

Technische Mechanik II

Joachim Venghaus*

8. September 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Schnittkräfte und Schnittmomente an schlanken Strukturen	4
1.1	Einfache Beanspruchungsarten	7
1.1.1	Übungsaufgabe, der Haken	18
1.2	Kontinuierliche Belastung bei Biegung	27
1.2.1	Übungsaufgabe, Streckenlast 2, 1	30
1.3	Zusammenhang Biegemoment M_b , Querkraft Q und Streckenlast $q(x)$. .	39
1.3.1	Übungsaufgabe, Teilstreckenlast	41
1.3.2	Übungsaufgabe, Sprungbrett	46
1.3.3	Übungsaufgabe, Streckenlast 3	47
1.4	Zusammengesetzte Beanspruchung Biegung und Torsion	48
2	Spannungsanalyse	51
2.1	Differentielle Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement	54
2.2	CAUCHYsche Spannungsgleichung für den ebenen Spannungszustand . .	58
2.3	CAUCHYsche Spannungsgleichung für den dreidimensionalen Spannungs- zustand	63
2.4	Anwendung der CAUCHYschen Spannungsgleichung: Hauptspannungen .	63
2.4.1	Übungsaufgabe, Spannungsvektor	69
2.4.2	Übungsaufgabe, Invarianten, Hauptspannungen	71
2.4.3	Übungsaufgabe, Hauptachsenkoordinatensystem	75
2.5	Ebener Spannungszustand	78
2.5.1	Übungsaufgabe, zwei MOHRsche Kreise, Schnittbilder	85
2.5.2	Übungsaufgabe, σ , τ bei Schnitt	89
2.5.3	Übungsaufgabe, Normalspannung aus $\vec{S}$	93
2.5.4	Übungsaufgabe, Knotenblech 1	94

*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund

3	Verformungen	97
3.1	Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung	99
3.2	Elastischer Bereich, HOOKEsches Gesetz	103
3.2.1	Übungsaufgabe, CAUCHY-GREENscher Verzerrungszustand . . .	107
3.2.2	Übungsaufgabe, Längenänderung eines Quaders	110
4	Vergleichsspannungshypothesen	112
4.1	Mögliche Fließkriterien	113
4.2	Zulässige Spannung	115
4.2.1	Übungsaufgabe, Vergleichsspannungshypothesen	117
4.2.2	Übungsaufgabe, Knotenblech 2, TRESCA	118
4.2.3	Übungsaufgabe, Kesselformel	121
5	Elementare Theorie der Balkenverformung	126
5.1	Zusammenhang zwischen Spannungen in einem Balkenquerschnitt und den Beanspruchungsgrößen	126
5.2	Balkenbiegung BERNOULLIsche Annahmen	127
5.3	Abkürzung für häufig auftretende geometrische Ausdrücke: Flächenträgheitsmoment	130
5.4	Differentialgleichung der Balkenbiegung	133
5.4.1	Übungsaufgabe, Streckenlast 3, Biegelinie	140
5.4.2	Übungsaufgabe, zwei Bereiche, Biegelinie	143
5.5	Spannungen am Balken	147
5.6	Maximale Normalspannung am deformierten Balken	150
5.7	Zusammenfassung der Spannungsberechnung	150
5.7.1	Übungsaufgabe, MOHRsche Kreise am Biegebalken	152
5.7.2	Übungsaufgabe, Streckenlast 2, 1, Sicherheit gegen Fließen	158
6	Torsion einer Welle mit Kreis(ring)querschnitt	164
6.1	Analogie Torsion – Biegung	167
6.2	Beispiel zur Torsion	168
6.2.1	Übungsaufgabe, Gelenkwelle eines Autos	171
6.2.2	Übungsaufgabe, hohlgebohrte Messwelle	176
7	Axialbelastung von Stäben, elastische Stabknickung	180
7.1	Theoretische Betrachtung zur Ermittlung von P_{krit}	180
7.2	Ergebnisse für andere Lagerungsfälle	184
7.2.1	Übungsaufgabe, einfache Stabknickung	186
7.2.2	Übungsaufgabe, Knickung eines Bremsgestänges	188
7.2.3	Übungsaufgabe, Knickung einer Stößelstange	190
7.2.4	Übungsaufgabe, Knickung eines Dreigelenks	192

Liebe Studierende,

ganz herzlich begrüße ich Sie zum Kurs Technische Mechanik II für die Studierenden der Studiengänge Maschinenbau und Motorsport Engineering. Erneut müssen wir die Vorlesungen und Übungen Online gestalten. Ich werde Ihnen den Vorlesungsinhalt für eine Woche am Wochenende zur Verfügung stellen. Wir behandeln in der Folgewoche während der Videokonferenzen gemäß Stundenplan die Ihnen vorliegenden Inhalte. Diese Vorgehensweise ist sehr viel zeitsparender als eine reguläre Vorlesung im Hörsaal, da der mühsame Tafelanschrieb und das Tafelwischen entfällt. Wir werden in den Videokonferenzen eher reichlich Zeit haben und können uns um Verständnisfragen kümmern. Sie sind herzlich eingeladen, mich reichlich mit Fragen einzudecken. Bitte überwinden Sie die natürliche Scheu, das Mikrofon anzumachen und Fragen zu stellen.

Erneut gilt: Schwarzer Text sind die dünnen Fakten, blauer Text beschreibt Hintergründe, dient aber auch der Auflockerung.

II Festigkeitslehre

Vorbemerkung

Die Festigkeitslehre liefert Berechnungsgrundlagen für die inneren Kräfte bei verformten Strukturen. Dies ist notwendig zur Dimensionierung der Strukturen.

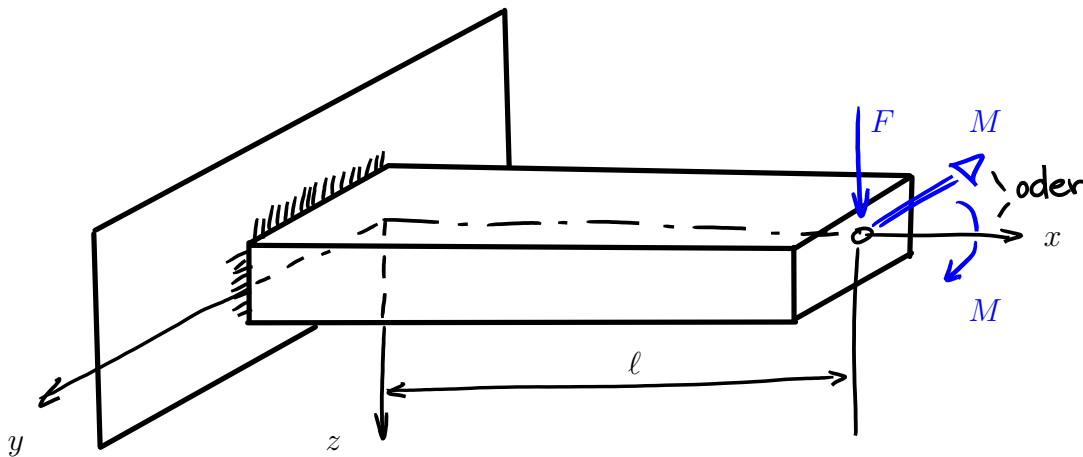
Die Verformungen werden hinreichend langsam erzeugt. Anschließend ist der verformte Körper wieder in Ruhe, so dass die bekannten Gleichgewichtsbedingungen gelten.

Generell gilt: Es werden nur schlanke Tragwerke wie Stäbe, Balken und Wellen betrachtet.

Schlank heißt, eine der drei Dimensionen einer Struktur ist deutlich größer als die anderen beiden.

1 Schnittkräfte und Schnittmomente an schlanken Strukturen

Veranschaulichung der Problemstellung am einseitig eingespannten Rechteckbalken.



Wir müssen uns ab jetzt an ein neues Koordinatensystem gewöhnen. Unverändert ist die x -Achse die Balkenachse. Sie ist nach wie vor die Verbindungslinie aller Schwerpunkte der Querschnittsflächen unseres Balkens. Neu ist für uns die z -Achse, die nach unten zeigt (früher y nach oben). Die y -Achse zeigt neuerdings aus der Zeichenebene heraus. Lediglich die Tatsache, dass ab nun gilt „nach unten ist positiv“, ändert sich nicht viel.

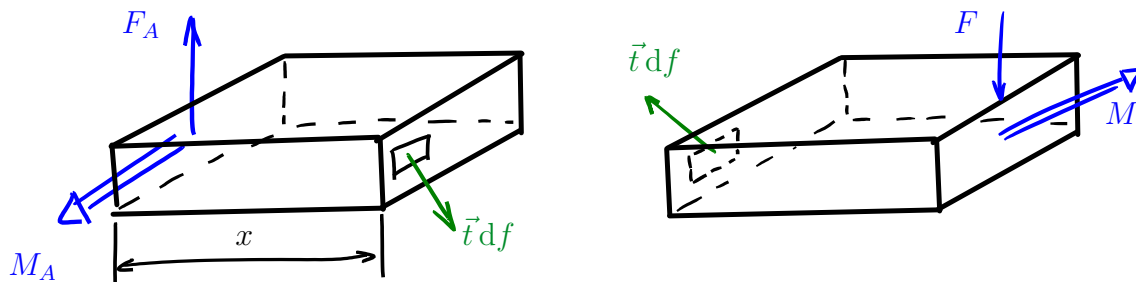
Die „Uhrzeigerregel“ gilt im neuen Koordinatensystem unverändert. Gegen den Uhrzeigersinn bleibt eine positive Bewegungsrichtung.

Warum ein neues Koordinatensystem? Balken werden häufig durch Gewichtskräfte nach unten durchgebogen. Aus diesem Grunde hat sich ein Koordinatensystem eingebürgert, bei dem eine Koordinatenrichtung nach unten zeigt. Da das fast alle so machen, schließen wir uns an.

Problem: Ermittlung von Schnittkräften und Schnittmomenten an jeder beliebigen Stelle x des Balkens.

Lösung:

1. Ermittlung der Lagerreaktionen unter Annahme eines starren Balkens.
2. Zerschneiden des Balkens an einer beliebigen Stelle x , Anbringen von Schnittkräften



Das Bestimmen der Lagerreaktionen A , M_A eines dreiwertig gelagerten Balkens wird nicht vorgeführt, das kennen wir aus TM I zur Genüge. Neu ist für uns die differentielle Kraft $\vec{t}df$. Sie wird nur eine vorübergehende Bedeutung haben. Die Kraft berechnet sich aus der vektoriellen Spannung $\vec{t}$, die wir mit der infinitesimal kleinen Fläche df (das kleine Rechteck) multiplizieren.

- a) An jedem Flächenelement df einer Schnittfläche wirkt eine differentielle Kraft $\vec{t}df$ mit

$$\vec{t}: \text{Spannungsvektor; Einheit } \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Verteilung der Kräfte $\vec{t}df$ auf einer Querschnittsfläche ist einstweilen unbekannt, auch ändern sich die Verhältnisse, wenn wir an einer anderen Stelle x schneiden.

Für die Spannung $\vec{t}$ gilt

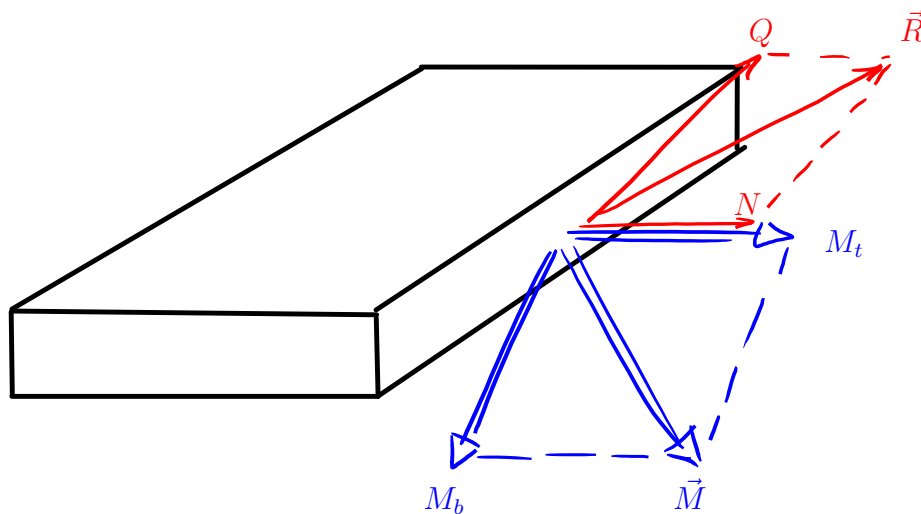
$$\vec{t} = \vec{t}(x, y, z)$$

- b) Nun werden alle differentiellen Einzelkräfte $\vec{t} df$ im Schnittflächenschwerpunkt zur resultierenden Schnittkraft $\vec{R}$ und zum resultierenden Moment $\vec{M}$ zusammengefasst. Dabei gilt

$$\vec{R} = \vec{R}(x); \quad \vec{M} = \vec{M}(x)$$

Die Abhängigkeit von den Koordinaten y, z sind wir durch das Zusammenfassen los geworden

- c) Zerlegung von $\vec{R}$ und $\vec{M}$ in Richtung der Balkenachse x und senkrecht dazu.



