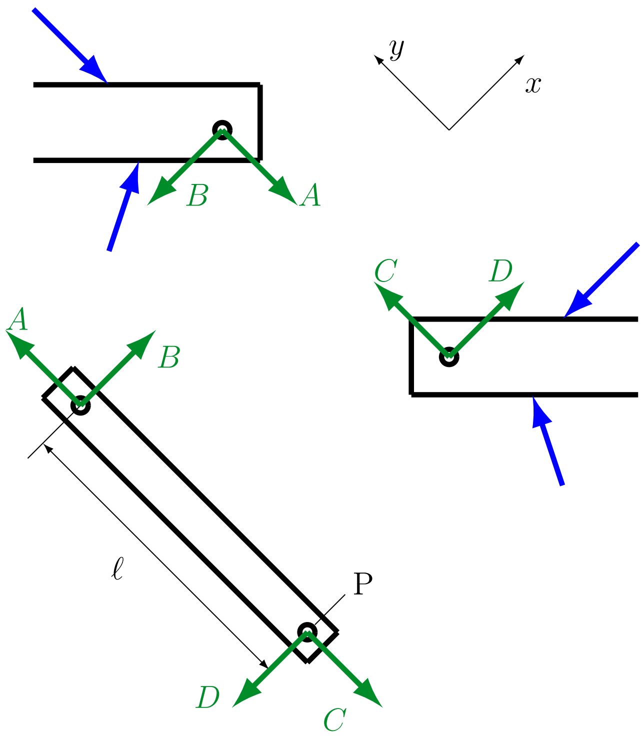
$$B_y = F\,\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Pendelstütze

Eine Pendelstütze ist ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab, der selbst unbelastet ist.



Es stellt sich die Frage nach der Kraftübertragung im Stab. Hierzu schneiden wir die beiden Bolzengelenke frei.



Im Rahmen einer gewissen Vorahnung haben wir ein Koordinatensystem gewählt, das an den Verlauf der Pendelstütze angepasst ist.

Kräfte- und Momentengleichgewicht an der Pendelstütze

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = B - D$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A - C$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{P}]} \equiv 0 = -B\,\ell$$

Aus Gleichung (3) folgt $B = 0$, da Pendelstützen eine Länge $\ell \neq 0$ haben müssen. Mit $B = 0$ und Gleichung (1) folgt, dass auch $D = 0$ ist. Es bleibt die Erkenntnis

$$A = C.$$

Das heißt: Eine Pendelstütze kann nur Kräfte in Stablängsrichtung übertragen.

Hierzu gibt es eine überaus korrekte aber komplizierte Beschreibung, da die Pendelstütze auch krumm wie ein Bumerang sein darf.

Oder genauer: Eine Pendelstütze kann nur Kräfte in Richtung der Verbindungslinie der Gelenkmitten übertragen.

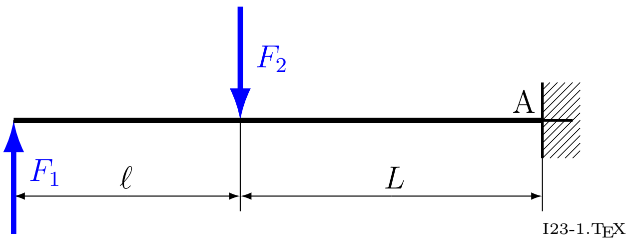
Wenn wir eine Pendelstütze erkennen, ersetzen
wir sie durch Schnittkräfte in Stablängsrichtung.

Pendelstützen sind wie Seile, an denen nur beidseitig gezogen oder auch (abweichend von Seilen) beidseitig gedrückt werden kann. Das Erkennen von Pendelstützen erspart viel Arbeit.

2.4.1 Übungsaufgabe

Ein einseitig eingespannter Balken wird von zwei Kräften belastet. Er befindet sich im Gleichgewicht. Gegeben:

$$F_1, \quad F_2, \quad \ell, \quad L.$$

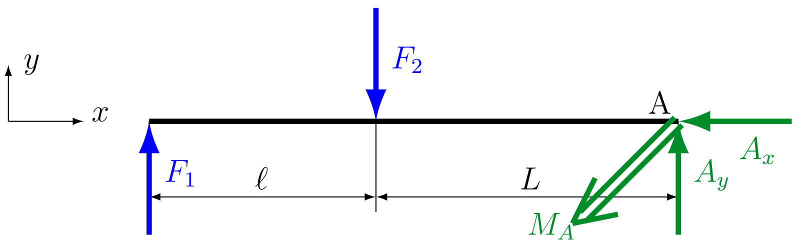


Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A.

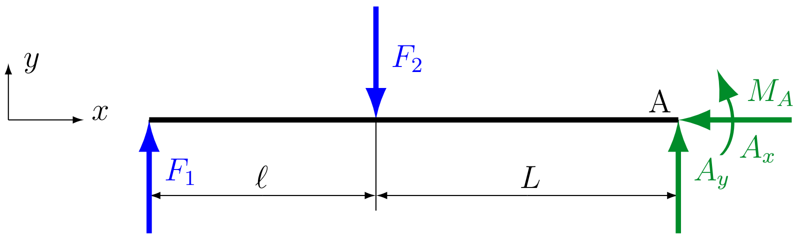
Was sind Lagerreaktionen? Es sind die Lagerkräfte und – sofern vorhanden – die Lagermomente. Lagerreaktion ist der Oberbegriff zu Lagerkräften und Lagermomenten, ohne zu verraten, ob es z.B. Lagermomente tatsächlich gibt.

Freischneiden.

Wir erkennen ein dreiwertiges Lager am rechten Balkenende. Gemäß Lagerzettel ersetzen wir es durch die Kräfte A_x, A_y und ein Moment M_A (Buchstaben A, weil das Lager A heißt). Die Richtung eines jeden grünen Pfeils ist frei wählbar. Es gibt also sechs verschiedene Möglichkeiten, die alle zulässig sind. Natürlich rechne ich nur eine von den sechs Möglichkeiten vor – diese. Wichtig ist dabei, wir müssen keinen Ehrgeiz entwickeln, die Schnittkräfte und -momente 'richtigherum' einzuzeichnen. Gerade in diesem Beispiel werden wir sehen, dass wir gar nicht wissen können, was 'richtigherum' ist.



Bei ebenen Problemen stellen wir Momente häufig vereinfacht dar.



Um die Momentendarstellung von der einen in die andere Darstellungsform zu überführen benötigen wir die rechte Hand. Der Daumen zeigt in die Richtung des Doppelpfeils. Hier ist das die z-Richtung, aus der Zeichenebene heraus. Die gekrümmten Finger der rechten Hand zeigen die Wirkrichtung des gekrümmten Pfeils, der vereinfacht das Moment in einer ebenen Skizze darstellt.

KG und MG

$$\sum X \equiv 0 = -A_x$$

$$\sum Y \equiv 0 = F_1 - F_2 + A_y$$

$$\sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = M_A + F_2\,L - F_1\,(\ell + L)$$

Sicherheitshalber wird noch einmal das Momentengleichgewicht erläutert. Wir wählen Punkt A als Bezugspunkt, da dort viele (2) unbekannte Kräfte angreifen. Die haben dann keinen Hebelarm und tauchen daher im Momentengleichgewicht nicht auf.

Ansonsten gilt: Das Moment M_A dreht gegen den Uhrzeigersinn (+), die Kraft F_2 dreht bezüglich Punkt A am Hebelarm L gegen den Uhrzeigersinn (+), die Kraft F_1 dreht bezüglich Punkt A am Hebelarm $\ell + L$ im Uhrzeigersinn (–).

Die Lagerreaktionen lauten

$$A_x = 0$$

$$A_y = F_2 - F_1$$

$$M_A = F_1\,(\ell + L) - F_2\,L.$$

Ob die von uns gewählten Pfeilrichtungen für A_x, A_y, M_A 'richtig' sind, können wir nicht feststellen. Am deutlichsten wird es bei der Kraft A_y. Wenn $F_2 > F_1$, dann wirkt die Kraft A_y tatsächlich wie eingezeichnet. Wenn $F_2 < F_1$, würde A_y ein negatives Ergebnis bekommen. Wir würden daran erkennen, A_y wirkt nicht wie eingezeichnet, sondern umgekehrt.

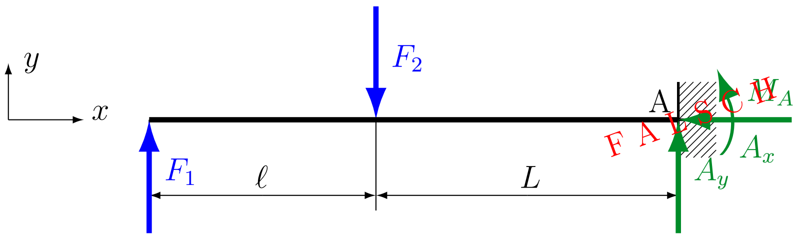
Schlussfolgerung: Wir entwickeln keinen großen Ehrgeiz, Kräfte und Momente 'richtigherum' anzutragen. Wir ärgern uns auch nicht, wenn ein Ergebnis erkennbar negativ ist. Auf gar keinen Fall dürfen wir bei einem negativen Ergebnis nachträglich die Pfeilrichtung ändern. Angenommene Pfeilrichtung und Rechenergebnis gehören untrennbar zusammen.

Noch etwas muss uns klar werden: Ohne ein Schnittbild ist ein Rechenergebnis nicht zu interpretieren. Es gibt daher in der Klausur für wichtige Schnittbilder einen Punkt. Rechenergebnisse, die durchaus richtig sein könnten, sind ohne Schnittbild wertlos, da nicht erkennbar ist, wie die Größen angetragen wurden.

Schnittbilder sind groß und deutlich! Vermeiden Sie Briefmarkenkunst. Versuchen Sie Schnittbilder freihand zu zeichnen. Auf blankem Papier sieht auch eine krakelige Skizze ordentlicher aus, als auf kariertem Papier.

Die Sprache des Ingenieurs ist die Skizze! Manch einer spricht etwas undeutlich. (Hier zu gendern wäre frauenfeindlich, denn die Schnittbilder von Studentinnen/Ingenieurinnen sind fast ausnahmslos klar und deutlich. Strengt Euch an Jungs.)

So etwas ist **kein** Schnittbild. Es ist nicht erkennbar, ob die grünen Lagerreaktionen am Balken oder am Lager wirken. Alle Ergebnisse sind wertlos, da die Vorzeichenlage unklar ist.

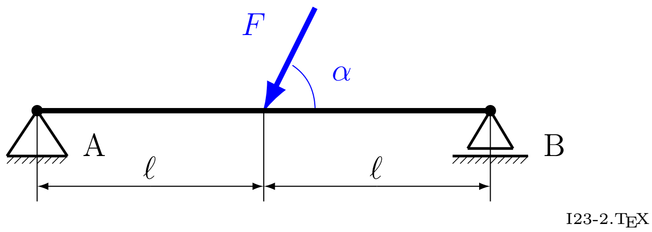


Warum gibt es so selten Zahlenwerte? Ganz einfach, ich möchte, dass Sie keine Zahlenwerte einsetzen. Sie sollen mit Formelzeichen rechnen. Erst ganz zum Schluss, wenn die Gleichungen für die gesuchten Größen stehen, dann können Zahlenwerte eingesetzt werden. So wird klar, wie unbedeutend sie sind, 100 N, 200 N, 2 m, 3 m, alles ganz egal. In der Klausur gibt es Zahlenwerte, das korrigiert sich besser :-). Noch etwas anderes kommt hinzu. Solange Sie mit Formelzeichen rechnen, ist eine Fehlersuche möglich. Wenn Sie frühzeitig Zahlenwerte einsetzen, finden Sie keine Fehler mehr. Weitere Fehler kommen hinzu (Einheiten vergessen). Den Zahlen sieht man schnell nicht mehr an, um welche Größe es sich handelt. 100 N kann heißen 'hundert Newton' oder '100 mal die Normalkraft N'. Nur gedruckt ist ein Unterschied erkennbar (Einheit aufrecht, Formelzeichen *kursiv*). Handschriftlich ist der Unterschied nicht erkennbar. ■

2.4.2 Übungsaufgabe

Eine Brücke wird belastet. Gegeben:

$$F, \quad \ell, \quad \alpha.$$

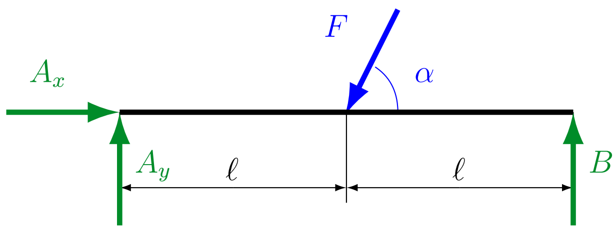


Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A und B.

Die Realität hinter dieser Aufgabe ist ziemlich um die Ecke gedacht. Ein Auto, das von rechts nach links fährt, bremst auf Brückenmitte. So könnte die schiefe Kraft F entstehen. Das wäre allerdings Dynamik. Egal. Wir haben eine Brücke mit schiefer Kraft, ist doch wurscht, warum.

Die Brücke ist regelgerecht gebaut. Links zweiwertig, rechts einwertig gelagert. Eventuelle Wärmeausdehnungen können sich demzufolge ausgleichen, ohne dass die Brücke verspannt wird oder gar ausknickt. So baut man Brücken. Bei Eisenbahnschienen wird anders vorgegangen. Über viele Kilometer bilden die verschweißten Schienenprofile ein Kontinuum, das auf den Schwellen oder der festen Fahrbahn festgehalten wird. Im Sommer werden die Schienen gestaucht, im Winter gedehnt. Ein Ausgleich ist nicht möglich. Diese Gedanken über Spannungen und Dehnungen gehören schon zur Elastostatik (TMII), det kriejen wa späta.

Freischneiden



KG u. MG.

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x - F \cos\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A_y + B - F \sin\alpha$$

$$(3) \qquad \sum M_{[A]} \equiv 0 = -F \sin\alpha \cdot \ell + B \cdot 2\,\ell$$

(1) $\rightarrow A_x$, (3) $\rightarrow B$, B in (2) $\rightarrow A_y$.

$$A_x = F\,\cos\alpha$$

$$B\cdot 2\,\ell = F\,\sin\alpha\cdot\ell$$

$$B = \frac{F\,\sin\alpha\cdot\ell}{2\,\ell}$$

$$B = \frac{F\,\sin\alpha}{2}$$

$$A_y = F\,\sin\alpha - B$$

$$A_y = F\,\sin\alpha - \frac{F\,\sin\alpha}{2}$$

$$A_y = \frac{F\,\sin\alpha}{2}$$

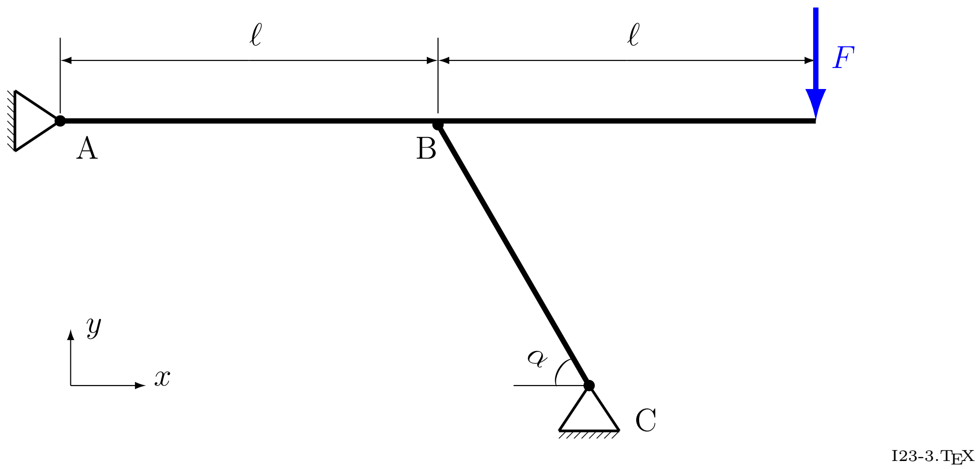
Zufällig kommen alle Lagerreaktionen ohne Minuszeichen daher. Wir haben sie 'richtigherum' angetragen. Schön, dass es so ist, mehr nicht. Jeder einzelne Pfeil hätte auch anders herum eingezeichnet werden können, dann hätte es Minuszeichen gegeben.