Zerlegung von $\vec{R}$.

- i) In x -Richtung: Normalkraft N , Beanspruchung Zug oder Druck.
- ii) In der Schnittfläche liegend: Querkraft Q , Beanspruchung Schub. Q ist weiter zerlegbar in y - und z -Richtung mit den Komponenten Q_y, Q_z .

Zerlegung von $\vec{M}$.

- i) In x -Richtung: Torsionsmoment M_t , Beanspruchung Torsion.
- ii) In der Schnittfläche liegend: Biegemoment M_b , Beanspruchung Biegung. M_b ist weiter zerlegbar in y - und z -Richtung mit den Komponenten M_{by}, M_{bz} .

Wir erhalten also sechs skalare Schnittgrößen.

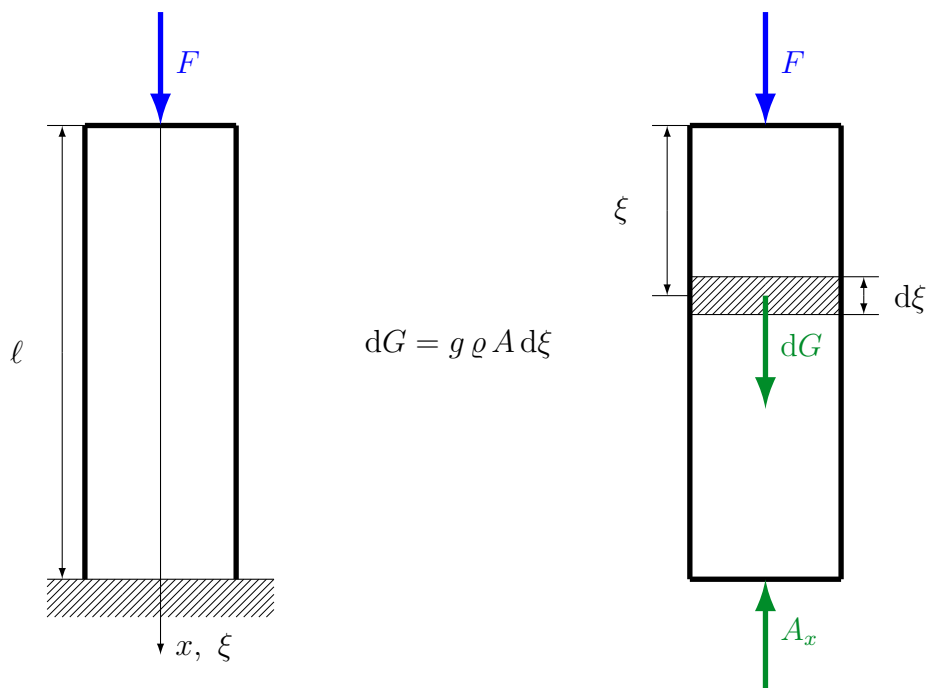
- d) Berechnung von sechs Schnittgrößen aus sechs Kräfte- und Momentengleichgewichten an einem abgeschnittenen Systemteil.

Das hört sich schlimmer an, als es ist. Wir werden drei typische Beanspruchungen von Strukturen kennenlernen. Bei Zug/Druck (Axialbeanspruchung) und bei reiner Torsion werden wir nur eine der sechs Größen erhalten. Bei reiner Biegung werden wir drei von sechs erhalten. Also keine Panik vor der Mechanik.

1.1 Einfache Beanspruchungsarten

Axialbeanspruchung:

Betrachtet wird eine Säule unter Eigengewicht und äußerer Kraft.



Wir betrachten eine infinitesimal dünne Scheibe der Säule. Sie habe die Höhe $d\xi$. Diese dünne Scheibe hat die Eigengewichtskraft dG . Sie berechnet sich aus dem Volumen der Scheibe (Querschnittsfläche A , Höhe $d\xi$), der Dichte ρ und der Erdbeschleunigung g . Warum benutzen wir den griechischen Buchstaben ξ , gesprochen 'ksi', können wir nicht einfach x benutzen? Wir benötigen entlang unserer x -Achse zwei unabhängige 'Maßbänder'. Einmal x und einmal ξ . 'iks' und 'ksi' sind ganz ähnlich zueinander, sie fangen beide oben an der Säule an und haben den gleichen Maßstab.

Bestimmung der Lagerreaktion A_x .

$$\sum X \equiv 0 = F - A_x + \int_{\xi=0}^{\xi=\ell} dG$$

Die Säule sei ein Stapel aus Bierdeckeln. Jeder Bierdeckel, eine infinitesimale Scheibe der Säule, hat die Gewichtskraft dG . Wir müssen von oben $\xi = 0$ bis unten $\xi = \ell$ die Gewichtskräfte aller Bierdeckel aufsummieren. Die Summation von infinitesimalen Größen wird Integration genannt.

$$\sum X \equiv 0 = F - A_x + \int_{\xi=0}^{\xi=\ell} g \varrho A \, d\xi$$

$$\sum X \equiv 0 = F - A_x + g \varrho A \int_{\xi=0}^{\xi=\ell} d\xi$$

$$\sum X \equiv 0 = F - A_x + g \varrho A \xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=\ell}$$

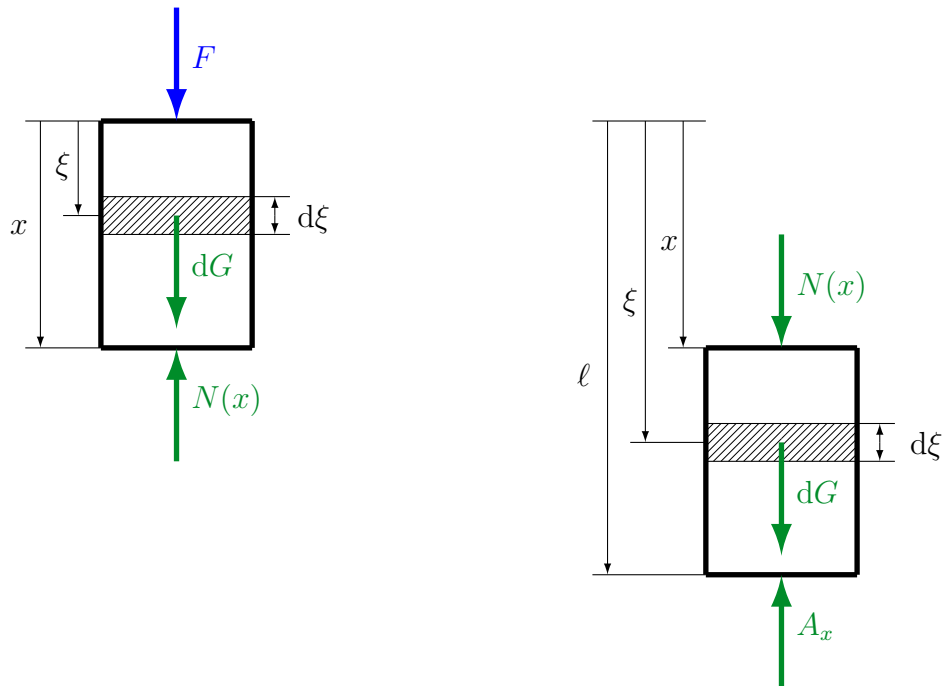
$$\sum X \equiv 0 = F - A_x + g \varrho A \ell$$

Der Ausdruck $g \varrho A \ell$ ist die Gesamtgewichtskraft G der Säule. Also gilt:

$$A_x = F + G$$

So viel Aufwand für so eine Banalität? Sie haben ja recht. Mit dieser umständlichen Methode haben wir das Integrieren geübt und den schönen Buchstaben ξ kennengelernt. Wir werden beides später noch brauchen. ■

Bestimmung der Schnittgrößen an der Stelle x .



Von den angedrohten sechs Beanspruchungsgrößen bleibt nur eine einzige, die Normalkraft $N(x)$ übrig. Weil es das erste mal ist, wird gezeigt, dass es egal ist, ob wir das obere oder das untere Säulenteil betrachten. Später werden wir uns die Mühe nur ein einziges mal machen.

Bestimmung der Beanspruchungsgröße $N(x)$ am oberen Teil.

$$\sum X \equiv 0 = F - N(x) + g \varrho A \int_{\xi=0}^{\xi=x} d\xi$$

$$N(x) = F + g \varrho A x = F + G \frac{x}{\ell}$$

Bestimmung der Beanspruchungsgröße $N(x)$ am unteren Teil.

$$\sum X \equiv 0 = N(x) - A_x + g \varrho A \int_{\xi=x}^{\xi=\ell} d\xi$$

$$N(x) = A_x - g \varrho A (\ell - x)$$

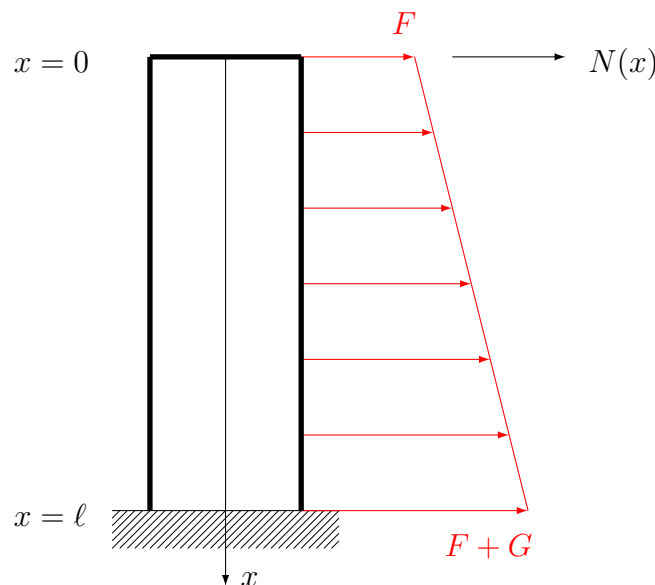
mit $A_x = F + g \varrho A \ell$

$$N(x) = F + g \varrho A \ell - g \varrho A (\ell - x)$$

$$N(x) = F + g \varrho A x = F + G \frac{x}{\ell}$$

Da haben wir aber noch einmal Glück gehabt (Zitat aus 'Das Leben des Brian'), beide Ergebnisse stimmen überein. Wir sehen, dass das obere Teilstück einfacher zu handhaben ist. Eine untere Integrationsgrenze 0 ist häufig erstrebenswert.

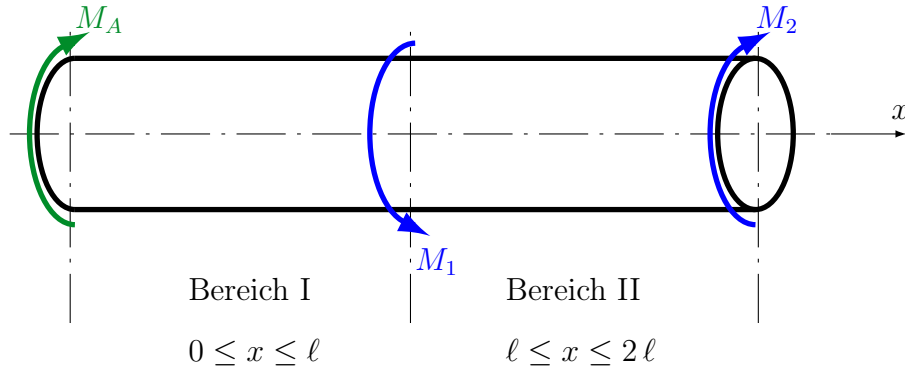
Zeichnerische Darstellung des Ergebnisses. Es wird $N(x)$ über x angetragen. Aus Anschauungsgründen ist die Wirkrichtung von $N(x)$ um 90° verdreht eingezeichnet.



Wie kommen wir auf diesen Verlauf? Wir betrachten die Formel $N(x) = F + G \frac{x}{\ell}$ und stellen fest, dass der Verlauf linear ist (keine Verunstaltung von x durch Wurzeln, Quadrate o.ä.). Somit genügt es, zwei Werte zu berechnen, einmal $N(x=0) = F$ und einmal $N(x=\ell) = F + G$. Wir verbinden diese Werte mit einer Geraden und verzieren mit weiteren Pfeilen wie es uns gefällt.

Torsion:

Gegeben sei eine Welle, mit Radius r und der Länge 2ℓ . Es wirken die bekannten Momente M_1 , M_2 . Die Lagerreaktion M_A ist bereits freigeschnitten.



1.) Lagerreaktionen

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M_A + M_1 - M_2$$

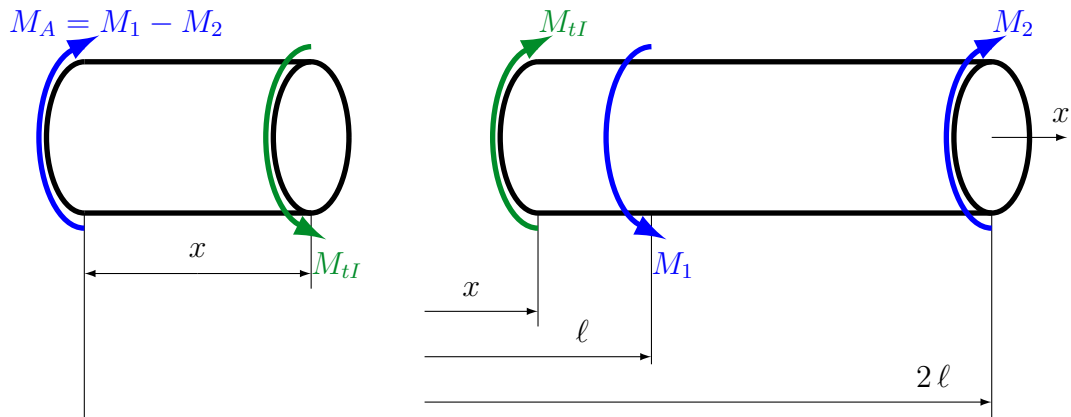
$$M_A = M_1 - M_2$$

Wir betrachten erstmals Torsionsmomente an einer Welle. Denken Sie zur Veranschaulichung an einen Feudel, den Sie auswringen. Drei Hände wringen an unserer Welle. Aufgestellt wird ein Momentengleichgewicht um die x -Achse. Zur Vorzeichenvergabe: Bilden Sie jedes Moment einzeln mit der rechten Hand ab. Die gekrümmten Finger zeigen in Richtung des gekrümmten Pfeils. Der abgespreizte Daumen zeigt dabei entweder in oder gegen die x -Richtung. Zeigt der Daumen gegen die x -Richtung, ist ein Minuszeichen fällig.

2.) Bereichseinteilung

Die Welle muss in Bereiche eingeteilt werden, die stetig sind. Ein äußeres Moment stellt eine Unstetigkeit dar, Anfang und Ende natürlich auch. Daher stellen wir fest, dass wir die Welle in zwei Bereiche einteilen müssen.

3.) Schneiden im Bereich I an der Stelle x .

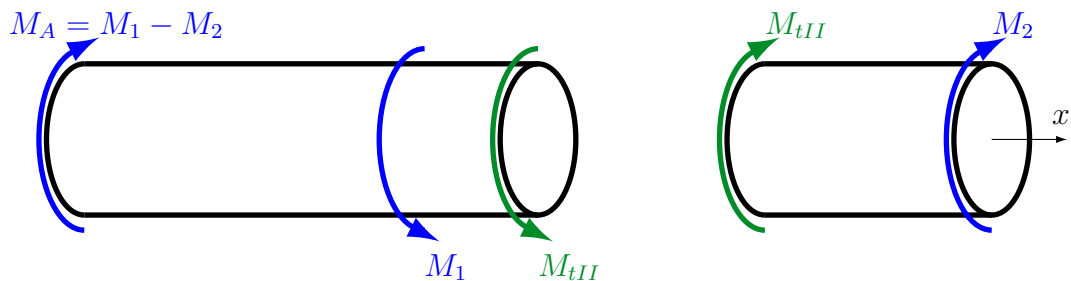


4.) Momentengleichgewicht um die x -Achse, hier linkes Teil

$$\begin{aligned}\sum M_{[x]} &\equiv 0 = -M_A + M_{tI} \\ M_{tI} &= M_A \\ M_{tI} &= M_1 - M_2\end{aligned}$$

Nun muss das Ganze noch einmal für Bereich II durchgeführt werden. Die Schritte 3.) und 4.) werden wiederholt. Da wir bemerkt haben, dass die Längenbemaßung bei Torsion keinen Erkenntnisgewinn hat, lassen wir sie diesmal weg.

3.) Schneiden im Bereich II an der Stelle x .



4.) Momentengleichgewicht um die x -Achse, hier rechtes Teil, denn es hat weniger Bestandteile als das Linke.

$$\begin{aligned}\sum M_{[x]} &\equiv 0 = -M_{tII} - M_2 \\ M_{tII} &= -M_2\end{aligned}$$

Biegung:

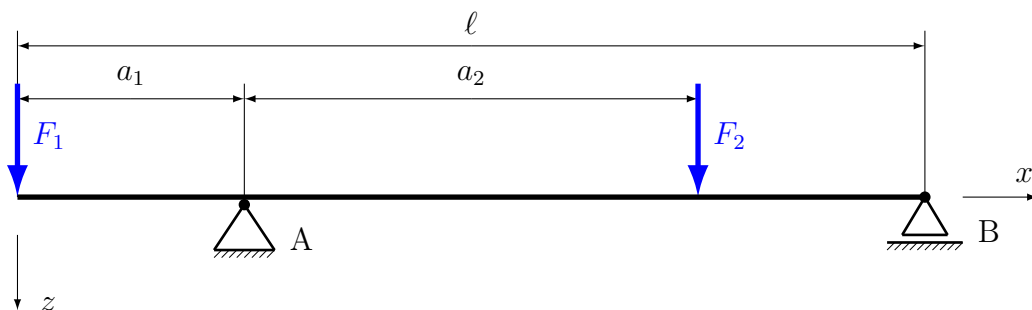
Es gibt zunächst nur vertikale Einzelkräfte der x - z -Ebene. Die Balkenlängsachse (x -Achse) liegt in dieser Ebene. Folgende Beanspruchungsgrößen treten auf:

- Biegemoment $M_{by} \neq 0$,
- Schub $Q_z \neq 0$,
- gelegentlich entsteht Zug, dann gilt $N \neq 0$.

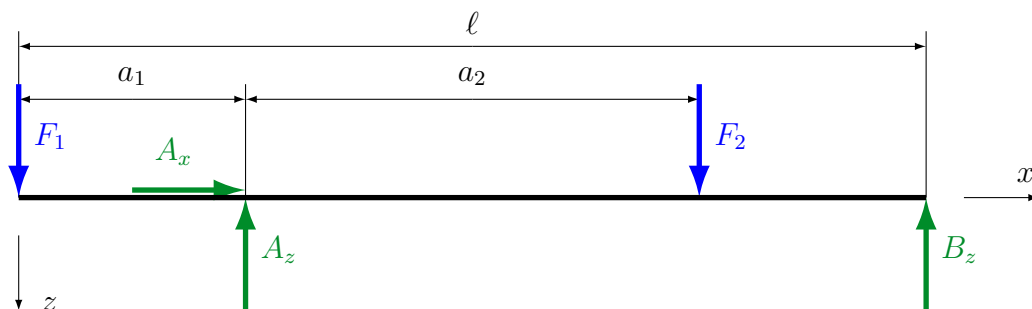
Die drei anderen Beanspruchungsgrößen M_{bz} , M_t , Q_y treten nicht auf. Aus diesem Grund kürzen wir ab. Künftig gilt $M_{by} = M_b$, $Q_z = Q$.

Beispiel

Gegeben: Äußere Kräfte, Geometrien. Gesucht: Beanspruchungsgrößen.



1. Lagerreaktionen



$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum X &\equiv 0 = A_x \\
 (2) \quad \sum Z &\equiv 0 = F_1 - A_z + F_2 - B_z \\
 (3) \quad \sum M_{[A]} &\equiv 0 = F_1 a_1 - F_2 a_2 + B_z (\ell - a_1)
 \end{aligned}$$

Strategie: (3) $\rightarrow B_z$, B_z in (2) $\rightarrow A_z$

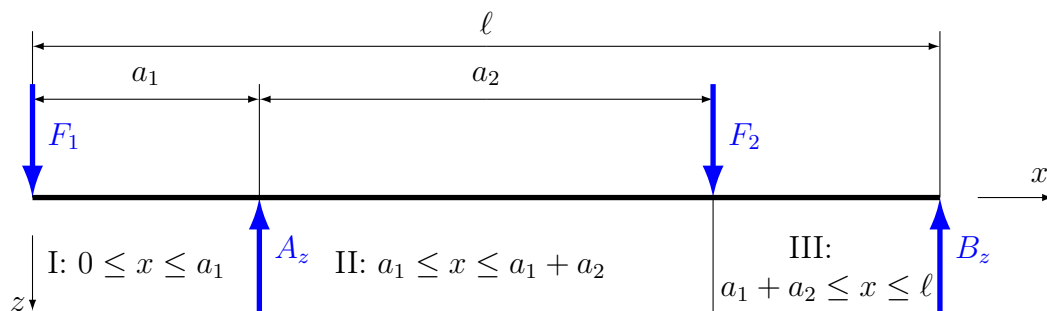
$$(3) \quad B_z (\ell - a_1) = -F_1 a_1 + F_2 a_2$$

$$B_z = \frac{F_2 a_2 - F_1 a_1}{\ell - a_1}$$

$$B_z \text{ in (2)} \quad A_z = F_1 + F_2 - \frac{F_2 a_2 - F_1 a_1}{\ell - a_1}$$

Dies war bisher Stoff aus TM I. Da die Ergebnisse für A_z , B_z recht umfangreich sind, werden wir nicht mit den Ergebnissen, sondern mit A_z , B_z weiter rechnen. Erst jetzt kommen die neuen Schritte, die wir kennenlernen werden.

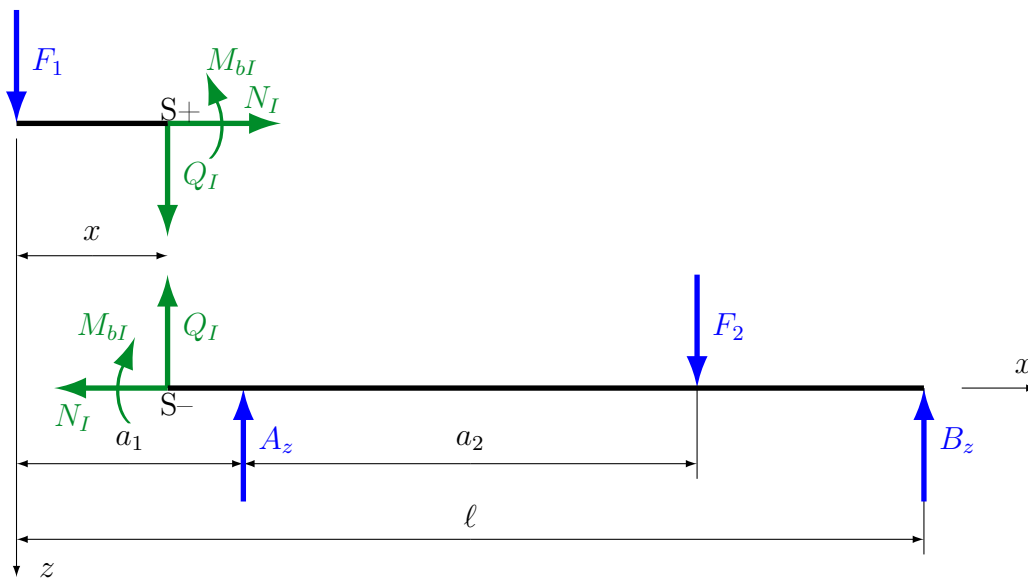
2. Einteilung in stetige Bereiche (künftig abgekürzt: Bereichseinteilung)



Gründe für eine Bereichsgrenze sind

- Anfang und Ende der Struktur
- Lager
- Einzelkraft oder Einzelmoment
- Anfang und Ende einer Streckenlast (noch unbekannt)
- Abwinklungen der Struktur

All diese aufgezählten Gründe stellen eine Unstetigkeit im Verlauf der Struktur dar. Daher müssen alle nachfolgenden Schritte für jeden Bereich gesondert durchgeführt werden.