Vorsicht beim Kürzen von $\frac{\ell}{2\ell}$. Wer ist reingefallen? Wer mit $\frac{1}{\ell}$ weiterrechnet, macht einen sehr teuren Fehler. Er oder sie würde behaupten, manche Kräfte haben die Einheit Newton pro Meter. Das ist nicht ein bisschen falsch, das ist grottenfalsch.

2.4.3 Übungsaufgabe

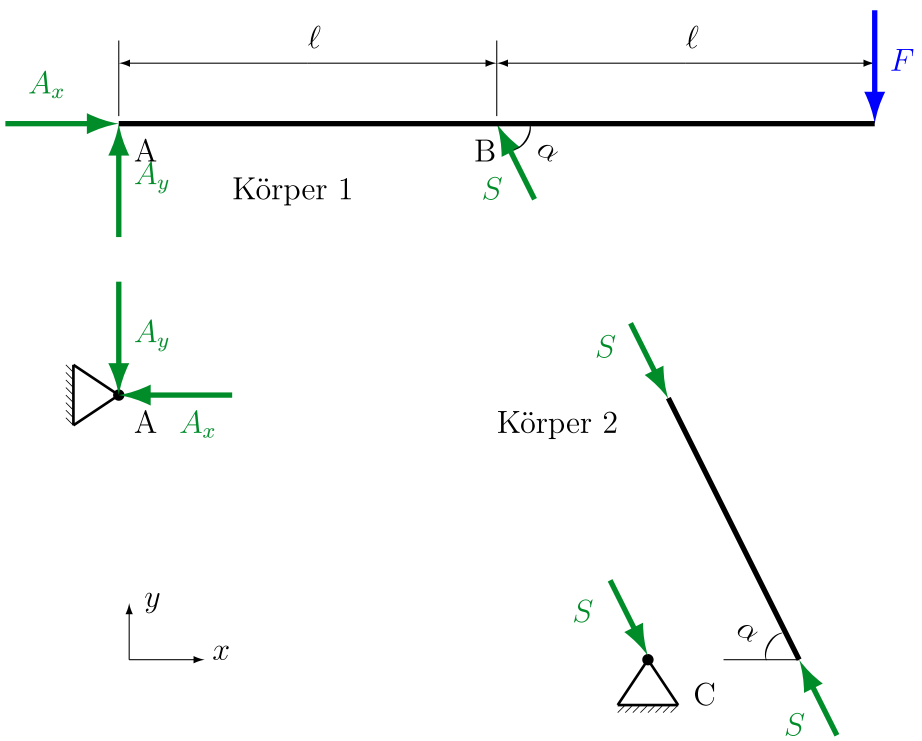
Ein Tragwerk wird mit der Kraft F belastet. Gegeben:

$$F = 20\,\text{kN}, \quad \ell = 2\,\text{m}, \quad \alpha = 60^o.$$



Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A und C, Stabkraft S im Stab BC.

Freischneiden bei A, B und C. Hierbei erkennen wir die Pendelstütze zwischen den Lagern B und C.



Wiederholung: Pendelstützen sind beidseitig gelenkig gelagerte Stäbe, die selbst unbelastet sind. Sie werden freigeschnitten und durch Kräfte in Stablängsrichtung ersetzt. Am Stab selbst wirken beidseitig entweder Druckkräfte, wie hier oder beidseitig Zugkräfte. Zur Verdeutlichung des Newtonschen Gegenwirkungsprinzips werden hier die abgeschnittenen Lager dargestellt. Sie können gerne weggelassen werden.

Den Winkel α müssen wir noch von der Lage am Lager C an die Position B übertragen (Wechselwinkel an parallelen Linien).

KG u. MG an Körper 1

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x - S\,\cos\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A_y + S\,\sin\alpha - F$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{B}]} \equiv 0 = -A_y\,\ell - F\,\ell$$

Den Kraftangriffspunkt einer schiefen Kraft als Momentenbezugspunkt zu wählen, ist ein starker Zauber. Das erspart uns hier Gemurkel mit Winkelfunktionen im MG. A_x hat auch bezüglich B keinen Hebelarm. Wer es nicht glaubt, verschiebe A_x entlang der Wirkungslinie. Wer routinemäßig A als Bezugspunkt wählt, kommt auf das selbe Ergebnis. Probieren Sie es aus.

$(3) \to A_y, \qquad A_y \text{ in } (2) \to S, \qquad S \text{ in } (1) \to A_x.$

$$(3) \qquad A_y = -F$$

$$A_y = -20\ \mathrm{kN}$$

$$(2) \qquad S\,\sin\alpha = F - A_y$$

$$S\,\sin\alpha = 2\,F$$

$$S = \frac{2\,F}{\sin\alpha}$$

$$S = 46{,}2\ \mathrm{kN}$$

$$(1) \qquad A_x = S\,\cos\alpha$$

$$A_x = \frac{2\,F}{\sin\alpha}\,\cos\alpha = \frac{2\,F}{\tan\alpha}$$

$$A_x = 23{,}1\ \mathrm{kN}$$

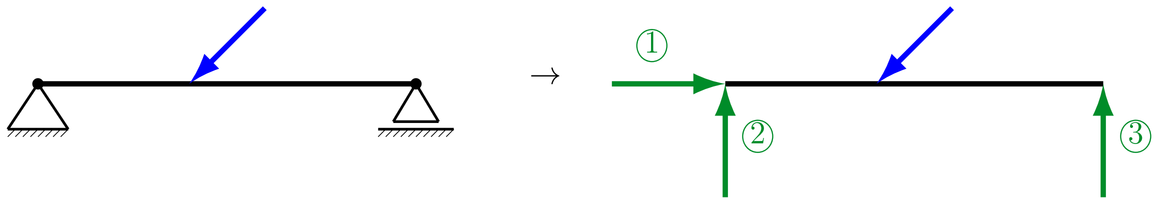
Das Erkennen von Pendelstützen ist von entscheidender Bedeutung. Auch in der Klausur. Wer reflexartig am Lagerort C zwei Kräfte gemäß Lagerzettel anträgt, muss unter erschwerten Bedingungen (nicht angepasstes Koordinatensystem) die Eigenschaften von Pendelstützen erneut herleiten. Also Augen auf beim Erfassen von TM-Aufgaben.

2.5 Statisch bestimmte und unbestimmte Lagerung

Haben Sie sich schon gewundert, dass wir immer gerade so viele Gleichungen haben, wie 'Wertigkeiten', also Anzahl der Lagerreaktionen? Das liegt daran dass wir immer eine statisch bestimmte Lagerung hatten.

statisch bestimmt: Berechenbarkeit von Lagerreaktionen allein durch Gleichgewichtsbedingungen.
oder
Zahl der Lagerreaktionen = Zahl der Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen).

Beispiel

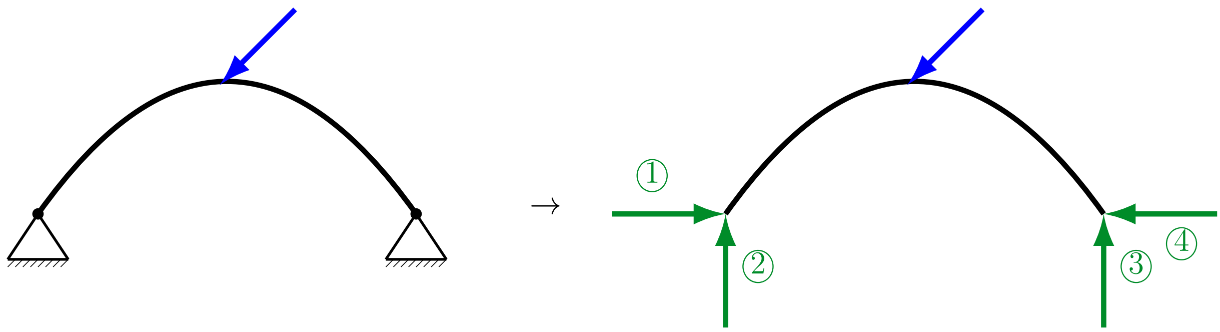


$$\sum X \equiv 0, \qquad \sum Y \equiv 0, \qquad \sum M_{[\ ]} \equiv 0$$

Drei Gleichungen liefern drei Lagerreaktionen

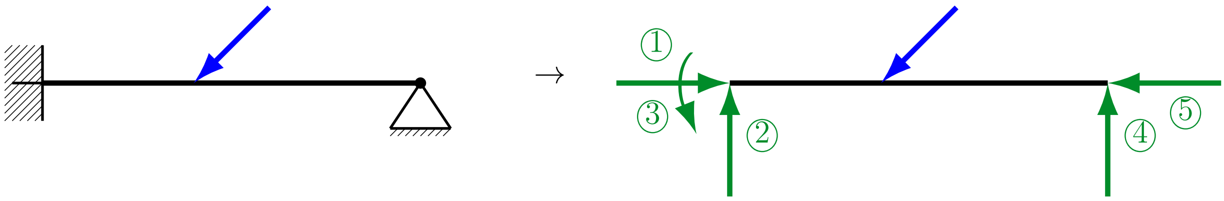
statisch unbestimmt: Zahl der Lagerreaktionen > Zahl der Gleichungen.

Beispiel 1



Vier Lagerreaktionen, drei Gleichungen → einfach statisch unbestimmt.

Beispiel 2



Fünf zu drei → zweifach statisch unbestimmt.

Eine Berechnung mit den Gesetzen der Statik ist **nicht** möglich. Die Verformung der Tragwerke muss berücksichtigt werden. Das ist Thema der Festigkeitslehre.

Moment! Sagt da die eine oder der andere. Wir können doch weitere Gleichungen generieren. Wir nehmen einen weiteren Bezugspunkt und schreiben ein weiteres Momentengleichgewicht an und schon haben wir eine vierte Gleichung – 4:4, Ausgleich in der Nachspielzeit. Nutzt nichts. Diese vierte Gleichung kann mit Hilfe der anderen dreien hergeleitet werden. Die vierte Gleichung ist linear abhängig und liefert keine zusätzliche Erkenntnis, der Schiri pfeift Abseits. Es bleibt dabei, wir kommen nicht weiter.

Wir müssen nur in der Lage sein, statische Unbestimmtheit zu erkennen. Ein Schnittbild zu zeichnen und den Spielstand zu erfassen ist natürlich eine Möglichkeit. Ich möchte Ihnen noch eine schnelle, extrem unwissenschaftliche Methode verraten. Sie heißt 'Rackeln an den Schraffuren'.

Beispiel 1, linkes Bild. Sie fassen eines der beiden Lager an der Schraffur und

1. bewegen es auf und ab → geht, denn Punkte sind Gelenke,
2. drehen es um den Lagerungspunkt → geht, dito,
3. bewegen es nach links und rechts → geht nicht, das verbiegt den Bogen.

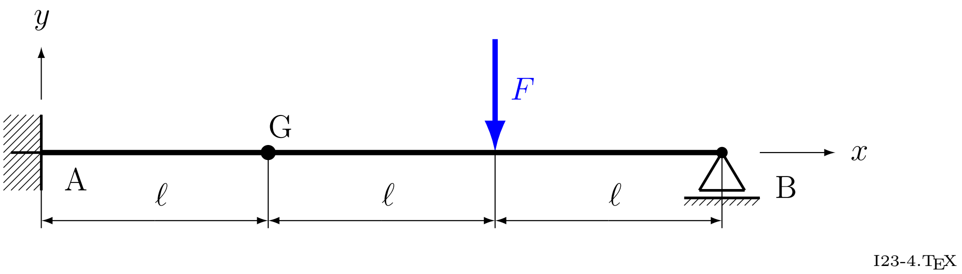
Daher einfach statisch unbestimmt. Versuchen Sie diese gedankliche Spielerei an den anderen Beispielen. Rackeln Sie immer am höchstwertigen Lager. Immer dann, wenn Ihr Rackeln zu einer Verformung führt (Biegung oder Dehnung/Stauchung), liegt eine statische Unbestimmtheit vor.

Ein anderer Gedanke ist die Montierbarkeit. Eine statisch bestimmte Lagerung ist ohne vorherige Justierung montierbar (des passt scho). Bei statischer Unbestimmtheit muss der Lagerabstand (Beispiel 1) oder der Lagerabstand und die Lagerhöhe (Beispiel 2) genau stimmen.

2.4.4 Übungsaufgabe

Ein Tragwerk besteht aus zwei gelenkig verbundenen Balken, es wird mit der Kraft F belastet. Gegeben:

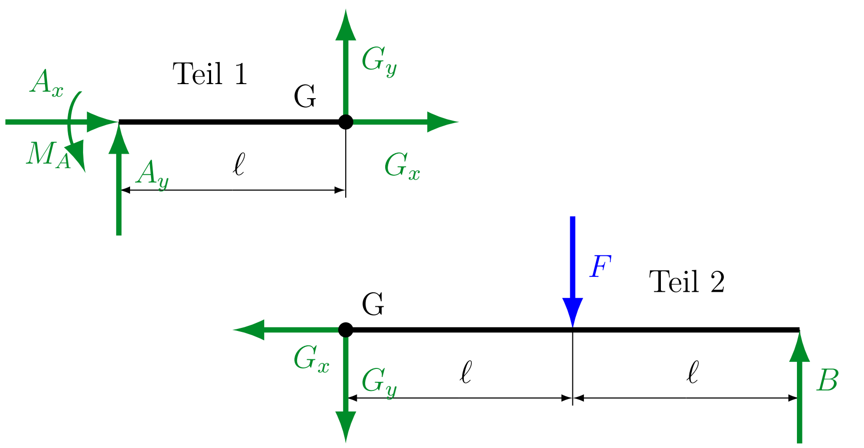
$$F, \qquad \ell.$$



Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A und B, Kräfte im Gelenk G.

Auf den ersten Blick könnte man ein statisch unbestimmtes Problem vermuten. Die Anordnung ist links dreiwertig und rechts einwertig gelagert. Für diese vier Lagerreaktionen scheinen die Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichend zu sein. Der Schein trügt. Lindernd wirkt das Gelenk G. Rackeln Sie spaßenshalber an Lager A.

Wir schneiden die Lager A und B sowie das Gelenk G.



Ein kurzer Zählappell liefert sechs unbekannte Größen. Da wir zwei unabhängige, vollständig freigeschnittene Teile haben, bekommen wir sechs Gleichungen. Ein Mathematiker würde sagen: „Das Problem ist lösbar“ und sich anderen Aufgaben zuwenden. Wir machen Mechanik und werden das Problem tatsächlich lösen.

Wer gerne systematisch arbeitet, trägt Schnittkräfte und -momente häufig wie hier an: Am zuerst betrachteten Schnittufer werden alle Schnittgrößen in positiver Richtung angetragen. Das gilt für A_x, A_y, M_A, G_x, G_y an Teil 1. Bei Teil 2 sind wir bezüglich

G_x, G_y wegen des Gegenwirkungsprinzips festgelegt. Bei B gilt die Vorgehensweise wieder. Die (fast) einheitliche Vorzeichenlage in den Kräftegleichgewichten erleichtert die Fehlersuche. Kann man machen, muss man nicht.