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle x 

Beim Anbringen der Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b sind die Regeln zum positiven und negativen Schnittufer zu beachten.

Bisher waren wir ziemlich frei in der Wahl der Pfeilrichtung von Kräften und Momenten. Lediglich beim Thema Reibung gab es eine Ausnahme. Jetzt kommt eine weitere Ausnahme hinzu. Bei den Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b haben wir keine Wahl. Wir definieren positive und negative Schnittufer. An dem positiven tragen wir die Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b in positiver Koordinatenrichtung an, am negativen in negative Richtung. Klingt logisch, nur, woran erkenne ich ein pos./neg. Schnittufer? Aus einem positiven Schnittufer kommt die x -Achse heraus, in ein negatives Schnittufer sticht die x -Achse hinein. Im Bild ist oben das positive, unten das negative Schnittufer. Sie sind markiert mit $S+$ und $S-$

Warum diese Einschränkung? Wir werden aus den Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b demnächst Spannungen berechnen. Für die gibt es – im Gegensatz zu Kräften – eine feste Vorzeichenregelung (Zugspannungen sind positiv, Druckspannungen sind negativ). Damit die Spannungen vorzeichenkorrekt berechnet werden können, fangen wir jetzt schon damit an, die Beanspruchungsgrößen regelgerecht anzutragen. Bei den Lagerreaktionen können wir trotzdem Kräfte und Momente antragen, wie es uns gefällt.

4. Kräfte- und Momentengleichgewicht um S , hier links

Es ist immer eine hervorragende Idee, das Momentengleichgewicht um die Schnittstelle aufzustellen. Das linke Balkenteil wählen wir, weil es sehr viel überschaubarer

ist, als das rechte. Faulheit siegt.

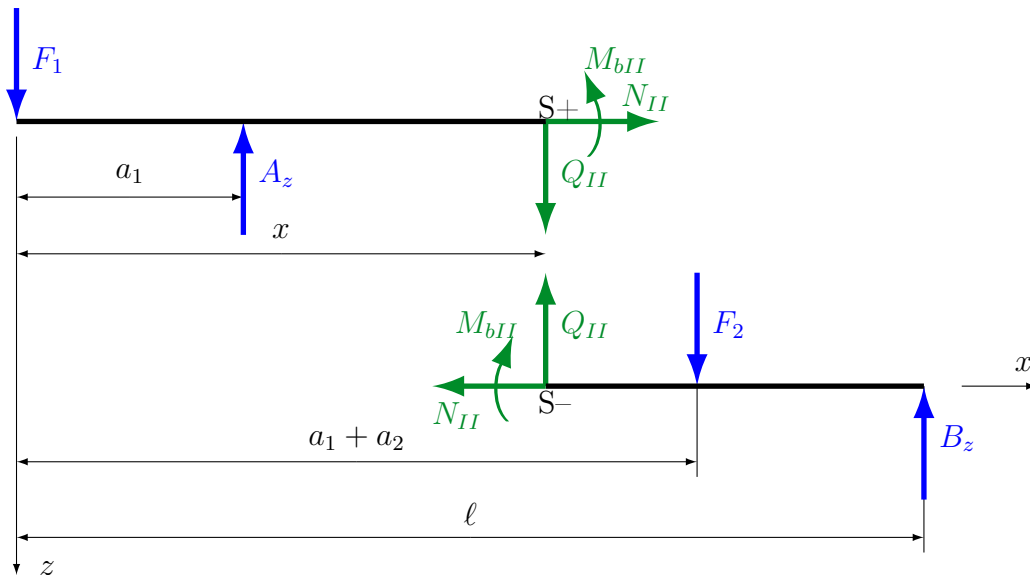
$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N_I \\ \sum Z &\equiv 0 = F_1 + Q_I \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bI} + F_1 x\end{aligned}$$

Nur eine Unbekannte in jeder Gleichung, das ist schön. So wird es immer sein, wenn wir das Momentengleichgewicht um die Schnittstelle aufstellen. Farbmarkierungen können also bei diesem Schritt künftig entfallen.

$$N_I = 0, \quad Q_I = -F_1, \quad M_{bI} = -F_1 x$$

Nun müssen wir den Bereich II behandeln. Wir gehen zwei Schritte zurück und beginnen von vorn

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle x

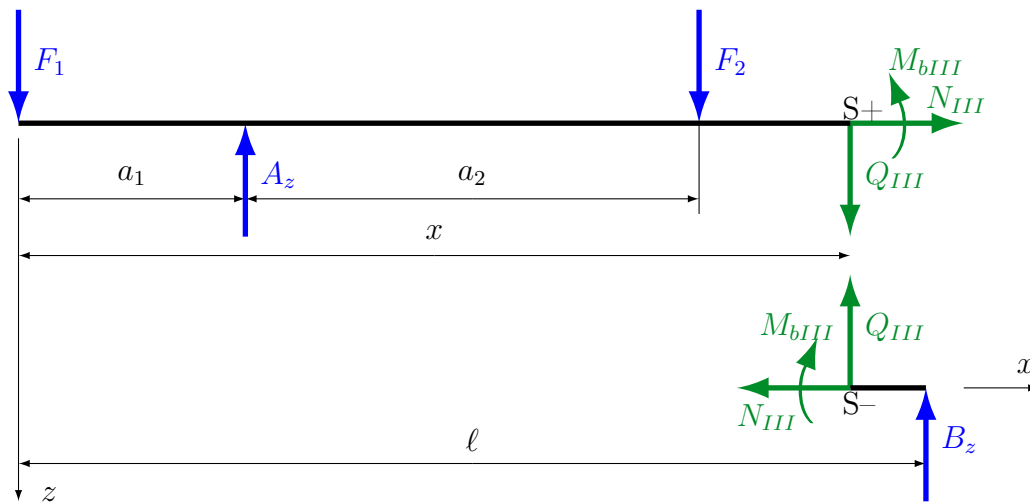


4. KG und MG um S, hier links

Erneut wählen wir das linke Balkenteil. An linken Balkenteilen sind die Hebelarme in der Regel etwas einfacher zu finden.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N_{II} \\ \sum Z &\equiv 0 = F_1 - A_z + Q_{II} \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bII} + F_1 x - A_z (x - a_1)\end{aligned}$$

$$N_{II} = 0, \quad Q_{II} = A_z - F_1, \quad M_{bII} = A_z (x - a_1) - F_1 x$$

3. Schneiden im Bereich III an der Stelle x 

4. KG und MG um S, hier rechts

Diesmal wählen wir das sehr überschaubare rechte Balkenteil. Die Hebelarme werden wir schon schaffen.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = -N_{III} \\ \sum Z &\equiv 0 = -Q_{III} - B_z \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bIII} + B_z(\ell - x)\end{aligned}$$

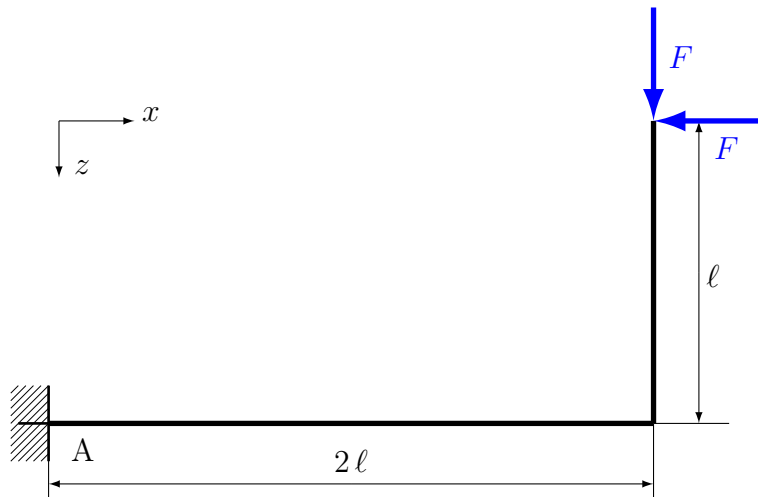
$$N_{III} = 0, \quad Q_{III} = -B_z, \quad M_{bIII} = B_z(\ell - x)$$

Wäre dies eine Übungs- oder Klausuraufgabe, so müssten wir die Lagerreaktionen A_z , B_z einsetzen, um auf verwertbare Ergebnisse zu kommen. Wir verzichten ausnahmsweise hier darauf und hoffen, dass solche Aufgaben etwas einfacher sind. Schauen wir uns eine Übungsaufgabe an.

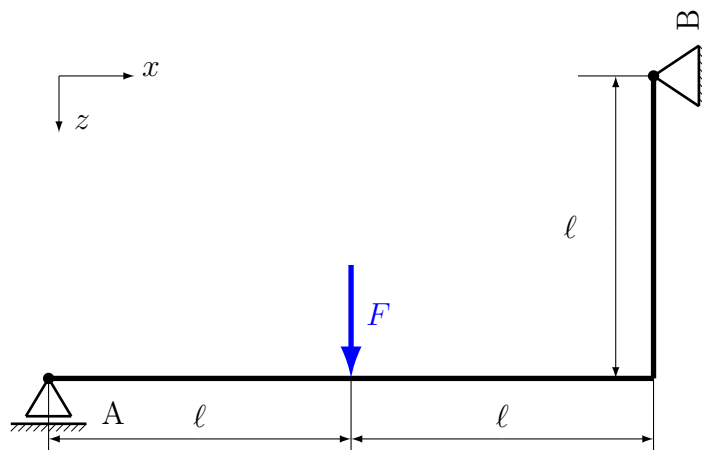
1.1.1 Übungsaufgabe, der Haken

Für die folgenden Anordnungen sind die Beanspruchungsgrößen zu ermitteln und graphisch darzustellen.

a)

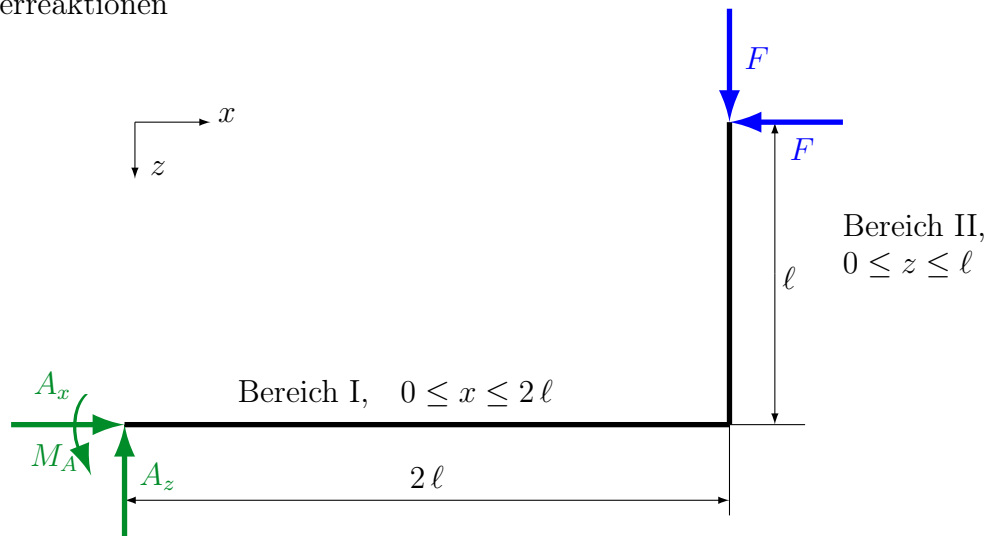


b)



a)

1. Lagerreaktionen



$$\sum X \equiv 0 = A_x - F$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F$$

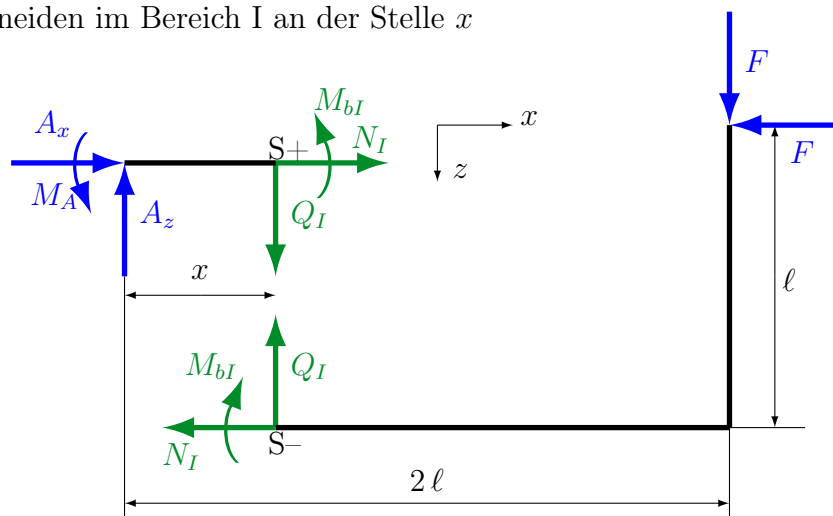
$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A + F\ell - F \cdot 2\ell$$

$$A_x = F, \quad A_z = F, \quad M_A = F\ell$$

2. Bereichseinteilung

Im obigen Bild sind die Bereiche bereits vermerkt. Grund für die Bereichsgrenze ist die Abwinklung. Im Bereich I wird der Balkenverlauf durch x beschrieben, im Bereich II durch z . Dies erfolgt übrigens von oben nach unten. Der Wechsel von x auf z stellt eine Unstetigkeit dar.

Bereich I: $0 \leq x \leq 2\ell$, Bereich II: $0 \leq z \leq \ell$

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle x 

4. KG und MG um S hier links

Das linke Balkenteil ist überschaubarer. Auch die Hebelarme sind einfach zu ermitteln. Lediglich das Vorhandensein von zwei Momenten an unterschiedlichen Stellen an einem Teil bedarf unserer Aufmerksamkeit (oder gerade nicht, wie wir gleich sehen werden).

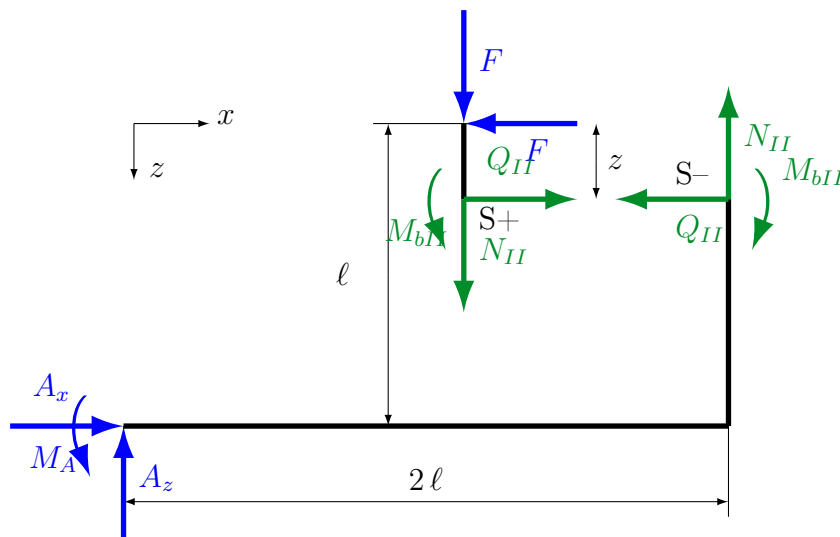
$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = A_x + N_I \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z + Q_I \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_A + M_{bI} - A_z x\end{aligned}$$

Die beiden Momente M_A , M_{bI} werden schlicht aufsummiert. Der Abstand x zwischen den beiden spielt überhaupt keine Rolle. In TM I haben wir gehört, dass Momente beliebig verschoben werden können. Wehe hier verpasst jemand einem Moment noch einen 'Hebelarm x '. Das gibt einen sehr hässlichen Einheitenfehler, der einem alles versaut.

$$N_I = -A_x, \quad Q_I = A_z, \quad M_{bI} = A_z x - M_A$$

Mit den bekannten Lagerreaktionen gilt:

$$N_I = -F, \quad Q_I = F, \quad M_{bI} = F(x - \ell)$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle z 

4. KG und MG um S hier oben

Unser Balkenstück verläuft ungewohnt. N und Q tauchen vertauscht auf. Außerdem ist die Laufvariable z .

$$\sum X \equiv 0 = -F + Q_{II}$$

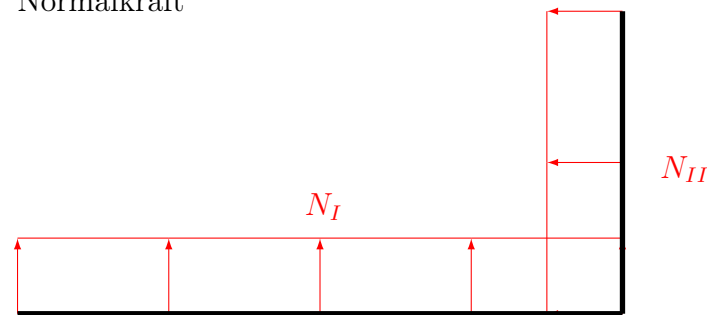
$$\sum Z \equiv 0 = F + N_{II}$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_{bII} + F z$$

$$Q_{II} = F, \quad N_{II} = -F, \quad M_{bII} = -F z$$

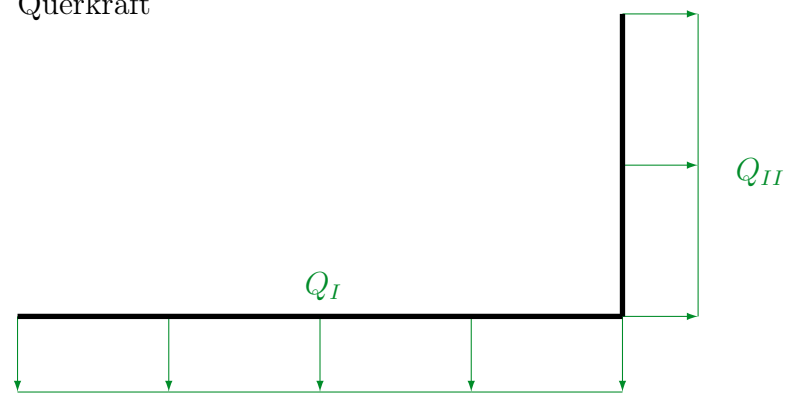
5. Graphische Darstellung der Beanspruchungsgrößen, nach unten ist positiv!

Normalkraft



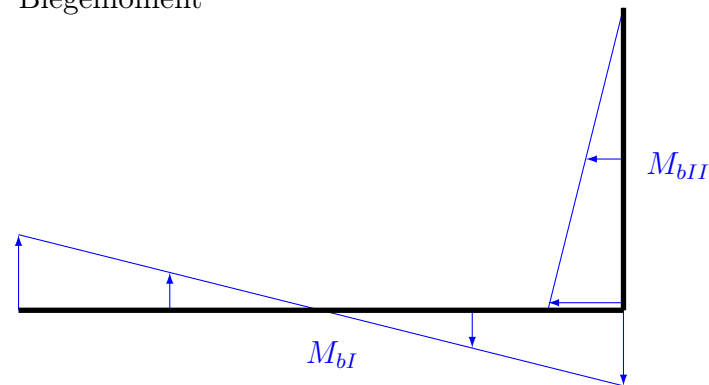
$$N_I = -F, \quad N_{II} = -F$$

Querkraft



$$Q_I = F, \quad Q_{II} = F$$

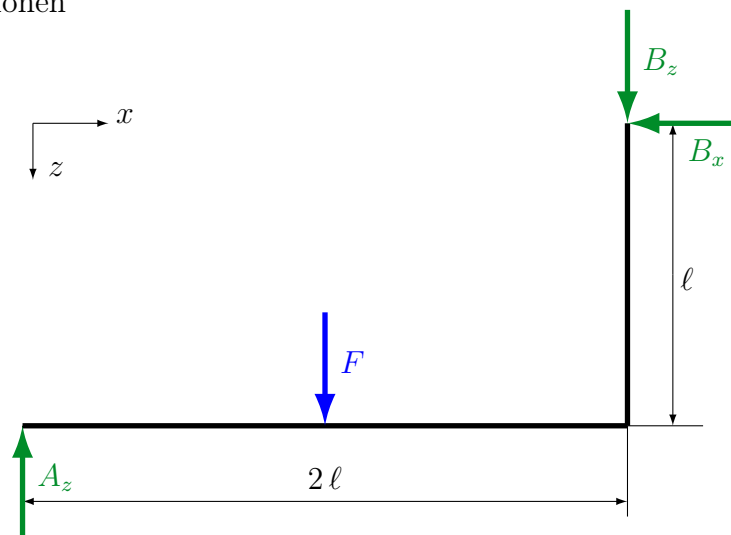
Biegemoment



$$M_{bI}(x=0) = -F\ell, \quad M_{bI}(x=2\ell) = +F\ell, \quad M_{bII}(z=0) = 0, \quad M_{bII}(z=\ell) = -F\ell.$$

b)

1. Lagerreaktionen



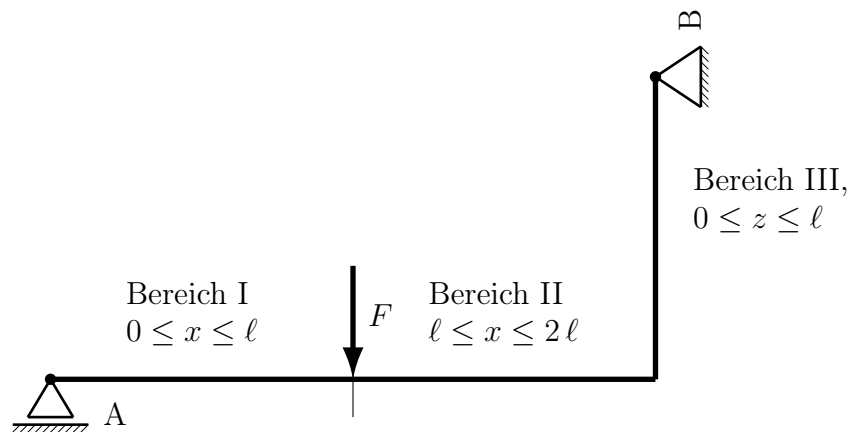
$$\sum X \equiv 0 = B_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F + B_z$$

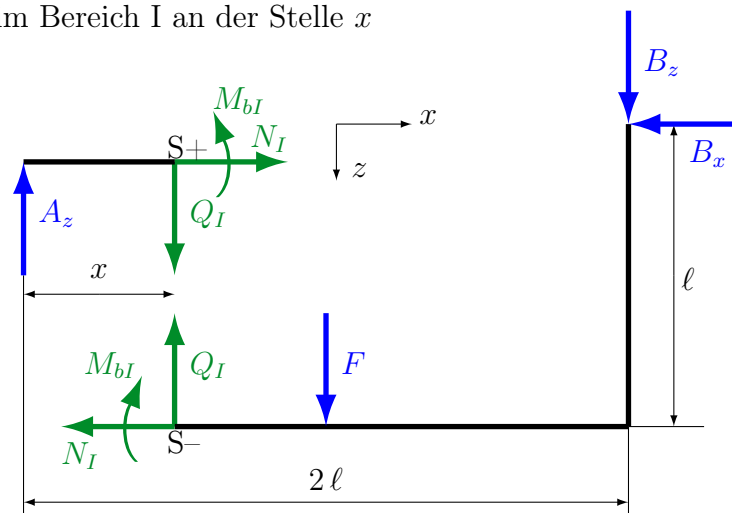
$$\sum M_{[B]} \equiv 0 = F\ell - A_z \cdot 2\ell$$

$$B_x = 0, \quad A_z = \frac{F}{2}, \quad B_z = -\frac{F}{2}$$

2. Bereichseinteilung



Drei Bereiche, na viel Spaß

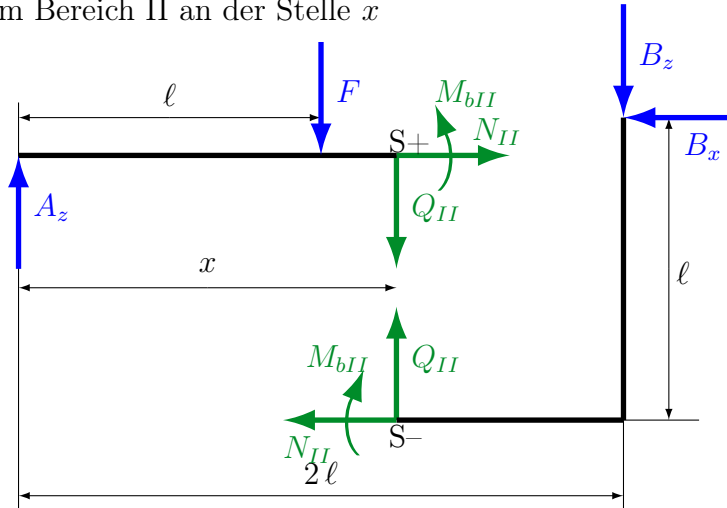
3. Schneiden im Bereich I an der Stelle x 