KG u. MG Teil 1

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x + G_x$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A_y + G_y$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = M_A + G_y\,\ell$$

KG u. MG Teil 2

$$(4) \qquad \sum X \equiv 0 = -G_x$$

$$(5) \qquad \sum Y \equiv 0 = -G_y - F + B$$

$$(6) \qquad \sum M_{[\mathrm{G}]} \equiv 0 = -F\,\ell + B \cdot 2\ell$$

$$\begin{array}{lll} (4) \rightarrow G_x, & (6) \rightarrow B, & G_x \text{ in } (1) \rightarrow A_x, \\ B \text{ in } (5) \rightarrow G_y, & G_y \text{ in } (2) \rightarrow A_y, & G_y \text{ in } (3) \rightarrow M_A. \end{array}$$

Bei sechs Gleichungen und sechs Unbekannten ist das Aufstellen einer Strategie sehr gut investierte Zeit. Sie müssen auf jeden Fall diese Aufgabe (und alle anderen) komplett selbst lösen können, inklusive Aufstellen einer Strategie. Nicht nur die vorgekaute Lösung nachvollziehen. Natürlich bemühe ich mich, die Lösung möglichst einleuchtend darzustellen. Das wiegt Sie aber in falscher Sicherheit (Ey voll easy das Ganze). Musterlösung weg, selber machen, spätestens beim zweiten Mal!

$$(4) \qquad \underline{G_x = 0}$$

$$(6) \qquad B \cdot 2\ell = F\,\ell$$

$$B = F\frac{\ell}{2\ell}$$

$$\underline{B = \frac{F}{2}}$$

$$(1) \qquad A_x = -G_x$$

$$\underline{A_x = 0}$$

$$(5) \qquad G_y = B - F = \frac{F}{2} - F$$

$$\underline{G_y = -\frac{F}{2}}$$

$$(2) \qquad A_y = -G_y$$

$$\underline{A_y = \frac{F}{2}}$$

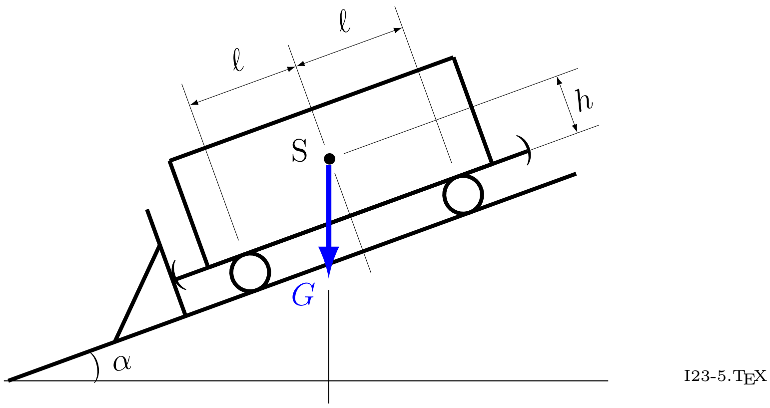
$$(3) \qquad M_A = -G_y\,\ell$$

$$\underline{M_A = \frac{F\,\ell}{2}}.$$

2.4.5 Übungsaufgabe

Ein Güterwagen steht auf einer Rampe an einem gut gefetteten Prellbock. Gegeben:

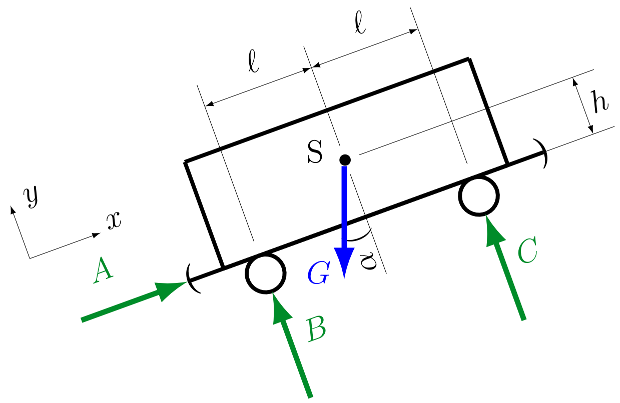
$$G, \quad \ell, \quad h, \quad \alpha.$$



Welche Kräfte wirken auf Räder und Puffer? Hinweis: Die Radbremsen sind gelöst.

Bisher wurde uns über die Lagerungssymbole und den Lagerzettel recht genau gesagt, welche Schnittgrößen wir wie anzutragen haben. Hier liegt nun ein Fall vor, bei dem das nicht unmittelbar klar wird. Stattdessen erfahren wir von Fettschmierereien und Rädern, die nicht festgebremst sind.

Wir schneiden den Wagen von Rampe und Prellbock frei.



Viele Besonderheiten sind zu klären.

1. Wir wählen ein modifiziertes Koordinatensystem, in dem nur wenige Kräfte mit Winkelfunktionen behandelt werden müssen. Hier nur G.

2. Das Fett auf dem Prellbock hat zur Folge, dass in y-Richtung zwischen Puffer und Prellbock keine (nennenswerten) Kräfte entstehen können. Diese schmierige Anordnung entspricht daher einem einwertigen Lager.

3. Frei drehbare Räder entsprechen auch einwertigen Lagern. Warum? Folgender Gedanke hilft. Die Räder können sich drehen, tun es aber nicht (der Wagen steht vor einem Prellbock). Wie können Kräfte am Rad wirken, ohne dass es sich dreht? Zunächst kann die Kraft nur im Radaufstandspunkt wirken. Dann muss die Wirkungslinie durch den Radmittelpunkt gehen. Täte sie das nicht, hätte die Kraft bezüglich Radmittelpunkt einen Hebelarm und das Rad würde sich drehen.

4. Wie wandert der Rampenwinkel α an die Gewichtskraft G? Das Bild der Aufgabenstellung hilft. Wir sehen dort den Winkel α begrenzt von einer horizontalen Linie und der Rampe. Wir brauchen den Winkel α in der Nähe der Kraft G, um sie zu zerlegen. Dazu laufen wir entlang einer Begrenzungslinie, wir beginnen mit der horizontalen Linie. Wir kommen an eine Kreuzung, an der wir links abbiegen können. Nun sind wir auf der Wirkungslinie von G.

   Jetzt laufen wir auf der anderen Begrenzungslinie, der Rampe. Auch dort kommen wir an eine Kreuzung, an der wir links abbiegen. Wir sind auf der mittigen Maßhilfslinie. Somit ist klar, dass dort zwischen Kraft G und Maßhilfslinie der Winkel α liegen muss.

KG u. MG

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A - G \sin\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = B - G \cos\alpha + C$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{S}]} \equiv 0 = A\,h + C\,\ell - B\,\ell$$

Hier trifft uns ein neues Problem. Wir suchen als Momentenbezugspunkt gerne den Punkt mit den meisten unbekannten Kräften aus. Würden wir A wählen, wüssten wir die Hebelarme von B, G, C nicht, da uns der Abstand vom Puffer zur Achse fehlt. Bei den Punkten B und C fehlt uns der Herbelarm der Kraft A, da uns das Maß 'Pufferebene über Schienenoberkante' fehlt. Der Schwerpunkt S ist trefflich bemaßt, er führt jedoch zu einem unangenehmen Gleichungssystem. Es gäbe einen sehr schönen Bezugspunkt, der ein angenehmes Gleichungssystem liefern könnte. Finden Sie ihn?

Wir lösen das obige System auf die harte Tour.

$(1) \to A, \qquad (2) \to B, \qquad A$ und B in $(3) \to C, \qquad C$ in $(2) \to B.$

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad A = G\,\sin\alpha \\
&(2) \qquad B = G\,\cos\alpha - C \\
&(3) \qquad 0 = G\,\sin\alpha\cdot h + C\,\ell - (G\,\cos\alpha - C)\,\ell \\
&\qquad\qquad 2\,C\,\ell = -G\,\sin\alpha\cdot h + G\,\cos\alpha\cdot\ell \\
&\qquad\qquad C = \frac{G}{2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\frac{h}{\ell}\right) \\
&(2) \qquad B = G\,\cos\alpha - \frac{G}{2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\frac{h}{\ell}\right) \\
&\qquad\qquad B = \frac{G}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\frac{h}{\ell}\right)
\end{aligned}
$$

Vorsicht: Der Schnellschuss, dass die Gewichtskraft sich gleichmäßig auf die beiden Achsen verteilt, ist trotz der Symmetrie falsch, wie wir an den Ergebnissen für B und C sehen können. Bei zu großem Winkel α kippt der Wagen sogar aus den Latschen, weil die Kraft C Null oder gar negativ wird. Kriegen Sie ihn raus?

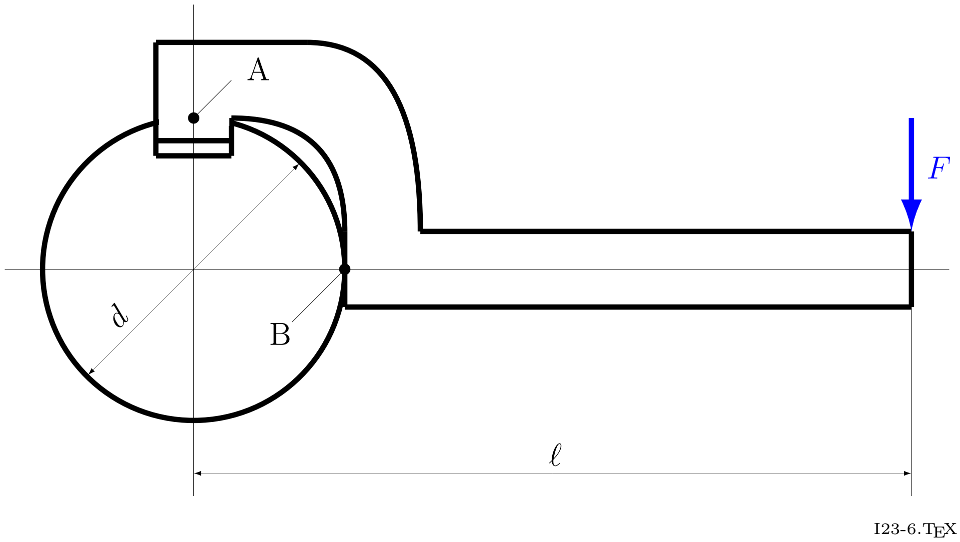
$$\text{Kippen bei} \qquad \alpha > \arctan\frac{\ell}{h}$$

∎

2.4.6 Übungsaufgabe

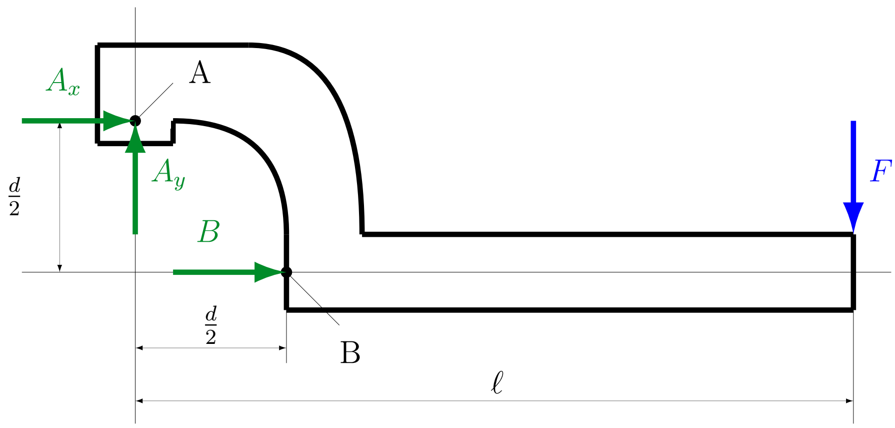
Mit einem Hakenschlüssel soll das Moment $F\,\ell$ erzeugt werden. Gegeben:

$$F, \quad \ell, \quad d.$$



Welche Reaktionskräfte wirken an den Punkten A und B? Die Breite des Hakens sei beliebig klein, weshalb vereinfachend der Punkt A als Kraftangriffspunkt anzusehen ist.

Freischneiden des Hakenschlüssels



Auch hier muss die Wertigkeit der Lagerungs- oder Berührstellen selbst gefunden werden. Beim Punkt B fehlt der Hinweis auf Schmierstoff, wie beim Eisenbahwagen, trotzdem sind die Verhältnisse auch hier mit einem einwertigen Lager verleichbar.

KG u. MG

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x + B$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A_y - F$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = B\,\frac{d}{2} - F\,\ell$$

$(2) \rightarrow A_y,$ $\quad (3) \rightarrow B,$ $\quad B$ in $(1) \rightarrow A_x.$

$$(2) \qquad A_y = F$$

$$(3) \qquad B = F\,\frac{2\ell}{d}$$

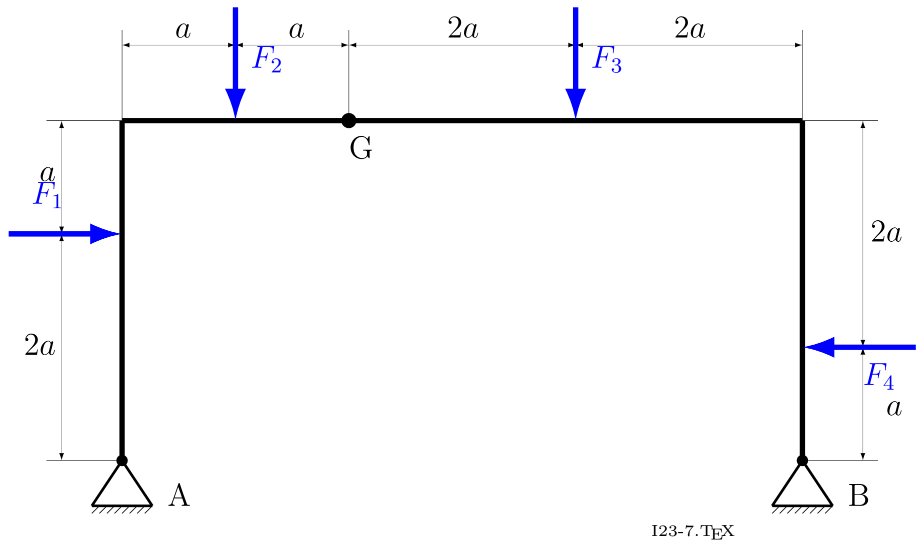
$$(1) \qquad A_x = -B$$

$$A_x = -F\,\frac{2\ell}{d}$$

2.4.7 Übungsaufgabe

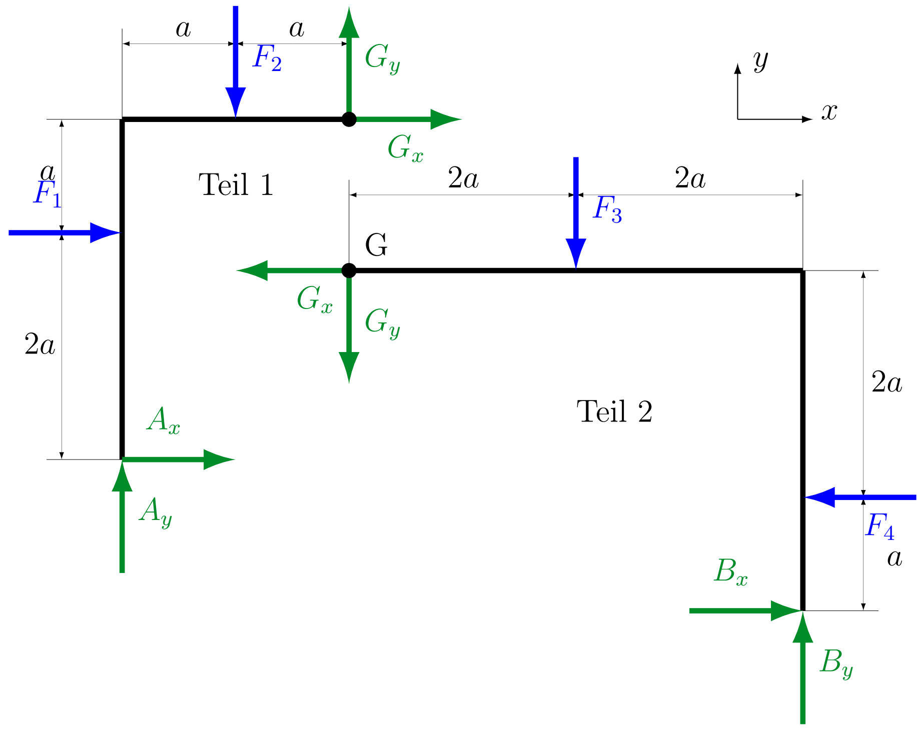
Vier Kräfte wirken auf einen Grubenausbau. Gegeben:

$$F_1 = F_4 = 10\,\mathrm{kN}, \quad F_2 = 30\,\mathrm{kN}, \quad F_3 = 60\,\mathrm{kN}, \quad a = 1\,\mathrm{m}.$$