4. KG und MG um S hier links

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N_I \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z + Q_I \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bI} - A_z x\end{aligned}$$

Mit den bekannten Lagerreaktionen ergibt sich

$$N_1 = 0, \quad Q_1 = \frac{F}{2}, \quad M_{bI} = \frac{F x}{2}$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle x 

4. KG und MG um S hier links

$$\sum X \equiv 0 = N_{II}$$

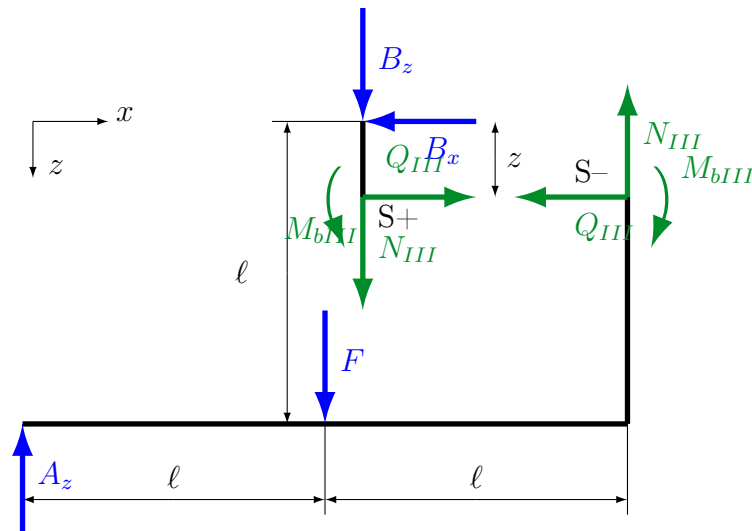
$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F + Q_{II}$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_{bII} - A_z x + F(x - \ell)$$

$$N_{II} = 0, \quad Q_{II} = A_z - F, \quad M_{bII} = A_z x - F(x - \ell)$$

Mit den bekannten Lagerreaktionen ergibt sich

$$N_{II} = 0, \quad Q_{II} = -\frac{F}{2}, \quad M_{bII} = F\left(\ell - \frac{x}{2}\right)$$

3. Schneiden im Bereich III an der Stelle z 

4. KG und MG um S hier oben

$$\sum X \equiv 0 = -B_x + Q_{III}$$

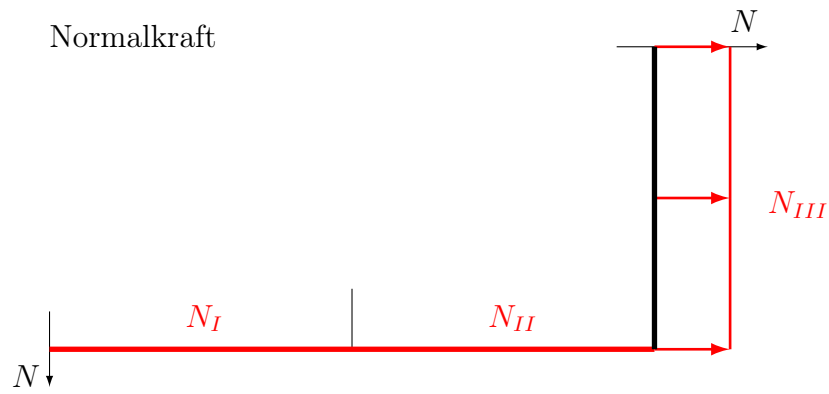
$$\sum Z \equiv 0 = B_z + N_{III}$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_{bIII} + B_x z$$

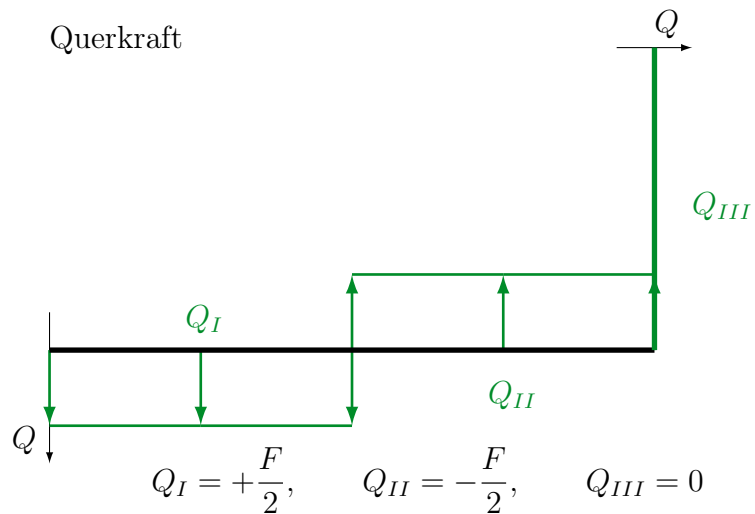
Mit den bekannten Lagerreaktionen ergibt sich

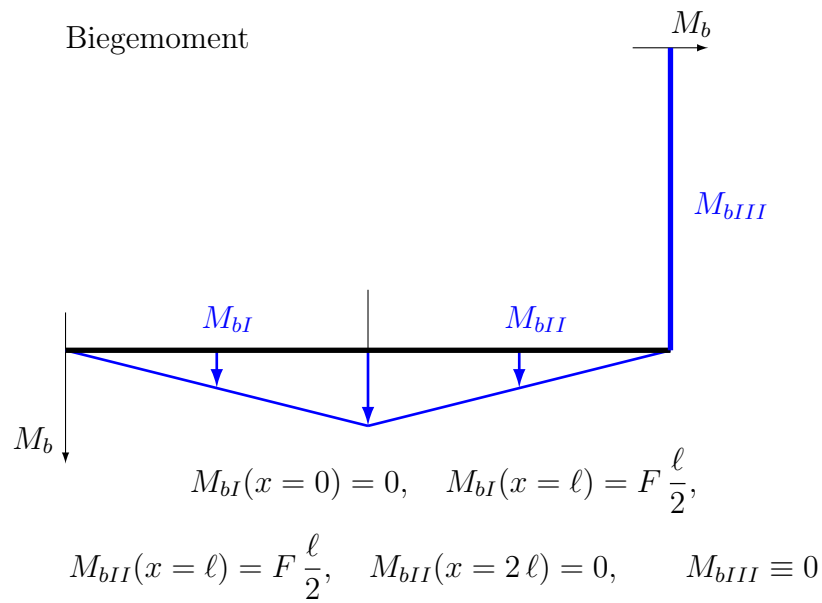
$$Q_{III} = 0, \quad N_{III} = \frac{F}{2}, \quad M_{bIII} = 0$$

5. Graphische Darstellung der Beanspruchungsgrößen, **nach unten ist positiv!**



$$N_I = 0, \quad N_{II} = 0, \quad N_{III} = \frac{F}{2}$$





■

1.2 Kontinuierliche Belastung bei Biegung

Wir bleiben bei der Ermittlung der Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b bei Biegung, wollen aber eine neu Art der Belastung von Balken kennenlernen. Bisher hatten wir Einzelkräfte, die punktförmig angreifen.

Gelegentlich tauchen aber Kraftverteilungen auf. Denken Sie beispielsweise an die Schneelast auf einem Flachdach. Bei diesem Beispiel verteilt sich die Gesamtgewichtskraft allen Schnees auf eine Fläche. Zudem kann es sein, dass die Schneehöhe nicht überall gleich ist, da es Verwehungen gibt.

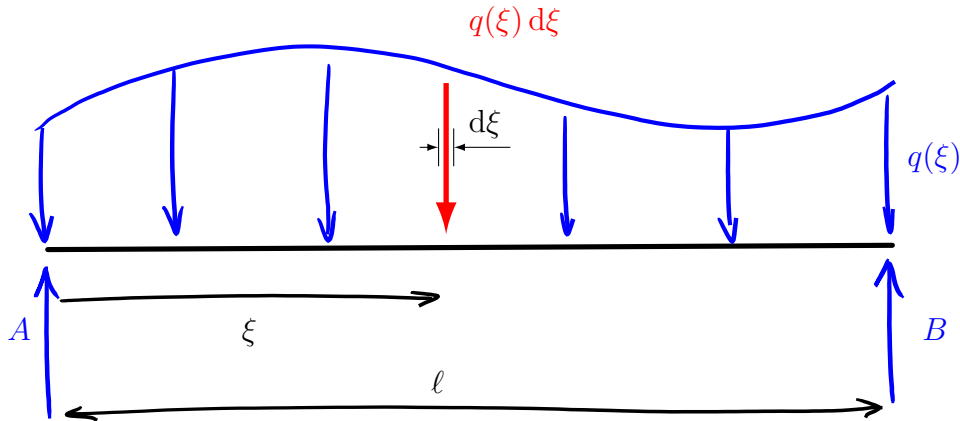
Weg von diesem Beispiel. Wir betrachten hier schlanke Strukturen mit 'Schneelast' (denken Sie an ein schmales Brett als Biegebalken). Über die Balkenlängsachse mag die Schneehöhe so variieren, dass das berücksichtigt werden muss. Hingegen kann die Variation der Schneehöhe über die geringe Balkenbreite gut vernachlässigt werden. Wir werden die Gesamt'schneelast' nicht auf eine Fläche, sondern nur auf die Balkenlängsachse beziehen.

Statt 'Kraft pro Fläche' beim Flachdach werden wir mit Kraft pro Strecke rechnen. Das ganze nennen wir Streckenlast.

Streckenlast: Formelzeichen q , Einheit N/m (Newton pro Meter).

Wir werden jetzt die Behandlung von Streckenlasten kennenlernen. Zunächst betreiben wir die mathematisch perfekte Methode mit Integration und dem schon von der Säule bekannten 'zweiten Maßband' ξ (ksi). In einer Übungsaufgabe dazu werden wir eine zweite, viel einfachere Methode kennenlernen, die aber eine gemeine Fehlergefahr hat. Sollte die Schneehöhe entlang der Balkenlängsachse unterschiedlich sein, so gilt $q = q(x)$ oder $q = q(\xi)$, je nachdem auf welches Maßband wir gerade schauen.

Betrachtet sei eine Belastung durch Streckenlast. Sie wird beschrieben als eine an der Stelle ξ wirkende differentielle Einzellast der Größe $q(\xi) d\xi$



1. Lagerreaktionen im gewohnten Koordinatensystem

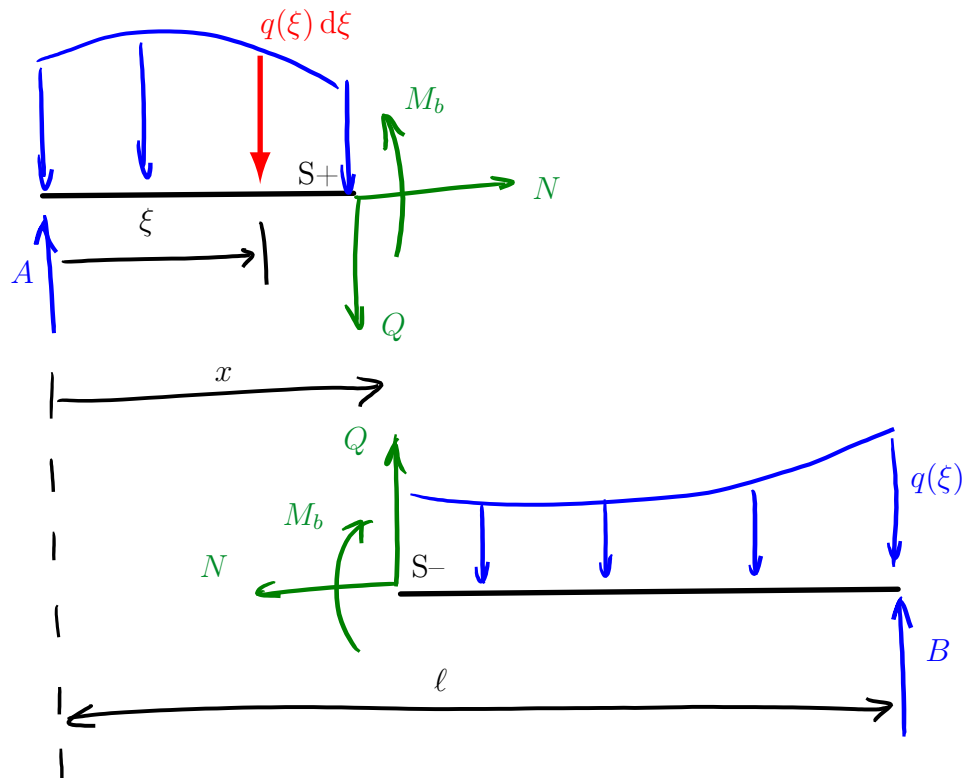
$$\sum Z \equiv 0 = -A - B + \int_0^{\ell} q(\xi) d\xi$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = B \ell - \int_0^{\ell} q(\xi) \xi d\xi$$

Wäre $q(\xi)$ gegeben, so wären A , B berechenbar. Wir setzen sie als bekannt voraus.

Unsere rote Beispielkraft $q(\xi) d\xi$ wandert von links ($\xi = 0$) nach rechts ($\xi = \ell$) den Balken entlang und wird aufsummiert (integriert). Im Momentengleichgewicht muss mit dem Hebelarm ξ multipliziert werden. Da die differentielle Größe in einem Integral immer am Schluss steht, haben wir den Hebelarm ξ 'dazwischen gequetscht'.

2. Bereichseinteilung: Nur ein Bereich. Es gilt $0 \leq x \leq \ell$.
 3. Schneiden im Bereich an der Stelle x



Da wir das linke Balkenteil betrachten werden, haben wir in das linke Teil die rote Beispielkraft $q(\xi) d\xi$ eingezeichnet.

4. KG und MG um S

$$\sum Z \equiv 0 = -A + Q + \int_0^x q(\xi) d\xi$$

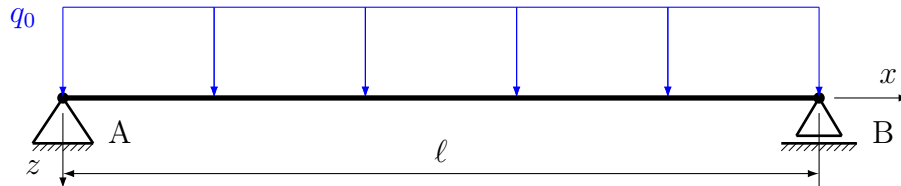
$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_b - Ax + \int_0^x q(\xi) (x - \xi) d\xi$$

Bei dem betrachteten linken Teil wird nur vom linken Ende ($\xi = 0$) bis zur Schnittstelle ($\xi = x$) integriert. Der Hebelarm der roten Beispielkraft lautet diesmal $(x - \xi)$. Hier wird noch einmal deutlich, wozu wir 'zwei Maßbänder' brauchen. x beschreibt immer die Schnittstelle, ξ benötigen wir als Laufvariable zum Integrieren.

Wir würden ja gerne integrieren aber leider, leider hat uns niemand gesagt, welche Funktion $q(\xi)$ hat. Bis auf diesen Schönheitsfehler könnten wir jetzt Q und M_b ausrechnen. Dass $N = 0$ ist, wussten wir von Anfang an.

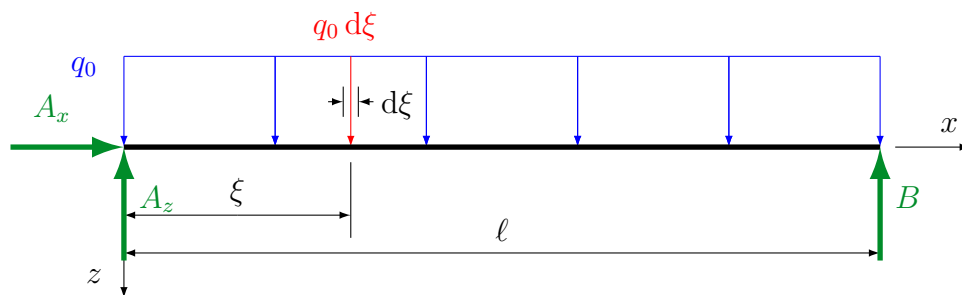
1.2.1 Übungsaufgabe, Streckenlast 2, 1

Wir behandeln einen Biegebalken mit Streckenlast. Erneut sind die Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b gesucht. In einem ersten Durchgang werden wir wie in der Vorlesung die vornehme Version mit Integration durchführen. Damit das funktioniert, haben wir eine besonders einfache Streckenlast. $q(\xi)$ wird konstant sein. Es wird gelten $q(\xi) = q_0 = \text{const}$



Gegeben: q_0 , ℓ , gesucht: Beanspruchungsgrößen.

1.) Lagerreaktionen



$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z - B + \int_0^{\ell} q_0 \, d\xi$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = B \ell - \int_0^{\ell} q_0 \xi \, d\xi$$

Letzte Gleichung: $q_0 \, d\xi$ ist die Kraft, das ξ dazwischen ist ihr Hebelarm.

Jetzt muss integriert werden. Aus den Mathevorlesungen müssten wir wissen, wie

Polynome integriert werden. Konstante Faktoren, bei uns ist das q_0 , bleiben unverändert erhalten. Summen im Integral werden Summandenweise einzeln integriert (hier gerade kein Problem). Ansonsten müssen wir nur folgende Fälle beherrschen: Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^\ell q_0 \, d\xi &= q_0 \xi \Big|_0^\ell \\ \int_0^\ell q_0 \xi \, d\xi &= q_0 \frac{\xi^2}{2} \Big|_0^\ell \\ \int_0^\ell q_0 \xi^2 \, d\xi &= q_0 \frac{\xi^3}{3} \Big|_0^\ell\end{aligned}$$

Der senkrechte Strich rechts außen liest sich: „In den Grenzen 0 bis ℓ “. Nach dem Integrieren müssen wir die Grenzen einsetzen. Zunächst wird ξ durch ℓ ersetzt (obere Grenze). Dann kommt ein Minuszeichen und das Ganze noch einmal, dabei wird ξ durch 0 (Null) ersetzt (untere Grenze). Immer wenn die untere Grenze Null ist, kann man sich den zweiten Schritt sparen, da kommt nichts bei raus, was abgezogen werden muss.

Weiter im Text. Wir sehen, dass $A_x = 0$ ist und machen mit dem Momentengleichgewicht weiter, um zunächst B zu berechnen.

$$\begin{aligned}B \ell &= \int_0^\ell q_0 \xi \, d\xi \\ B \ell &= q_0 \frac{\xi^2}{2} \Big|_0^\ell \\ B \ell &= q_0 \frac{\ell^2}{2} - 0 \\ B &= q_0 \frac{\ell}{2}\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis für B können wir aus dem KG in z-Richtung die Lagerreaktion A_z errechnen.

$$\begin{aligned}A_z &= -B + \int_0^\ell q_0 \, d\xi \\ A_z &= -B + q_0 \xi \Big|_0^\ell\end{aligned}$$

Wir setzen unser Ergebnis für B ein und für ξ die obere Integrationsgrenze ℓ , die untere ist 0 und liefert daher keinen Beitrag.

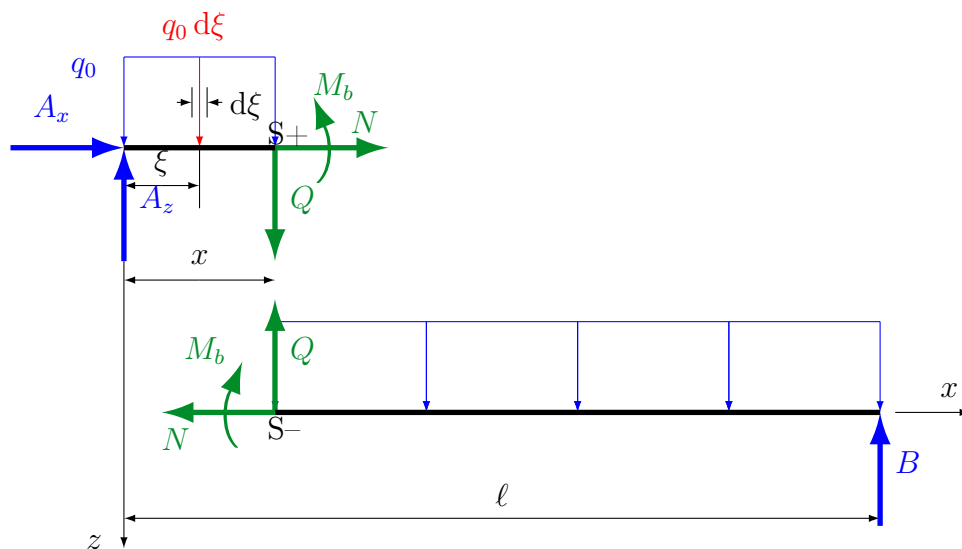
$$A_z = -q_0 \frac{\ell}{2} + q_0 \ell$$

$$A_z = q_0 \frac{\ell}{2}$$

Hinweis für unsere künftige zweite Methode, Streckenlasten zu behandeln. Beide Lagerkräfte A_z , B sind gleich und haben jeweils die Hälfte von $q_0 \ell$. Dieses $q_0 \ell$ repräsentiert die Gesamtkraft der gegebenen Streckenlast. $q_0 \ell$ ist gleichzeitig der Flächeninhalt unseres zeichnerischen Symbols (Rechteck) für die Streckenlast. Diese Erkenntnis werden wir später nutzen und die Integriererei umgehen.

- 2.) Bereichseinteilung, nur ein Bereich, es gilt $0 \leq x \leq \ell$
- 3.) Schneiden im Bereich an der Stelle x

Wir betrachten das linke Teil. Außerdem beachten wir die Regeln mit dem positiven und negativen Schnittufer beim Einzeichnen von N , Q , M_b . Wem das nichts sagt, bitte in vorherigen Unterlagen recherchieren.



- 4.) Kräfte- und Momentengleichgewicht um die Schnittstelle (kurz: KG und MG um S)
hier linkes Balkenteil

$$\sum X \equiv 0 = N$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + Q + \int_0^x q_0 \, d\xi$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -A_z x + M_b + \int_0^x q_0 (x - \xi) \, d\xi$$

Vorsicht: Die obere Bereichsgrenze ist jetzt x (nicht ℓ), denn bei x endet das von uns betrachtete linke, abgeschnittene Balkenteil.

Warum ist der Inhalt des letzten Integrals immer so verwirrend? Unsere differentielle Einzelkraft $q_0 \, d\xi$ wird immer zerrissen. Das liegt an der Schreibweise eines Integrals. Der Integralhaken ist der Anfang, die Größe $d\xi$ symbolisiert das Ende eines Integrals. $d\xi$ muss also an den Schluss. Dazwischen landet mit $(x - \xi)$ der Hebelarm der differentiellen Einzelkraft $q_0 \, d\xi$.