Gesucht sind die Lagerreaktionen in A und B sowie die Kräfte im Gelenk G

Schneiden der Lager A und B sowie des Gelenks G



KG u. MG Teil 1

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x + F_1 + G_x$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A_y - F_2 + G_y$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = -F_1 \cdot 2a - F_2\, a - G_x \cdot 3a + G_y \cdot 2a$$

KG u. MG Teil 2

$$(4) \qquad \sum X \equiv 0 = -G_x - F_4 + B_x$$

$$(5) \qquad \sum Y \equiv 0 = -G_y - F_3 + B_y$$

$$(6) \qquad \sum M_{[\mathrm{B}]} \equiv 0 = F_4\, a + F_3 \cdot 2a + G_x \cdot 3a + G_y \cdot 4a$$

Strategie: Es gibt keine Gleichung mit nur einer Unbekannten. Also suchen wir, ob es zwei Gleichungen gibt, die zwei gleiche Unbekannte haben. Das Trifft auf die Gleichungen (3) und (6) zu. Man könnte nun Gleichung (3) zu G_x auflösen und das ganze in (6) einsetzen. Ich zeige Ihnen eine andere Variante, indem die Gleichungen (3) und (6) addiert werden.

(3)+(6) $\rightarrow G_y$, G_y in (2) $\rightarrow A_y$, G_y in (5) $\rightarrow B_y$,
G_y in (3) $\rightarrow G_x$, G_x in (1) $\rightarrow A_x$, G_x in (4) $\rightarrow B_x$,

(3) + (6)

$$-F_1 \cdot 2a - F_2\,a - G_x\,\cancel{3a} + G_y \cdot 2a$$
$$+F_4\,a + F_3 \cdot 2a + G_x\,\cancel{3a} + G_y \cdot 4a = 0 \quad | : a$$

$$-2\,F_1 - F_2 + 2\,G_y + F_4 + 2\,F_3 + 4\,G_y = 0$$

$$6\,G_y = 2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3$$

$$G_y = \frac{1}{6}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$\underline{G_y = -13,3 \text{ kN}}$$

(2)

$$A_y = F_2 - G_y$$

$$A_y = \frac{6}{6}\,F_2 - \frac{1}{6}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$A_y = \frac{1}{6}\Big(-2\,F_1 + 5\,F_2 + F_4 + 2\,F_3\Big)$$

$$\underline{A_y = 43,3 \text{ kN}}$$

(5)

$$B_y = F_3 + G_y$$

$$B_y = \frac{6}{6}\,F_3 + \frac{1}{6}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$B_y = \frac{1}{6}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 + 4\,F_3\Big)$$

$$\underline{B_y = 46,7 \text{ kN}}$$

(3)

$$3\,G_x = -2\,F_1 - F_2 + 2\,G_y$$

$$3\,G_x = -2\,F_1 - F_2 + \frac{2}{6}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$G_x = -\frac{2}{3}\,F_1 - \frac{1}{3}\,F_2 + \frac{2}{18}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$G_x = -\frac{6}{9}\,F_1 - \frac{3}{9}\,F_2 + \frac{1}{9}\Big(2\,F_1 + F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$G_x = \frac{1}{9}\Big(-4\,F_1 - 2\,F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$\underline{G_x = -25,6 \text{ kN}}$$

$$(1) \qquad A_x = -F_1 - G_x$$

$$A_x = -F_1 - \frac{1}{9}\Big(-4\,F_1 - 2\,F_2 - F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$A_x = -\frac{9}{9}\,F_1 + \frac{1}{9}\Big(4\,F_1 + 2\,F_2 + F_4 + 2\,F_3\Big)$$

$$A_x = \frac{1}{9}\Big(-5\,F_1 + 2\,F_2 + F_4 + 2\,F_3\Big)$$

$$\underline{A_x = 15,6\ \mathrm{kN}}$$

$$(4) \qquad B_x = F_4 + G_x$$

$$B_x = \frac{1}{9}\Big(-4\,F_1 - 2\,F_2 + 8\,F_4 - 2\,F_3\Big)$$

$$\underline{B_x = -15,6\ \mathrm{kN}}$$

Wer sich durch diesen Wust trittsicher bewegen kann, braucht die Klausur nicht zu fürchten. Für eine Klausur wäre diese Aufgabe zu umfangreich. Wer dann noch die Winkelfunktionen beherrscht, kann sich entspannt zurücklehnen.

2.6 Räumliches Kräftesystem

Übertragung und Erweiterung der bisherigen Erkenntnisse auf die Wirkung von Kräften auf den starren Körper im dreidimensionalen Raum. Hierzu sind weitere Sätze über Kräftepaare (=Momente) im Raum notwendig.

Sätze (Beweise weggelassen)

a) Kräftepaare von gleichem Moment sind in parallelen Ebenen gleichwertig. D.h. der Momentenvektor darf beliebig parallel und in Längsrichtung verschoben werden.

b) Die Zusammensetzung von Kräftepaaren in sich schneidenden Ebenen erfolgt wegen des Vektorcharakters der zugehörigen Momente entsprechend der Vektoraddition der Momentenvektoren.

c) Eine Kraft $\vec{F}$ mit Angriffspunkt A_1 ($\vec{F}[\mathrm{A}_1]$) ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned} &\text{einer Kraft } \vec{F} \text{ im Punkt } \mathrm{A}_2,\ \vec{F}[\mathrm{A}_2] \\ &\text{und} \\ &\text{einem Momentenvektor } \ \vec{M}[\mathrm{A}_2] = \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned} \tag{I.12}$$

mit

$\vec{r}$: Ortsvektor von A_2 nach A_1,

$\vec{M}$: Moment von $\vec{F}$ um A_2.

Demzufolge ergibt die räumliche Zusammenfassung von N Kräften $\vec{F}_i$ $(i = 1 \ \dots \ N)$ in einem beliebigen Punkt 0:

- einen resultierenden Kraftvektor $\quad \vec{R}[0] = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

  und

- einen resultierenden Momentenvektor $\quad \vec{M}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i[0] = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i.$

Wobei $\vec{r}_{0i}$ der Ortsvektor vom Bezugspunkt 0 zum jeweiligen Kraftangriffspunkt der i-ten Kraft $\vec{F}_i$ ist.

Warum fehlt bei $\vec{M}_R$ der Hinweis auf den Bezugspunkt 0, wie er noch bei den Einzelmomenten $\vec{M}_i[0]$ angegeben wird? Ganz einfch: Satz a) besagt, dass ein Momentenvektor beliebig parallel und längs verschoben werden darf. Nur bei Kräftepaaren ist der Bezugspunkt von Bedeutung. Sobald das Moment berechnet ist (Kreuzprodukt oder Kraft mal Hebelarm im ebenen Fall), darf der Momentenvektor beliebig verschoben werden. Ein Hinweis auf den Bezugspunkt ist überflüssig

Gleichgewichtsbedingung

Ein System von N räumlichen Kräften am starren Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn gilt

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \equiv \vec{0}$$
$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i \equiv \vec{0} \tag{I.13}$$

Bezüglich des Momentenvektors gilt demzufolge

$$\vec{M}_R = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Die Indizes der Momentkomponenten bezeichnen nun die Achse um die die Momentkomponente dreht.

M_x: Moment um die x-Achse,

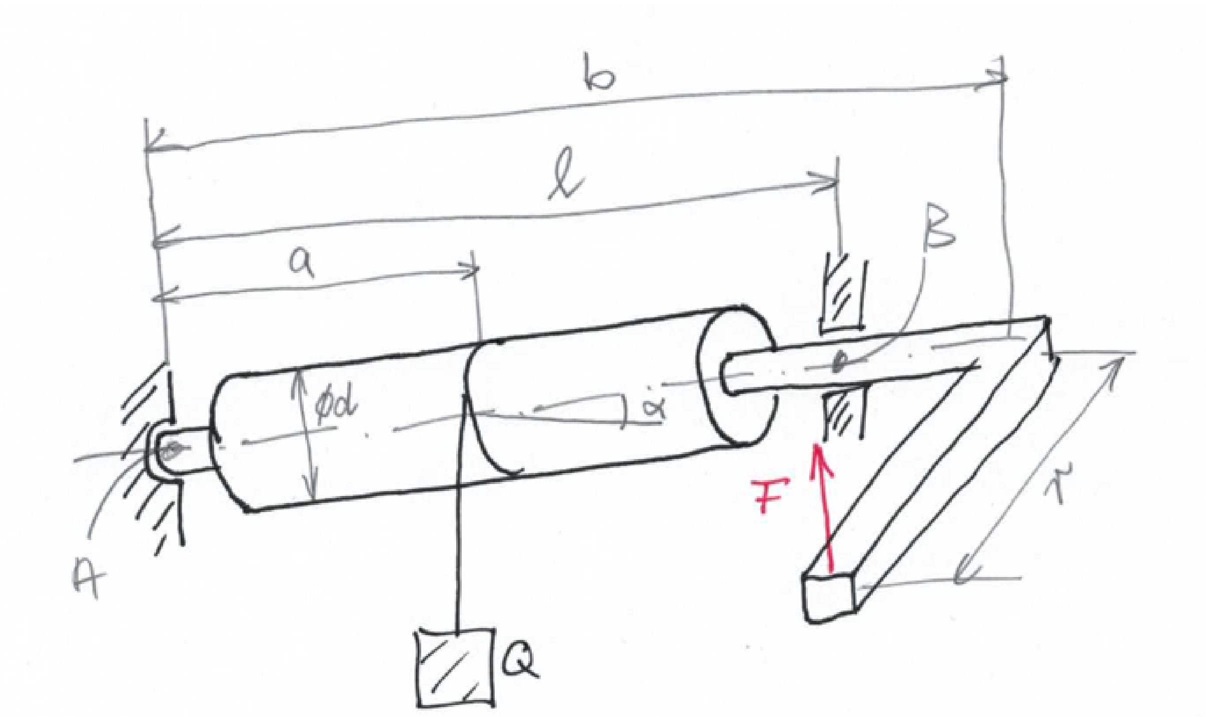
M_y: Moment um die y-Achse,

M_z: Moment um die z-Achse.

Bei allen Komponenten kann gemäß Satz a) ergänzt werden 'oder eine Parallele dazu'.

Beispiel

Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf ein räumliches Kräftesystem.

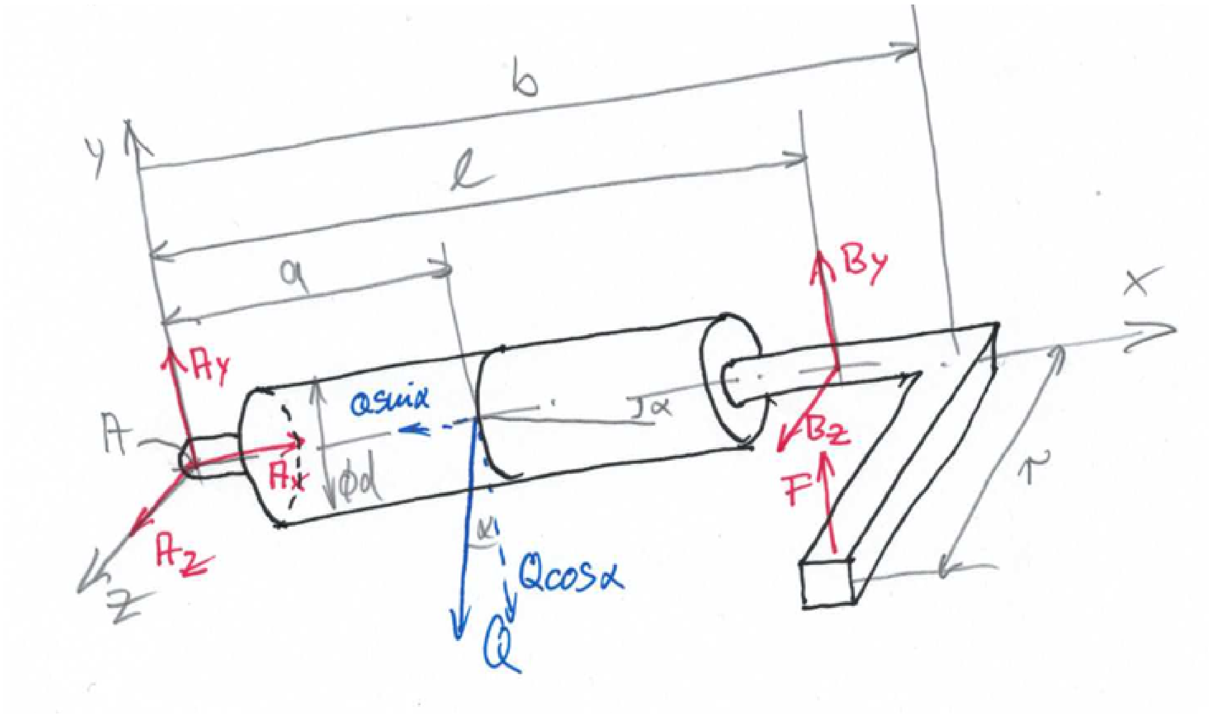


Gegeben: Q, α, alle Abmessungen, gesucht: F, alle Lagerreaktionen.

Dieses Beispiel ist nun sehr schlicht. Es könnte der Haspel an einem Brunnen sein, um mit einem Gemäß Wasser nach oben zu schöpfen. Der gefüllte Eimer erzeuge die Gewichtskraft Q. Erschwerend kommt hinzu, dass die Anordnung nicht horizontal in die Brunnenausmauerung eingefügt wurde, sondern um den Winkel α geneigt, so dass der Zapfen bei A nicht aus dem Mauerwerk rutscht.

Wenn Sie demnächst einen Getriebebeleg anfertigen müssen, so kann dieser Brunnenhaspel auf eine Getriebewelle umgestrickt werden. Dort, wo die Leine aufgewickelt wird, befindet sich ein schrägverzahntes Zahnrad mit Durchmesser d. Dort wo die Kraft F an der Kurbel angreift, befindet sich ein weiteres Zahnrad mit Radius r. Da die Kraft F senkrecht zur Welle wirken soll, wäre dieses Zahnrad geradverzahnt. Das Kurbelende mit der Kraft F entspräche dem Zahn, der sich gerade im Eingriff befindet.

Freischneiden und Anbringen von Lagerreaktionen.



Rot ist das neue Grün:-)

Das Lager A entspricht einem Festlager. Rillenkugellager, Pendelrollenlager oder Kegelrollenlager werden üblicherweise durch drei Kraftkomponenten ersetzt. Rillenkugellager können in sehr begrenztem Maße auch Momente (hier um die y- und z-Achse) übertragen. So etwas gilt jedoch als Misshandlung des Lagers, weshalb diese Lagerreaktionen erst gar nicht erwogen oder eingezeichnet werden. Bei unserem Zapfen im Mauerwerk ist es ohnehin klar, dass Momente nicht übertragen werden können.

Das Lager B entspricht einem Loslager. Das kann ein Rillenkugellager oder ein Pendelrollenlager sein, dessen Außenring axial im Getriebegehäuse verschiebbar ist. Es kann auch ein Zylinderrollenlager oder ein Nadellager sein, welches per se einen Längsausgleich ermöglicht.

Sollten Ihnen diese Begrifflichkeiten noch nicht viel sagen, so ist das nicht weiter schlimm. Die Lagertypen lernen Sie in Maschinenelemente kennen.

Aufstellen der Ortsvektoren und der Kraftvektoren

Wir wählen als Bezugspunkt den Punkt A.

Ortsvektoren

$$\vec{r}_{\mathrm{AA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ d/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{\mathrm{AF}} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Kraftvektoren

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} -Q\sin\alpha \\ -Q\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bei den Lagerkräften A und B haben wir im Schnittbild alle Komponenten in positiver Koordinatenrichtung eingezeichnet. Diese Vorgehensweise erleichtert das Aufstellen der Gleichungen ungemein. Das kann man machen, das muss man nicht machen. Es hilft aber Fehler zu vermeiden. Bei den Kräften Q und F waren wir durch die Problemstellung festgelegt.

Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

Kräftegleichgewicht

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = A_x - Q\sin\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = A_y + B_y - Q\cos\alpha + F$$

$$(3) \qquad \sum Z \equiv 0 = A_z + B_z$$

Zunächst Berechnung der Einzelmomente mittels Kreuzprodukt bezogen auf Punkt A.

$$\vec{r}_{\mathrm{AA}} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{\mathrm{AB}} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_z\,\ell \\ +B_y\,\ell \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{\mathrm{AQ}} \times \vec{Q} = \begin{pmatrix} +Q\cos\alpha \cdot \frac{d}{2} \\ -Q\sin\alpha \cdot \frac{d}{2} \\ -Q\cos\alpha \cdot a \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{\mathrm{AF}} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -F\,r \\ 0 \\ +F\,b \end{pmatrix}.$$

Momentengleichgewicht bezüglich Punkt A. Die Momentenvektoren werden komponentenweise aufsummiert.

$$(4) \qquad M_x \equiv 0 = Q \cos\alpha \cdot \frac{d}{2} - F\, r$$

$$(5) \qquad M_y \equiv 0 = -B_z\, \ell - Q \sin\alpha \cdot \frac{d}{2}$$

$$(6) \qquad M_z \equiv 0 = B_y\, \ell - Q \cos\alpha \cdot a + F\, b$$

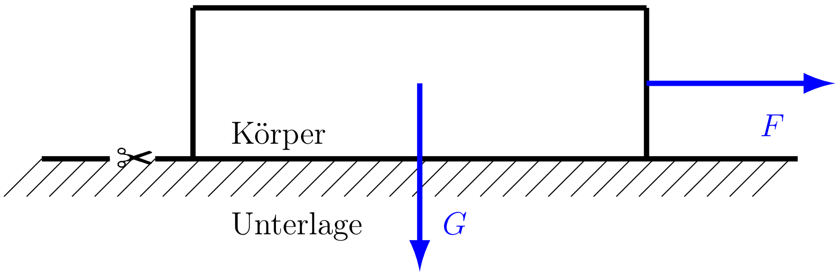
Im räumlichen Fall können sechs Gleichungen aufgestellt werden, die sechs Unbekannte bestimmen können. Sie lauten: $A_x,\ A_y,\ A_z,\ B_x,\ B_y,\ F$.

Sie sollten dieses Gleichungssystem aus Übungsgründen selbst lösen. ■

3 Grundlagen der trockenen Reibung, Coulombsche Reibung

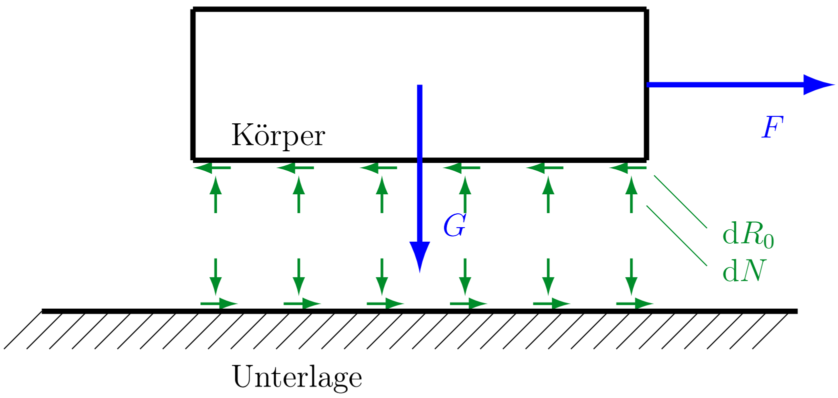
3.1 Haftreibung (Reibung des Ruhezustands)

Beobachtung



Sofern F einen bestimmten Wert nicht überschreitet, erfolgt keine Bewegung zwischen Körper und Unterlage.

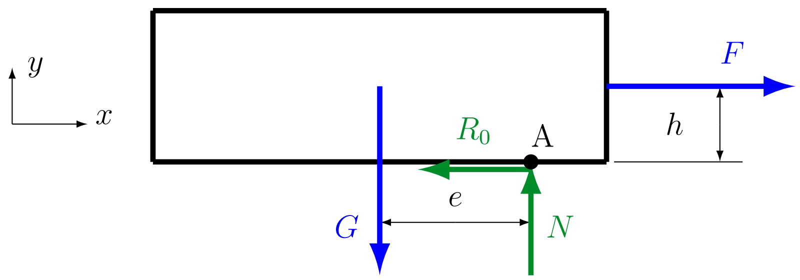
Wir schlussfolgern eine Kraft(-verteilung) in der Berührfläche, die der Kraft F entgegenwirkt. Wir nennen sie Reibungskraft. Wir schneiden den Körper von der Unterlage frei um die Reibungskraft zu ermitteln.



Wir sehen eine Verteilung von unendlich vielen, infinitesimal kleinen oder differentiellen Normalkräften $\mathrm{d}N$. Zu ihnen gesellen sich ebensolche differentiellen Haftreibungskräfte $\mathrm{d}R_0$.

Zur Namensgebung: Normalkräfte N oder $\mathrm{d}N$ heißen so, weil sie normal d.h. senkrecht auf einer Fläche stehen. Die Haftreibungskräfte R_0 oder $\mathrm{d}R_0$ sind '**R**eibungskräfte bei **null** Geschwindigkeit'.

Die beiden Kräfteverteilungen dN und dR_0 werden jeweils zu einer resultierenden Kraft N und R_0 zusammengefasst. Zunächst wissen wir nicht, wo der Kraftangriffspunkt der beiden Kräfte sein wird.



Den Punkt A mit dem Maß e haben wir willkürlich festgelegt.

KG u. MG.

$$\sum X \equiv 0 = F - R_0$$

$$\sum Y \equiv 0 = N - G$$

$$\sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = G\,e - F\,h$$

Die unbekannten Größen R_0, N und e können so berechnet werden. Was wir auf diese Art nicht klären können, ist die Frage, wie groß die Reibkraft R_0 maximal werden kann.

Bei der trockenen oder Coulombschen Reibung ist die maximal mögliche Haftreibungskraft R_0 abhängig von

- der Materialpaarung,
- der Normalkraft N.

Dagegen nicht von der Berührungsfläche.

Autofans, die alles Geld in die breiten Puschen ihrer Karre gesteckt haben, müssen jetzt ganz tapfer sein. Jedoch, bei Rennreifen gibt es neben dem hier behandelten Effekt noch einen weiteren zu berücksichtigen. Ab einer bestimmten Temperatur beginnen spezielle Gummimischungen auf der Fahrbahnoberfläche zu kleben. Dieser Effekt ist flächenabhängig, weshalb Rennwagen sehr breite Reifen haben. Um das von Anfang an nutzen zu können, starten sie mit vorgeheizten Rädern.

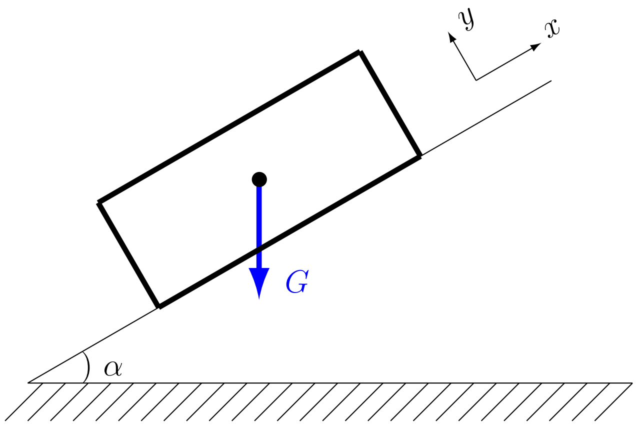
Die Richtung von R_0 wirkt entgegengesetzt der angestrebten Bewegung. Vorzeichenrichtiger Ansatz beim Freischneiden ist wichtig.

$$|\vec{R}_0| < \mu_0\,|\vec{N}| \qquad \text{oder} \qquad R_0 < \mu_0\,N \tag{I.14}$$

Diese Ungleichung wird Haftbedingung genannt, mit μ_0: Haftreibungszahl, die Materialabhängig ist und experimentell ermittelt werden muss. Gleichung I.14 auf der vorherigen Seite ist keine zusätzliche Bestimmungsgleichung. Wir können nur kontrollieren, ob tatsächlich Haftreibung besteht, der Körper also nicht ins Rutschen kommt.

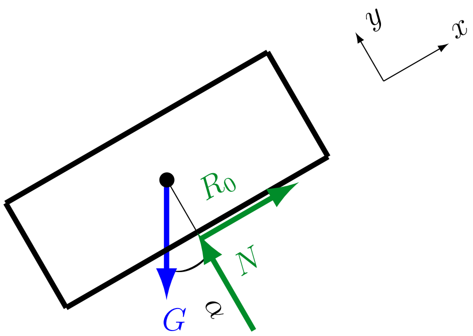
Beim Thema Reibung müssen wir uns vorübergehend von einem liebgewonnen Prinzip verabschieden. Wir müssen die Schnittkräfte R_0 und N richtig herum antragen. Bei der Normalkraft N ist das ganz einfach, die Pfeilspitze zeigt immer auf die Reiboberfläche. Bei der Reibkraft R_0 müssen wir herausfinden, in welche Richtung ein Körper rutschen könnte. Entgegen dieser Richtung muss R_0 am Körper wirken.

Beispiel



Bis zu welchem Winkel α herrscht Ruhe?

Freischneiden



Auf folgendes müssen wir achten:

1. Die Normalkraft N zeigt mit der Spitze auf die Oberfläche des Körpers.
2. Der Körper könnte den Hang hinabrutschen. Die Reibkraft R_0 verhindert das, indem sie der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.
3. Der Kraftangriffspunkt von N und R_0 ist unerheblich. Wir haben ihn so gewählt, dass uns das Einzeichnen des Winkels α gut gelingt.
4. Den Rampenwinkel α haben wir wie beim Eisenbahnwagen in Übungsaufgabe 2.4.5 auf Seite 66 durch 'zwei mal links abbiegen' als den Winkel identifiziert, der zwischen den Kräften G und N liegt.

Kräftegleichgewicht

$$\sum X \equiv 0 = R_0 - G\,\sin\alpha$$

$$\sum Y \equiv 0 = N - G\,\cos\alpha$$

Mit dem Momentengleichgewicht könnten wir die Lage des Kraftangriffspunkt von N und R_0 berechnen, wenn die Schwerpunkthöhe bekannt wäre. Diese Information ist unerheblich, so dass wir bei Reibung bis auf weiteres auf das Momentengleichgewicht verzichten.

$$R_0 = G\,\sin\alpha$$

$$N = G\,\cos\alpha$$

Nun wenden wir die Haftbedingung I.14 auf Seite 82 an.

$$R_0 < \mu_0\,N$$

$$G\,\sin\alpha < \mu_0\,G\,\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < \mu_0$$

$$\mu_0 > \tan\alpha$$

Mit diesem Versuch 'Klotz auf Rampe' kann sehr einfach die Haftreibungszahl μ_0 bestimmt werden. Sie benötigen nur ein Brett und einen Klotz (Masse egal). Legen Sie den Klotz auf das Brett, heben das Brett an einem Ende langsam an, bis der Klotz zu rutschen anfängt. In dem Moment bestimmen Sie den Neigungswinkel α. Probieren Sie es mit den unterschiedlichsten Materialien aus.

Materialpaarung	μ_0
Stahl-Stahl	0,15
Stahl-Holz	0,5
Gummi-Asphalt	0,55 ... 1,0
Stahl-PTFE	0,04

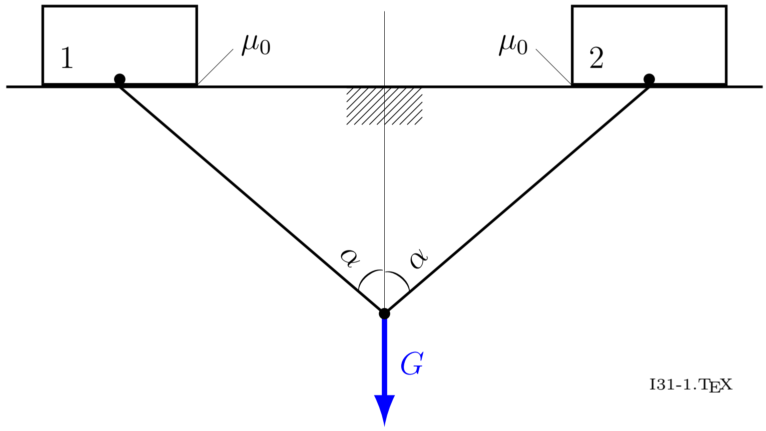
Teflon oder Polytetrafluorethylen (PTFE) ist neben einer Bratpfannenbeschichtung auch ein sehr guter Festschmierstoff. In der Raumfahrt, im Hochvakuum des Weltraums können Gelenke nicht mit Ölen oder Fetten geschmiert werden. Diese Fluide würden sofort verdampfen. Mangels Luftsauerstoff würde es noch nicht einmal Oxidschichten geben, die häufig eine geringere Haftreibung aufweisen, als die Grundwerkstoffe. Ohne Teflon könnte kein Sonnenkollektor an einem Satelliten ausgeklappt werden, nichts könnte sich bewegen. Insofern stimmt die Legende, dass Teflon für die Raumfahrt erfunden wurde und in der Bratpfanne gelandet ist. Nicht nur dort. Die Klimamembranen in Segelklamotten und Stiefeln (z.B. Gore-Tex) bestehen aus gereckten Teflonfolien. Teflon ist zunächst ein recht unbedenklicher Werkstoff. Abgeschabte Pfannenbeschichtung, die verschluckt wird, ist unbedenklich. Jedoch darf Teflon nicht verbrannt werden. Beim Verbrennen können Dioxine und Furane entstehen, die hochgiftig sind. Teflonmüll ist Sondermüll!

■

3.1.1 Übungsaufgabe

Wie groß muss μ_0 mindestens sein, damit Gleichgewicht herrscht? Gegeben:

$$\alpha, \quad G: \text{ beliebig.}$$

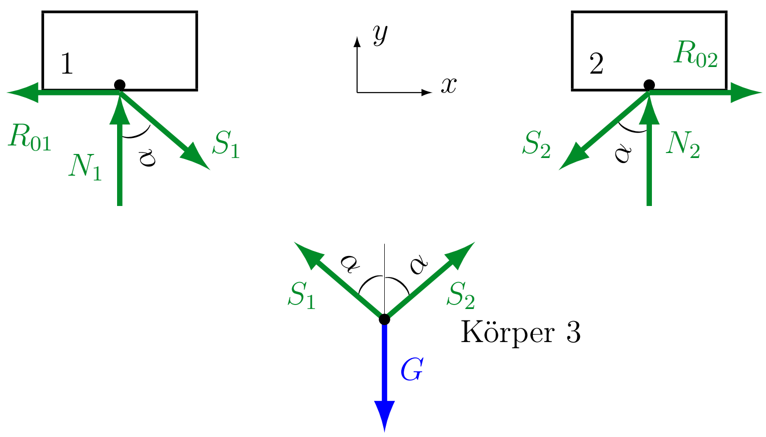


Die Körper 1 und 2 seien masselos.

Bei den bisherigen Beispielen der Reibung haben wir festgestellt, dass das Momentengleichgewicht an Bedeutung verloren hat, da damit lediglich der tatsächliche Angriffspunkt von R_0 und N im Reibspalt berechnet werden kann. Das ist nicht von Interesse, weshalb wir bei Schnittbildern R_0 und N so anbringen, dass das Momentengleichgewicht von selbst erfüllt ist (zentrales Kräftesystem).

Zudem müssen wir wissen, wohin sich die Körper 1 und 2 bewegen, wenn sie ins Rutschen geraten. Sie würden zur Mitte rutschen, so dass die Haftreibungskräfte nach außen zeigen müssen. Die Normalkräfte zeigen wie immer mit der Spitze auf die Oberfläche.

Freischneiden



KG Körper 1

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = -R_{01} + S_1 \sin\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = N_1 - S_1 \cos\alpha$$

KG Körper 3

$$(3) \qquad \sum X \equiv 0 = S_2 \sin\alpha - S_1 \sin\alpha$$

$$(4) \qquad \sum Y \equiv 0 = (S_1 + S_2)\cos\alpha - G$$

$(3) \rightarrow S_1, \qquad S_1$ in $(4) \rightarrow S_2, \qquad S_1$ in $(1) \rightarrow R_{01}, \qquad S_1$ in $(2) \rightarrow N_1$

Warum wird Körper 2 nicht behandelt? Weil ich ein fauler Hund bin. Wir werden gleich sehen, dass wegen der Symmetrie der Körper 2 keine neuen Erkenntnisse liefert. Die Seilkräfte S_1 und S_2 sind gleich groß.

$$(3) \qquad S_1 = S_2$$

$$(4) \qquad 2\,S_1 \cos\alpha = G$$

$$S_1 = \frac{G}{2\,\cos\alpha}$$

$$(1) \qquad R_{01} = S_1 \sin\alpha$$

$$(2) \qquad N_1 = S_1 \cos\alpha$$

Anwenden der Haftbedingung $R_0 < \mu_0\, N$. Hier lautet sie:

$$R_{01} < \mu_0\, N_1$$

$$\cancel{S_1} \sin\alpha < \mu_0\, \cancel{S_1} \cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < \mu_0$$

$$\mu_0 > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mu_0 > \tan\alpha$$

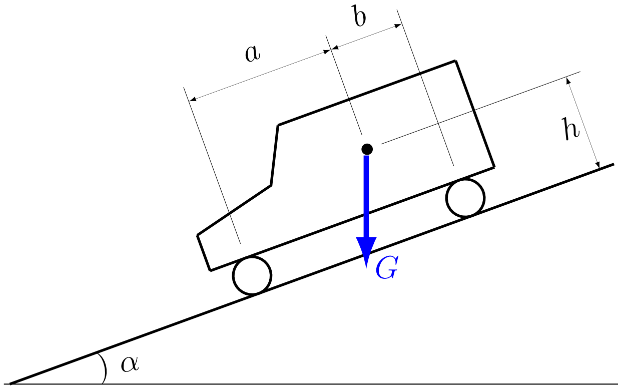
Wieder einmal kann die Haftreibungszahl μ_0 direkt mit dem Tangens eines Winkels verglichen werden.

Noch etwas: Wenn in der Aufgabenstellung steht, dass eine Größe beliebig ist, so darf man erwarten, dass sich diese Größe herauskürzt.

3.1.2 Übungsaufgabe

Ein PKW steht mit angezogener Handbremse hangabwärts auf einer schiefen Ebene. Wie groß muss μ_0 mindestens sein, damit der Wagen nicht rutscht? Bei dem Auto handelt es sich weder um einen Saab 96 noch um einen Renault R4[5]. Deshalb: Die Bremse wirkt auf die Hinterräder. Gegeben:

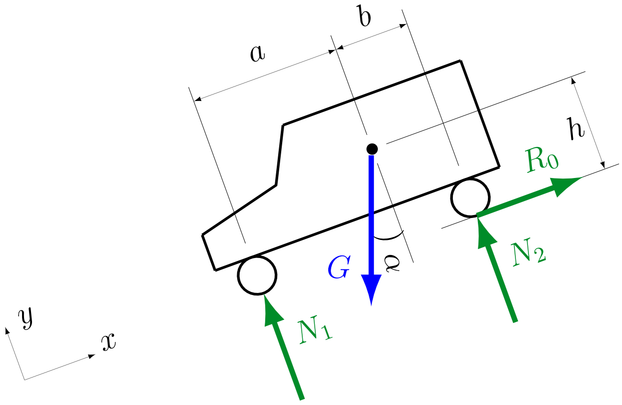
$$G, \quad a, \quad b, \quad h, \quad \alpha.$$



I31-2.TEX

Freischneiden

Wenn das Auto rutscht, rutscht es den Berg hinab. Eine Haftreibungskraft am festgebremsten Hinterrad muss das hinabrutschen verhindern und zeigt daher hangaufwärts.



[5] Saab 96 und Renault R4 sind die einzigen mir bekannten Autos, bei denen die Handbremse auf die Vorderräder wirkt. Beide Autos sind rostbedingt aus dem Straßenbild verschwunden. Der R4 war zu meinen Zeiten eine beliebte Studikarre.

Frei drehbare Räder (hier das Vorderrad) haben wir in Aufgabe 2.4.5 auf Seite 66 kennengelernt. Dort wird auch beschrieben, wie wir den Winkel α in die Nähe der Gewichtskraft G bekommen. Das festgebremste Rad ist uns neu. Die Tatsache, dass es festgebremst ist, wird durch die Haftreibungskraft R_0 berücksichtigt.

Achtung: Da wir hier zwei Radaufstandskräfte haben (N_1 und N_2) wird das Momentengleichgewicht wieder bedeutsam, nur so bekommen wir die Radlastverteilung berechnet.

KG u. MG

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = -G \sin\alpha + R_0$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = N_1 + N_2 - G \cos\alpha$$

$$(3) \qquad \sum M_{[\mathrm{G}]} \equiv 0 = -N_1\, a + N_2\, b + R_0\, h$$

Der Momentenbezugspunkt G erspart es uns, im MG die Kraft G zu zerlegen, liefert aber ein ungünstiges Gleichungssystem mit drei unbekannten Größen im MG. Besonders günstig ist der Aufstandspunkt des Vorderrades als Bezugspunkt. Das würde den Rechenaufwand erheblich verringern. Probieren Sie es bei einem zweiten Durchgang aus. So etwas im Vorfeld zu erkennen ist nicht einfach, deshalb machen wir wie ursprünglich angenommen weiter.

(1) $\to R_0$, (2) $\to N_1$, N_1 und R_0 in (3) $\to N_2$

Für die Haftbedingung benötigen wir Informationen zu R_0 und N_2. N_1 hingegen ist uninteressant. Es ist taktisch klug, sich nicht gleich auf die gesuchte Größe N_2 zu stürzen und im Schritt '(2) $\to N_1$' erst einmal absichtlich daneben zu schießen. Die wichtige Größe (hier N_2) heben wir uns bis zum Schluss auf.

$$(1) \qquad R_0 = G \sin\alpha$$

$$(2) \qquad N_1 = G \cos\alpha - N_2$$

$$(3) \qquad N_2\, b = N_1\, a - R_0\, h$$

$$N_2\, b = (G \cos\alpha - N_2)\, a - G \sin\alpha \cdot h$$

$$N_2\, (a + b) = G \cos\alpha \cdot a - G \sin\alpha \cdot h$$

$$N_2 = \frac{G \cos\alpha \cdot a - G \sin\alpha \cdot h}{a + b}$$

$$N_2 = \frac{G\ (\cos\alpha \cdot a - \sin\alpha \cdot h)}{a + b}$$

Haftbedingung

$$R_0 < \mu_0 \, N_2$$

$$\cancel{G} \sin\alpha < \mu_0 \, \frac{\cancel{G} \, (\cos\alpha \cdot a - \sin\alpha \cdot h)}{a+b}$$

$$\frac{\sin\alpha \cdot (a+b)}{\cos\alpha \cdot a - \sin\alpha \cdot h} < \mu_0$$

$$\mu_0 > \frac{\sin\alpha \cdot (a+b)}{\cos\alpha \cdot a - \sin\alpha \cdot h}$$

Kein schönes Ergebnis, aber ein Ergebnis. War schon einmal Klausuraufgabe, damals mit Zahlenwerten. Erfinden Sie doch selbst welche.

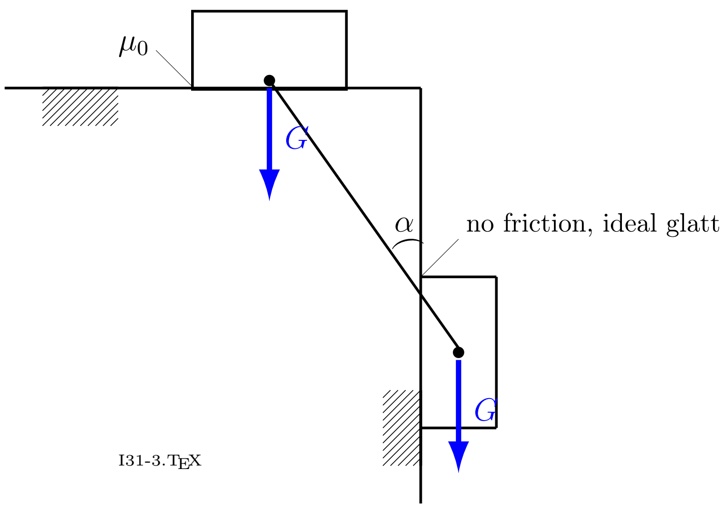
Die Idee zu dieser Aufgabe hatte ich, als ich folgendes beobachtete. Im Winter bei Blitzeis wollte der Mensch aus dem Auto vor mir wieder in sein Auto einsteigen, er hatte kurz Eis von den Scheiben gekratzt. Er rutschte aus und fiel hin. Er zog sich an der Tür hoch und kam erneut ins Straucheln. Daraufhin rutschte sein Auto den recht flachen Hang hinunter. Es ist kein Schaden entstanden, das Auto blieb an einem Randstein hängen.

■

3.1.3 Übungsaufgabe

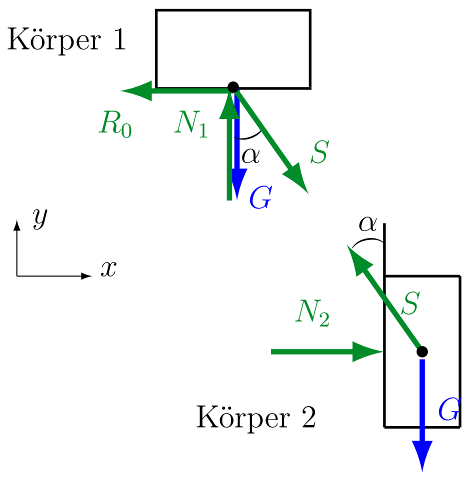
Bis zu welchem Winkel α bleiben die beiden über ein gewichtsloses Seil miteinander verbundenen Gewichte in Ruhe? Gegeben:

$$\mu_0, \qquad G.$$



Wir müssen erkennen, wie sich das System bewegt, wenn die Haftreibungsgrenze überschritten wird. Es ist unmöglich, dass der Körper von alleine an der senkrechten Wand hochgehoben wird. Der Körper, der obenauf liegt, wird zur Tischkante nach rechts gleiten, die Haftreibungskraft verhindert das, wenn sie am Körper nach links zeigt.

Freischneiden



Erneut haben wir an beiden Körpern zentrale Kräftesysteme, weshalb Momentengleichgewichte entbehrlich sind. An Körper 2 haben wir keine Reibkraft angetragen, da wir die Information haben, dass am Körper 2 keine Reibung herrscht. Hätten wir dort Reibung, wäre die Aufgabe sehr viel anspruchsvoller.

KG Körper 1

$$(1) \qquad \sum X \equiv 0 = -R_0 + S \sin\alpha$$

$$(2) \qquad \sum Y \equiv 0 = N_1 + -S \cos\alpha - G$$

KG Körper 2

$$(3) \qquad \sum X \equiv 0 = N_2 - S \sin\alpha$$

$$(4) \qquad \sum Y \equiv 0 = S \cos\alpha - G$$

$(4) \rightarrow S, \qquad S$ in $(1) \rightarrow R_0, \qquad S$ in $(2) \rightarrow N_1, \qquad N_2$ interessiert nicht.

$$(4) \qquad S = \frac{G}{\cos\alpha}$$

$$(1) \qquad R_0 = S \sin\alpha$$

$$R_0 = \frac{G}{\cos\alpha} \sin\alpha$$

$$R_0 = G \tan\alpha$$

$$(2) \qquad N_1 = S \cos\alpha + G$$

$$N_1 = \frac{G}{\cancel{\cos\alpha}} \cancel{\cos\alpha} + G$$

$$N_1 = 2\,G$$

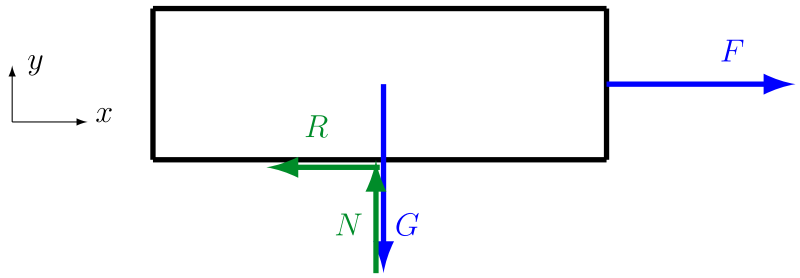
Haftbedingung

$$R_0 < \mu_0\, N_1$$

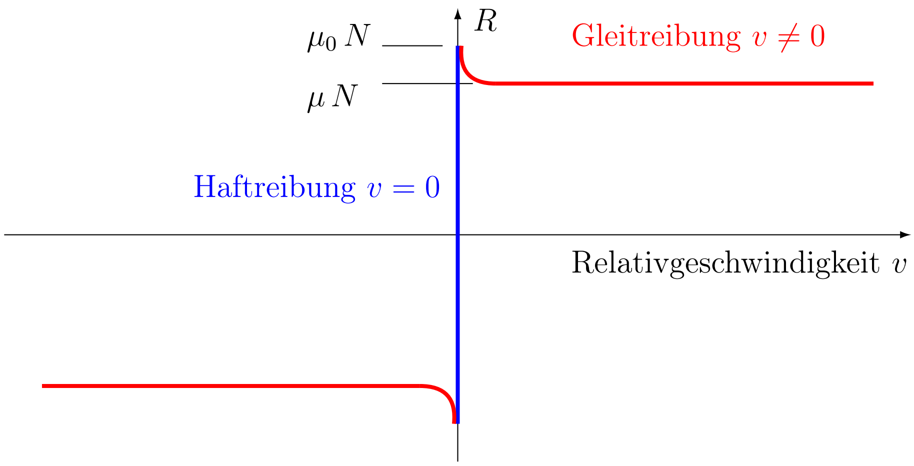
$$\cancel{G} \tan\alpha < \mu_0 \cdot 2\,\cancel{G}$$

$$\alpha < \arctan(2\,\mu_0)$$

3.2 Gleitreibung, Reibung der Bewegung



Überschreitet oder erreicht F den Wert $\mu_0 N$, setzt Bewegung ein. Es wirken dann weiterhin Reibkräfte, allerdings von geringerer Größe. Die Reibkraft heißt nun R ohne Null im Index. Zwischen den Reibpartnern stellt sich eine Relativgeschwindigkeit v ein.



Wenn eine gewisse Mindestgeschwindigkeit überschritten ist, ist die Relativgeschwindigkeit v zwischen den Reibpartnern ohne Einfluss.

Wenn wir hier über Geschwindigkeiten v reden, machen wir dann nicht Dynamik? Klare Antwort darauf: Jein. Die Beschleunigung aus der Ruhe heraus mit der sinkenden Reibkraft R (roter Bogen) interessiert uns nicht. Erst wenn der Körper rutscht, schauen wir wieder hin. Es hat sich eine konstante Geschwindigkeit v eingestellt und wir können unter diesen Umständen (keine Beschleunigung) mit den Gestzen der Statik weiterrechnen.

Wussten Sie, dass Sie und die Stadt Stralsund (etwa 54° nördliche Beite) sich permanent mit 981 km/h ostwärts bewegen? Das ist knapp Schallgeschwindigkeit. Am Äquator ist es sogar Mach 1,5 (1670 km/h). Der Grund ist die Erdrotation. Solange die Geschwindigkeit konstant ist, merken wir nichts davon und können die Gesetze der Statik anwenden. Das ist übrigens nicht alles. Wir alle sind mit 17.111 km/h unterwegs, um die Sonne zu umkreisen. Bloß gut, dass wir so schnell sind, sonst würden wir in die Sonne fallen.

Aber bitte auch nicht schneller werden, sonst wird es bald sehr kalt, weil wir uns von der Sonne entfernen. Ja und dann bewegt sich unser Sonnensystem noch um das Zentrum unserer Galaxie, aber ich glaube ich komme jetzt vom Thema ab. Wir rechnen statisch basta.

$$\vec{R} = -\mu\,|\vec{N}|\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{I.15}$$

Diese Formel ist mathematisch überaus korrekt aber nicht praktikabel. Normalerweise würde ich jetzt einen fiesen Mathematikerwitz erzählen. Wir fangen mit dem Ausdruck $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ an. Im Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ stecken zwei Informationen: der Geschwindigkeitsbetrag (z.B. 100 km/h) und die (Fahrt-)Richtung (z.b. 'nach Rostock'). Wenn wir diesen Vektor durch seinen Betrag teilen, bleibt nur die Richtung übrig ('nach Rostock'). In Wirklichkeit ist $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ein Einheitsvektor in Bewegungsrichtung. Das Minuszeichen besagt, dass der Vektor der Reibkraft $\vec{R}$ der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Ferner gibt es ein neues μ für Gleitreibung und wie bisher die Abhängigkeit vom Betrag der Normalkraft N.

Da wir es ohnehin gewohnt sind, bei Reibungsaufgaben Normal- und Reibkraft richtigherum anzutragen, können wir stark vereinfachen.

Bei vorzeichenkorrekter Annahme von Normal- und Reibkraft gilt

$$R = \mu\,N.$$

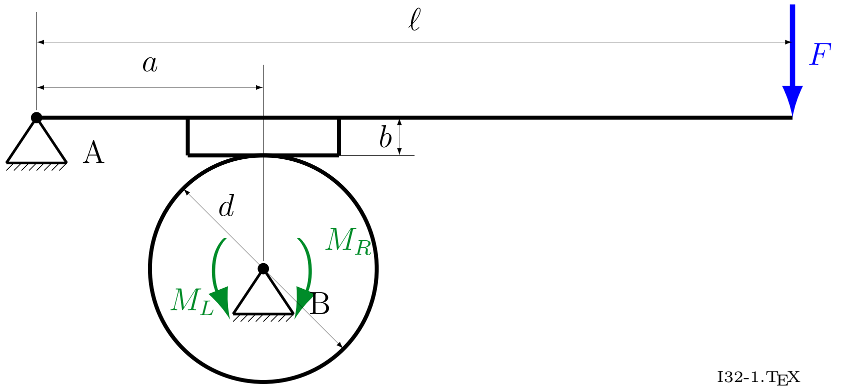
Anders als bei der Haftreibung gewinnen wir bei Gleitreibung eine zusätzliche Bestimmungsgleichung.

Bei der Haftreibung konnten wir R_0 und N aus Gleichgewichtsbedingungen ausrechnen. Mit $R_0 < \mu_0\,N$ konnten wir lediglich **überprüfen**, ob das System in Ruhe bleibt. Gelegentlich wurden wir nach den Grenzbedingungen gefragt.

3.2.1 Übungsaufgabe

Gegeben:

$$a, \quad \ell, \quad b, \quad \mu, \quad d, \quad F.$$



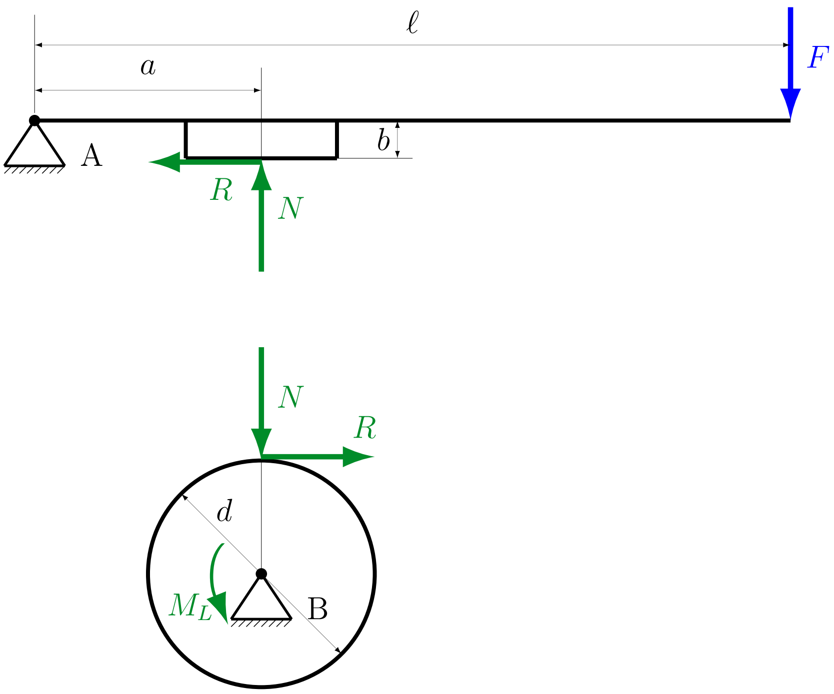
Gesucht:

1. Bremsmoment bei Rechts- und Linkslauf, M_R, M_L.
2. Welcher Abstand b muss gewählt werden, damit bei beiden Drehrichtungen gleiche Bremswirkung auftritt?
3. Bei welchem Abstand b wird die Bremse zum Freilauf? Welche Drehrichtung wird unmöglich?

Wir betrachten wieder einmal ein Hightech-Produkt. John Wayne tritt mit der Kraft F auf einen Hebel und bremst die Postkutsche.

Diesmal wird nur ein Lösungsweg verraten, der für M_L. M_R müssen Sie selbst herausbekommen. Die Fragen 2 und 3 erscheinen zunächst sehr merkwürdig, wir werden sehen, ob wir durch Antwort 1 schlauer werden.

1. Freischneiden Linkslauf M_L



Wir müssen auf die richtige Anbringung der Reibkräfte R achten. Dazu betrachten wir das sich bewegende Teil. Das Rad wird angetrieben von M_L und dreht sich. Die Reibkraft wirkt dieser Bewegung entgegen.

Warum werden die zwei zweiwertigen Lager nicht abgeschnitten? Weil niemand die Lagerreaktionen dort wissen möchte. Dürfen wir das? Ja, wenn wir keine Kräftegleichgewichte aufstellen sondern nur je ein Momentengleichgewicht. Wir müssen den Lagerungspunkt zum Momentenbezugspunkt machen, so dass die unbekannten Lagerreaktionen keinen Hebelarm haben.

(1) MG um B $\sum M_{[B]} \equiv 0 = M_L - R\,\frac{d}{2}$

(2) MG um A $\sum M_{[A]} \equiv 0 = -R\,b + N\,a - F\,\ell$

(3) Gleitreibung $R = \mu\,N$

$(3) \to N, \qquad N \text{ in } (2) \to R, \qquad R \text{ in } (1) \to M_L.$

$$(3) \qquad N = \frac{R}{\mu}$$

$$(2) \qquad R\,b = N\,a - F\,\ell$$

$$R\,b = \frac{R}{\mu}\,a - F\,\ell$$

$$R\,\frac{a}{\mu} - R\,b = F\,\ell$$

$$R\,\left(\frac{a}{\mu} - b\right) = F\,\ell$$

$$R = \frac{F\,\ell}{\frac{a}{\mu} - b}$$

$$(1) \qquad M_L = R\,\frac{d}{2}$$

$$M_L = \frac{F\,\ell}{\frac{a}{\mu} - b} \cdot \frac{d}{2}$$

$$M_L = \frac{F\,\ell\,d}{2\,\left(\frac{a}{\mu} - b\right)}$$

$$M_L = \frac{F\,\ell\,d}{2\,\left(\frac{a}{\mu} - \frac{\mu\,b}{\mu}\right)}$$

$$M_L = \frac{\mu\,F\,\ell\,d}{2\,(a - \mu\,b)}$$

Freischneiden Rechtslauf M_R

Sie beginnen mit einem neuen Schnittbild, rechnen erneut und kommen auf folgendes Ergebnis.

$$\vdots$$

$$M_R = \frac{\mu\,F\,\ell\,d}{2\,(a + \mu\,b)}$$

2. Es soll gelten

$$M_L = M_R$$

$$\frac{\mu\, F \cancel{\ell\, d}}{\cancel{2}\,(a - \mu\, b)} = \frac{\mu\, F \cancel{\ell\, d}}{\cancel{2}\,(a + \mu\, b)}$$

$$a - \mu\, b = a + \mu\, b$$

$$-b = +b$$

$$b = 0$$

Diese Bremse hat erst bei abgefahrenen Bremsbelägen ($b = 0$) in beide Richtungen die gleiche Bremswirkung. Der TÜV wäre begeistert.

3. Wenn eine Drehrichtung unmöglich ist, dann wird das Bremsmoment für diese Drehrichtung beliebig (unendlich) groß.

Welches unserer beiden Ergebnisse aus Aufgabenteil 1 hat die Möglichkeit, unendlich groß zu werden? Wo müssen wir hinschauen? Die Nenner sagen es uns. Wenn ein Nenner Null wird, wird das Ergebnis unendlich. Jaja nur Chuck Norris kann durch Null teilen.

$$M_L = \frac{\mu\, F\, \ell\, d}{2\,(a - \mu\, b)}$$

Für $a = \mu\, b$ wird der Nenner null und M_L beliebig groß.

$$b = \frac{a}{\mu}$$

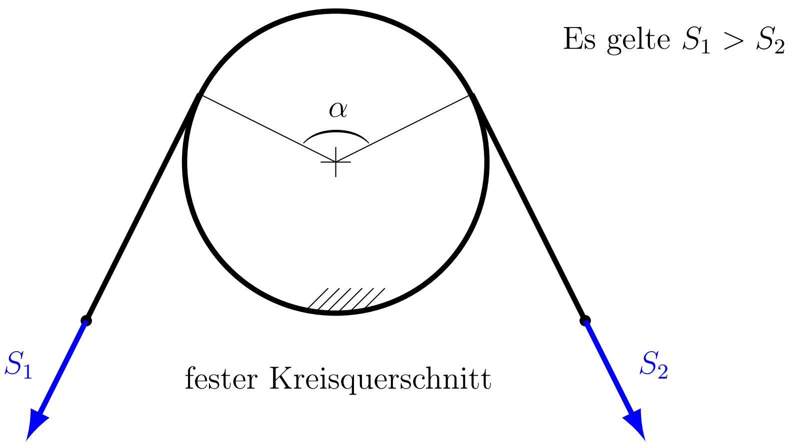
Rechtsrum kann sich das Rad drehen, linksrum nicht. So etwas nennt man Freilauf, ist in jedem Fahrrad so oder so ähnlich verbaut.

3.3 Seilreibung am Kreisquerschnitt

Eine Leine, ein Seil sei um einen festen Kreisquerschnitt geschlungen. Der Umschlingungswinkel sei α.

Dieses Thema begegnet uns im täglichen Leben ständig. Eine Leine ist um eine starre, nicht drehbare Struktur gewunden. Die beiden Seilkräfte S_1 und S_2 können unterschiedlich groß sein. Besipiel:

- Eine Bergsteigerin seilt einen 100 kg-Bergsteiger ab, indem sie eine Leine durch einen Karabinerhaken schlingt. Die Gewichtskraft von rund 1000 N kann sie mit einer weitaus geringeren Haltekraft am freien Seilende kontrollieren.
- Ein Schiff wird an Land festgemacht, indem eine Leine achtförmig um einen Doppelpoller geschlungen wird. Das Schiff zieht wegen des ablandigen Windes mit gewaltigen Kräften an seinen Festmachern. Das freie Ende des Festmachers ist nach mehreren Umschlingungen des Doppelpollers lediglich mit einem jämmerlichen Knoten (dem Kopfschlag) gesichert.
- Jeder Knoten, auch die Schleife[6] an Ihren Schuhen beruht darauf. Die Kreisstruktur ist ein benachbartes Stück Schnur/Leine.
- Bei einem Riementrieb umschlingt ein Flachriemen An- und Abtriebsscheibe. Hier rotieren die Kreisstrukturen. Im Lasttrum ist die Zugkraft größer als im Leertrum (Last- und Leertrum sind an einer Fahrradkette gut zu erkennen. Oben Last- unten Leertrum). Um nicht verwirrt zu werden, wollen wir diesen Fall zunächst zurückstellen. Die Kreisstruktur steht zunächst still.



[6]Mit Blick aus der Seefahrt ist eine Schleife ein doppelt auf Slip gelegter Kreuzknoten.

Es gibt Fälle, bei denen die Leine sich relativ zur Kreisstruktur nicht bewegt (Knoten, Poller, Riementrieb). In anderen Fällen gleitet die Leine an der runden Struktur (Abseilen, englisch: to abseil, kein Witz).

Auch hier ist Gleit- und Haftreibung möglich. Frage: Wie hängen die Seilkräfte S_2 und S_1 bei Gleichgewicht voneinander ab?

Eine infinitesimale Betrachtung entlang der gekrümmten Kontaktfläche führt zur EULER-EYTELWEIN[7]schen Gleichung.

Für Gleitreibung gilt

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \qquad \text{mit} \qquad S_1 > S_2 \tag{I.16}$$

Für Haftreibung gilt

$$S_1 < S_2 \cdot e^{\mu_0\alpha} \qquad \text{mit} \qquad S_1 > S_2 \tag{I.17}$$

Hier liegt kein Druckfehler vor. Die kleinere Kraft S_2 wird mit dem meist recht großen Faktor $e^{\mu_0\alpha}$ multipliziert, so dass dieses Produkt größer wird als die größere Kraft S_1.

Seilreibungskräfte sind also abhängig von

- den Zugkräften S_1 oder S_2
- der Materialpaarung $\mu,\ \mu_0$
- vom Umschlingungswinkel α

Hinweis:

- Es muss identifiziert werden, welche der beiden beteiligten Seilkräfte die größere/kleinere ist,
- der Umschlingungswinkel α muss im Bogenmaß eingesetzt werden.

Beim Thema Seilreibung können hässliche Pannen passieren.

- Der Umschlingungswinkel muss in Bogenmaß umgerechnet werden

$$\widehat{\alpha} = \alpha^o \, \frac{\pi}{180^o}.$$

  Benutzen Sie obige Gleichung und stellen Sie Ihren Taschenrechner auf gar keinen Fall auf Bogenmaß (R) um. Ein Kommilitone hatte das vor Jahren gemacht, vergessen und infolgedessen bei mir drei Klausuren versemmelt. Ich brauchte leider einige Zeit, bis ich ihm auf die Schliche kam und ihm den entscheidenden Tip geben konnte.

[7]Leonhard Euler, 1707 bis 1783,
Johann Albert Eytelwein 1764 bis 1848

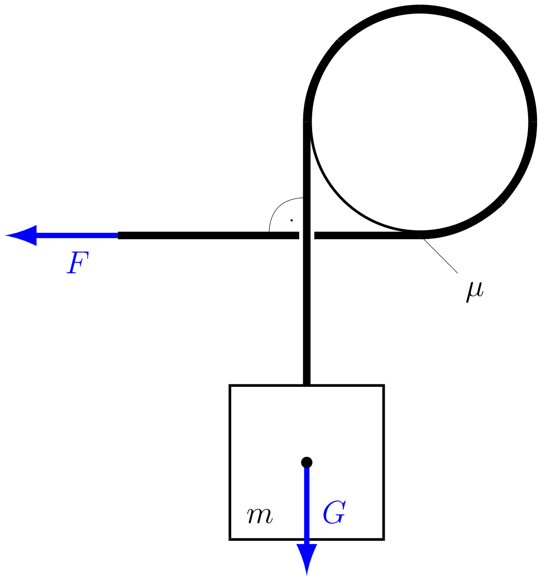
- Die Suche nach der größeren/kleineren Kraft ist das Äquivalent zur Verpflichtung, bei der ebenen Reibung R/R_0 und N richtigherum einzeichnen zu müssen. Die Kraftrichtung an den Seilenden ist selbstverständlich immer ziehend (nur Idioten schieben an Seilen). Wenn das Seil rutscht, rutscht es in Richtung der größeren Kraft. Fragen Sie sich bei der Suche nach der großen/kleinen Kraft, warum mache ich diesen Quatsch, eine Leine um etwas herumzutüdeln.

$\blacksquare$

3.3.1 Übungsaufgabe

Ein Bergsteiger soll abgeseilt werden, dazu wird eine Leine um einen Stab gewunden. Gegeben:

$$m = 100\,\text{kg}, \quad g = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \mu = 0,2.$$



I33-1.TEX

Welche Kraft F muss aufgebracht werden, damit der Bergsteiger (Masse m) mit konstanter Geschwindigkeit abgeseilt wird? In diesem Fall gilt $G = m\,g$.

Wir haben ein Seil- Gleitreibungsproblem. Es gilt

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \qquad \text{mit} \qquad S_1 > S_2.$$

Suche nach der großen/kleine Kraft.

Der schwere Bergsteiger soll unter Zuhilfenahme einer festen Struktur mit Kreisquerschnitt mit einer beherrschbaren Kraft abgeseilt werden. Daher

$$G > F$$

$$G = F \cdot e^{\mu\alpha} \qquad \text{mit} \qquad G > F.$$

Suche nach dem Umschlingungswinkel.

Der eingezeichnete rechte Winkel zwischen zulaufender und ablaufender Leine gibt uns den Hinweis, dass die Leine 3/4 einer vollen Windung anliegt. Wer in Grad denkt, rechnet

$\frac{3}{4} \cdot 360^o = 270^o$ und rechnet anschließend in Bogenmaß um. Wer in Bogenmaß denken kann, rechnet gleich $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$.

$$\alpha = 270^o \qquad \text{oder} \qquad \alpha = \frac{3}{2}\,\pi \qquad \text{oder} \qquad \alpha = 4,712$$

Wir fahren fort

$$F = \frac{G}{e^{\mu\alpha}} = G\,e^{-\mu\alpha}$$

Bei umfangreichen Exponenten einer e-Funktion ist die folgende Schreibweise möglich.

$$F = 100 \cdot 9,81 \cdot \exp(-0,2 \cdot 1,5\,\pi)\ \mathrm{N} = 382\ \mathrm{N}.$$

Zusatzaufgabe.

Wir wollen jetzt mit der gleichen Haltekraft $F = 382$ N statt eines Bergsteigers eine Lokomotive mit $m = 84$ t (DB Baureihe 120) abseilen. Wie viele Seilwindungen müssen wir an unserer runden Struktur anbringen?

Es besteht kein Zweifel, dass G unverändert die größere Kraft ist

$$G = F \cdot e^{\mu\alpha}$$

Gesucht ist nun der Winkel α, der im Exponenten einer e-Funktion steht. Hierzu formen wir um, dass die e-Funktion alleine steht und wenden anschließen den Logarithmus normalis ln (Logarithmus zur Basis e) an.

$$e^{\mu\alpha} = \frac{G}{F}$$

$$\mu\alpha = \ln\left(\frac{G}{F}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{\mu}\ \ln\left(\frac{G}{F}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{0,2}\ \ln\left(\frac{84 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{382}\right)$$

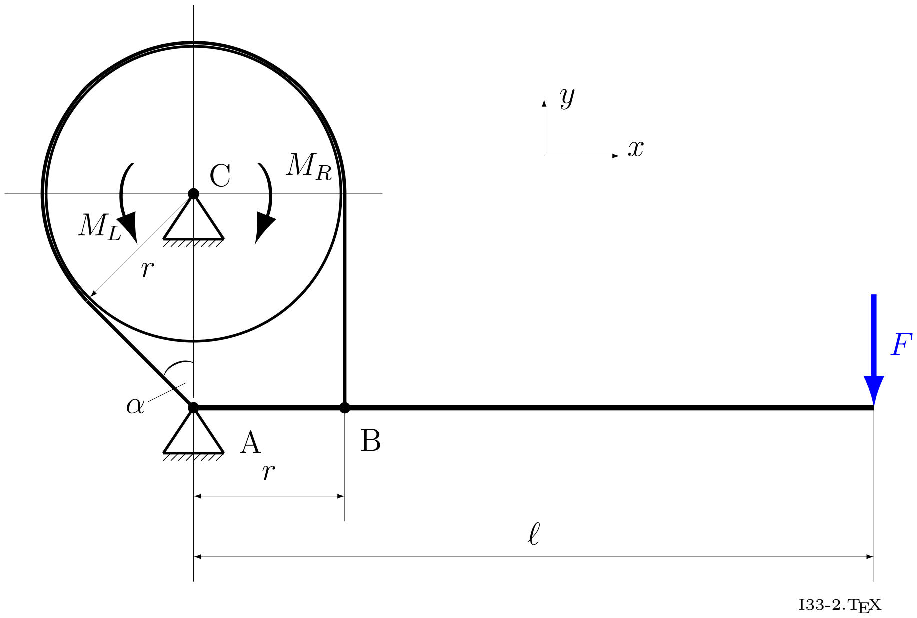
$$\alpha = 38,38 \qquad \text{oder} \qquad 6,1\ \ \text{Windungen.}$$

Hauptsache das Geländer hält die Last aus. Wir sehen, dass mit dem Phänomen Seilreibung gigantische Kräfte kontrolliert werden können. Die Zusatzaufgabe ist natürlich idiotisch, wir brauchen eine Leine, die 84 t tragen kann. Leinen aus dem Werkstoff Dyneema (Ultra-High-Molecular-Weight Polyethylene) wären hier erste Wahl. Mit bis zu 3000 N/mm^2 hat dieser Werkstoff eine erstaunliche Zugfestigkeit, außerdem sind Leinen aus Dyneema erstaunlich biegsam oder biegeschlaff, wie unter Mechanikern gesagt wird. Aber Vorsicht, ganz langsam. Wenn durch Reibungshitze die Leine deutlich über 100°C erhitzt wird, stürzt die Lok ab.

3.3.2 Übungsaufgabe

Eine Bandbremse. Gegeben:

$$F, \quad r, \quad \ell, \quad \alpha = 45^o, \quad \mu_0 = 0,2.$$



Gesucht: M_{Rmax} und M_{Lmax}, ohne dass die Walze sich dreht.

Zur Verdeutlichung: Das Bremsband ist am Lager A befestigt. Dort ist auch der Bremshebel mit Länge ℓ gelenkig gelagert. Das Bremsband umschlingt die Welle und wir am Punkt B (hier kein Gelenk) am Bremshebel befestigt.

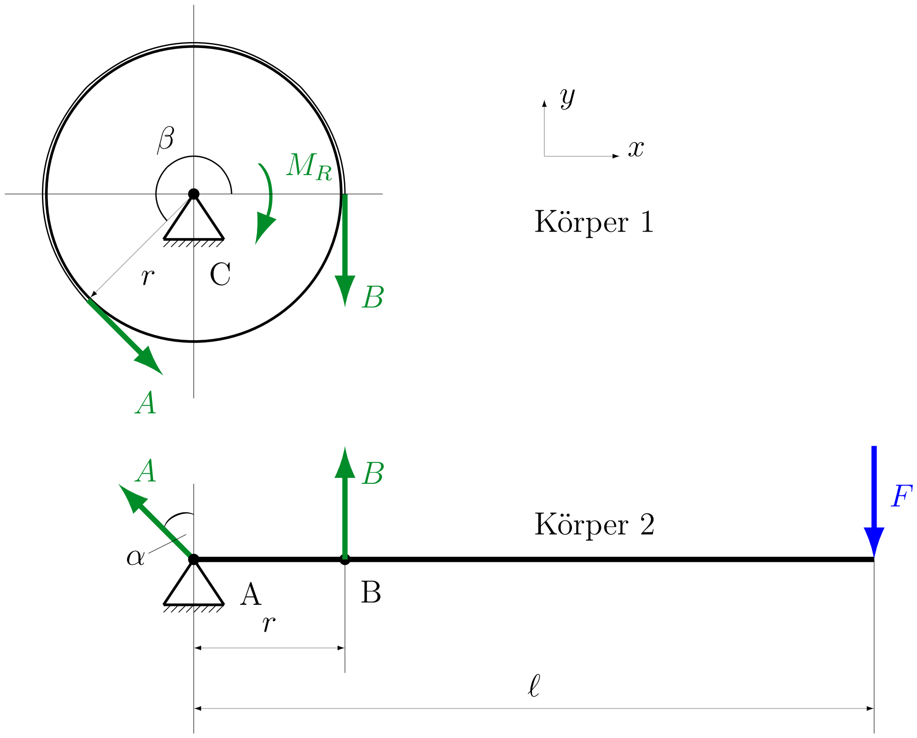
Unabhängig von der Drehrichtung ist der Umschlingungswinkel β (s. Schnittbild).

Betrachten Sie die Angabe $\alpha = 45^o$ in der Aufgabenstellung als gemeine Falle. Natürlich ist α in diesem Fall nicht der Umschlingungswinkel, wir müssen selbst aktiv werden, weshalb der Umschlingungswinkel diesmal β heißt.

$$\beta = 225^o, \qquad \beta = \frac{5}{4}\pi, \qquad \beta = 3,93$$

Rechtslauf, M_R

Freischneiden



Erneut haben wir die beiden zweiwertigen Lager A und C nicht freigeschnitten, da die Lagerkräfte dort uninteressant sind. Wir dürfen so vorgehen, sofern wir nur Momentengleichgewichte aufstellen und die Lagerungspunkte als Bezugspunkt wählen.

MG Körper 1 $\quad \sum M_{[\mathrm{C}]} \equiv 0 = -M_R - B\,r + A\,r$

$$(1) \qquad M_R = r\,(A - B)$$

MG Körper 2 $\quad \sum M_{[\mathrm{A}]} \equiv 0 = B\,r - F\,\ell$

$$(2) \qquad B = F\,\frac{\ell}{r}$$

A und B sind die Seilkräfte, die über die Euler-Eytelweinsche Gleichung in Verbindung gebracht werden müssen. Wir suchen die große/kleine Kraft.

Zwei Möglichkeiten haben wir. Eine anschauliche und eine mathematische.

1. Die Walze möchte das Band mitnehmen. Bei Rechtslauf erzeugt sie daher bei den Kräften A größere Kräfte, bei den Kräften B geringere Kräfte, also $A > B$
2. Im MG an Körper 1 haben wir alles 'richtig' gemacht. M_R ist positiv, denn wäre es negativ, hätten wir ein M_L. Die Seilkräfte A und B sind ziehend eingezeichnet (nur Idioten schieben an Seilen). Gleichung (1) zeigt uns daher

$$A > B$$

$$S_1 < S_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha} \qquad \text{mit} \qquad S_1 > S_2$$

$$(3) \qquad A < B \cdot e^{\mu_0 \beta} \qquad \text{mit} \qquad A > B$$

Beim Einsetzen von A aus Gleichung (3) und B aus Gleichung (2) in Gleichung (1) haben wir das Problem, dass Gleichung (3) eine Ungleichung ist. Unter zwei Bedingungen dürfen wir vorübergehend aus der Ungleichung (3) eine Gleichung machen. Wir müssen eine Grenzwertbetrachtung ankündigen, und zum Schluss beenden und das Ungleichheitszeichen durch Plausibilität rekonstruieren.

Beginn Grenzbetrachtung

$$(1) \qquad M_R = r\,(A - B)$$

$$\text{mit (3)} \qquad M_R = r\,(B\,e^{\mu_0 \beta} - B)$$

$$M_R = r\,B\,(e^{\mu_0 \beta} - 1)$$

$$\text{mit (2)} \qquad M_R = F\,\ell\,(e^{\mu_0 \beta} - 1)$$

$$M_R = F\,\ell\,(e^{0,2 \cdot 3,93} - 1)$$

$$M_R = 1,2 \cdot F\,\ell$$

Ende Grenzbetrachtung. Das Moment M_R hat einen Höchstwert, daher gilt

$$M_{Rmax} < 1,2 \cdot F\,\ell$$

Linkslauf, M_L

Neues Schnittbild, neue Suche nach großer/kleiner Kraft, neue Momentengleichgewichte bei gleichem Umschlingungswinkel β

$$M_{Lmax} < F\,\ell(1 - e^{-\mu_0 \beta})$$

$$M_{Lmax} < 0,54 \cdot F\,\ell$$

3.4 Zusammenfassung der Coulombschen/trockenen Reibung

	Ebene Reibung	Seilreibung
Haftreibung	$R_0 < \mu_0 N$	$S_1 < S_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$ $S_1 > S_2$
Gleitreibung	$R = \mu N$	$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha}$ $S_1 > S_2$

Bei Haftreibung werden R_0 und N bzw. S_1 und S_2 aus Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Mit Hilfe der Haftbedingungen (Ungleichungen) kann lediglich überprüft werden, ob das System hält oder rutscht. Die Haftbedingung ist keine zusätzliche Bestimmungsgleichung. Lediglich in den Fällen, in denen die Grenzen untersucht werden sollen (bis zu welchem Winkel ..., wie groß muss μ_0 mindestens sein ...), liefert die Haftbedingung ein Rechenergebnis.

Bei Gleitreibung stellen die Reibungsgesetze zusätzlich Bestimmungsgleichungen dar.

Hier endet der Vorlesungsstoff in der Vorlesungsreihe Technische Mechanik I. Ich wünsche Ihnen viel Glück bei der Klausur