Wie üblich bei Punkt 4 können wir von oben nach unten die drei Gleichungen abarbeiten. Es ist pro Gleichung nur eine unbekannte Größe enthalten.

$$N = 0$$

$$Q = A_z - \int_0^x q_0 \, d\xi$$

Vorsicht jetzt kommen zwei Schritte gleichzeitig: 1. A_z ersetzen, 2. Integrieren

$$Q = q_0 \frac{\ell}{2} - q_0 \xi \Big|_0^x$$

Obere Grenze einsetzen, die untere taugt wieder zu nichts

$$Q = q_0 \frac{\ell}{2} - q_0 x$$

Das kann noch vereinfacht werden

$$Q = q_0 \left(\frac{\ell}{2} - x \right)$$

Einheitencheck: Newton durch Meter (q_0) mal Meter (ℓ oder x) gibt Newton. Das passt für die Querkraft Q .

Jetzt das Momentengleichgewicht. Im Integral steht ein Klammerausdruck. Es ist sehr empfehlenswert, ihn auszumultiplizieren.

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -A_z x + M_b + \int_0^x q_0 (x - \xi) d\xi$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -A_z x + M_b + \int_0^x (q_0 x - q_0 \xi) d\xi$$

Wieder 2 Schritte gleichzeitig. 1. nach M_b auflösen, 2. A_z ersetzen.

$$M_b = q_0 \frac{\ell}{2} x - \int_0^x (q_0 x - q_0 \xi) d\xi$$

Das Integral mit Differenz im Inneren wird in zwei Integrale aufgespalten. Auf die Vorzeichen achten.

$$M_b = q_0 \frac{\ell}{2} x - \int_0^x q_0 x d\xi + \int_0^x q_0 \xi d\xi$$

Jetzt wird endgültig klar, weshalb die zwei Maßbänder x , ξ so wichtig sind. Bei diesen Integrationen ist x eine Konstante, und ξ ist die Variable, über die integriert wird. Leider ist das sehr verwirrend, weil in Mathe immer über x integriert wird. Wir integrieren:

$$M_b = q_0 \frac{\ell}{2} x - q_0 x \xi \Big|_0^x + q_0 \frac{\xi^2}{2} \Big|_0^x$$

2 Schritte: 1. q_0 ausklammern, 2. obere Grenze einsetzen, ja, die untere ...

$$M_b = q_0 \left(\frac{\ell}{2} x - x^2 + \frac{x^2}{2} \right)$$

Da geht noch was. HEY: nicht nur abschreiben, selber nachrechnen

$$M_b = \frac{q_0 x}{2} (\ell - x)$$

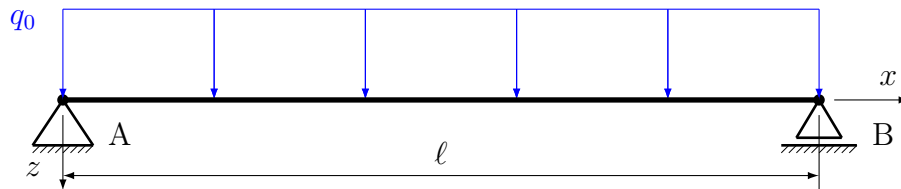
Einheitencheck: Newton durch Meter (q_0) mal Meter (x) mal Meter (ℓ oder x) ergibt Newton Meter, was wir für das Biegemoment M_b auch gerne so haben.

Wir stellen fest. Bei Streckenlasten ist die Querkraft Q nicht mehr konstant wie bisher, sondern linear von x abhängig. Das Biegemoment M_b war schon immer von x anhängig. Neu ist, dass M_b von x^2 abhängig ist, also einen parabolischen Verlauf hat (die Form einer Parabel hat).

Die graphische Darstellung der Ergebnisse wird zu einem späteren Zeitpunkt nachgeliefert.

Gleiche Übungsaufgabe mit Ersatzkräften

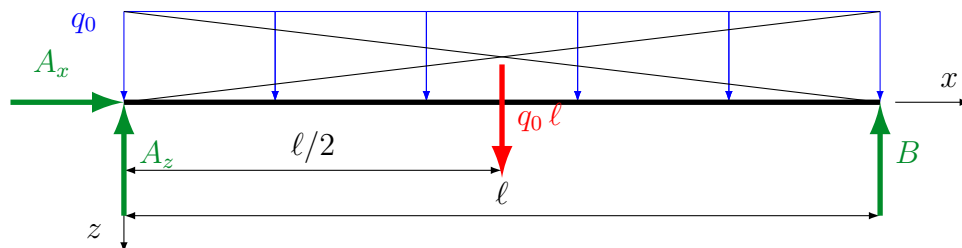
Es gibt eine sehr viel einfachere Vorgehensweise, bei der jedoch ein hässlicher Fehler möglich ist. **Roter Text wird auf die Gefahren hinweisen.**



Gegeben: q_0 , ℓ , gesucht: Beanspruchungsgrößen.

1.) Lagerreaktionen

Wir haben festgestellt, dass der „Flächeninhalt“ unserer Streckenlast in den Ergebnissen auftaucht. Wir haben hier eine rechteckförmige Streckenlast. Die Fläche eines Rechtecks berechnet sich aus dem Produkt der Kantenlängen. Bei uns ist die „Fläche“ der Streckenlast $q_0 \ell$. Sie repräsentiert die Gesamtkraft der Streckenlast. Wir lassen sie hilfsweise im Flächenschwerpunkt angreifen. Der Schwerpunkt wird mit den Diagonalen angedeutet. Er liegt auf halber Länge bei $\ell/2$ (wichtig), die halbe Höhe ist völlig unwichtig (Kräfte können längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden). Die Lagerreaktionen **und nur die** werden wir mit der Ersatzkraft $q_0 \ell$ bestimmen.



$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = A_x \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z - B + q_0 \ell \\ \sum M_{[A]} &\equiv 0 = B \ell - q_0 \ell \cdot \frac{\ell}{2}\end{aligned}$$

Das sieht schon sehr viel freundlicher aus. Wieder ziehen wir das Momentengleichgewicht vor, um zunächst B zu berechnen.

$$B \ell = \frac{q_0 \ell^2}{2}$$

$$B = \frac{q_0 \ell^2}{2 \ell}$$

Jetzt gaaaanz vorsichtig kürzen, da sind schon schlimme Sachen passiert.

$$B = \frac{q_0 \ell}{2}$$

Mit dem Ergebnis für B können wir aus dem KG in z-Richtung die Lagerreaktion A_z errechnen.

$$A_z = -B + q_0 \ell$$

$$A_z = -\frac{q_0 \ell}{2} + q_0 \ell$$

$$A_z = q_0 \frac{\ell}{2}$$

Der „Flächeninhalt“ der Streckenlast $q_0 \ell$ verteilt sich hälftig auf die beiden Lager. Wussten wir schon.

2.) Bereichseinteilung

Jetzt wird es gefährlich. Wir müssen die Ersatzkraft $q_0 \ell$ an halber Balkenlänge auf jeden Fall jetzt entfernen. Denn für die Bereichseinteilung und alles Weitere ist sie nicht existent.

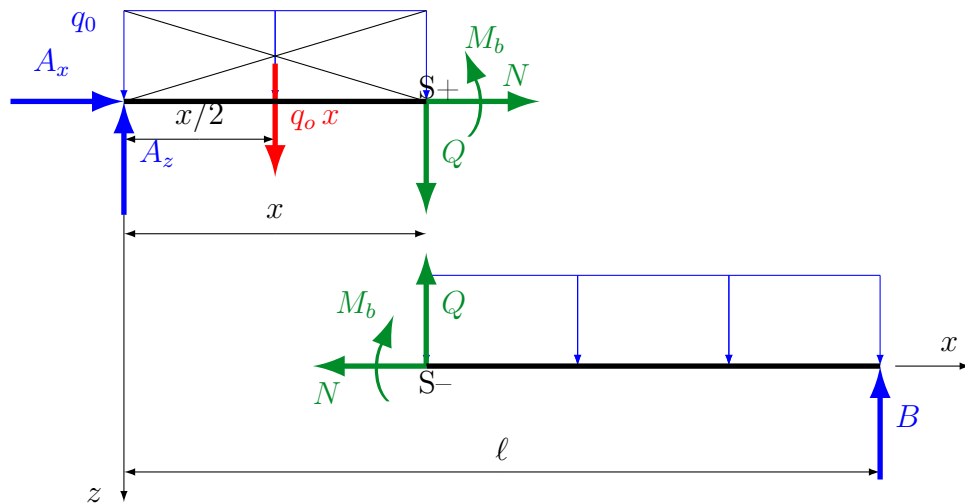
Nur ein Bereich, es gilt $0 \leq x \leq \ell$

Würden wir wegen der Ersatzkraft $q_0 \ell$ an halber Balkenlänge eine Bereichsgrenze einbauen, hätten wir ein riesen Problem. Wir müssten wegen der zwei Bereiche alles doppelt machen und alles wäre falsch. Wir haben nämlich keinen Balken mit Einzelkraft auf halber Länge.

3.) Schneiden im Bereich an der Stelle x

Wieder betrachten wir das linke Teil. Natürlich beachten wir die Regeln mit dem positiven und negativen Schnittufer beim Einzeichnen von N , Q , M_b .

Nun kommt eine **neue Ersatzkraft**. Die Regeln sind die gleichen, nur das Ergebnis ist anders. Die Streckenlast auf dem linken, abgeschnittenen Balkenteil hat einen „Flächeninhalt“ von $q_0 x$. Das ist unsere neue Ersatzkraft, die wir bei $x/2$ anbringen, egal von welcher Seite wir schauen.



4.) KG und MG um S

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = A_x + N \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z + Q + q_0 x \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -A_z x + M_b + q_0 x \cdot \frac{x}{2}\end{aligned}$$

Von oben nach unten

$$\begin{aligned}N &= 0 \\ Q &= q_0 \cdot \frac{\ell}{2} - q_0 x \\ Q &= q_0 \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \\ M_b &= A_z x - q_0 \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

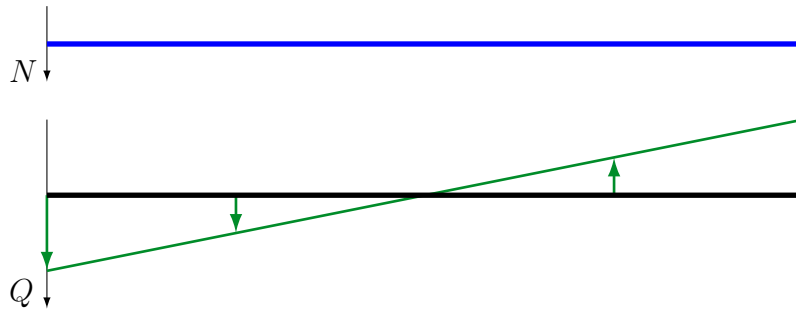
für A_z das Bekannte einsetzen

$$\begin{aligned}M_b &= q_0 \cdot \frac{\ell}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2} \\ M_b &= \frac{q_0 x}{2} (\ell - x)\end{aligned}$$

Einheitencheck nicht vergessen.

5.) Graphische Dartsellung der Ergebnisse

Jetzt wollen wir die Verläufe der Beanspruchungsgrößen ermitteln. N ist einfach, die Normalkraft ist immer Null. Q ist linear von x abhängig. Daher werden wir an den Bereichsgrenzen $x = 0$ und $x = \ell$ Werte bestimmen und dann eine Linie ziehen.



$$Q(x=0) = \frac{q_0 \ell}{2}; \quad Q(x=\ell) = -\frac{q_0 \ell}{2}$$

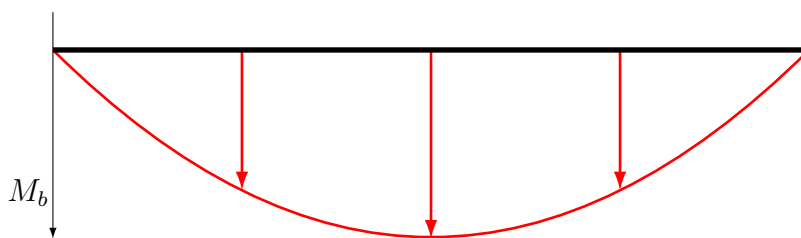
Wer hier Zahlenwerte vermisst, kann sich gerne selber welche schießen, z. B. $q_0 = 100 \text{ N/m}$, $\ell = 1 \text{ m}$. Wir kommen dann auf 50 N und -50 N

Beim Biegemomentenverlauf stellen wir fest, dass x^2 auftaucht (genau hingucken, wir haben vielleicht zu sehr ausgeklammert). Also haben wir parabolischen Verlauf. Wir werden wieder an den Bereichsgrenzen $x = 0$ und $x = \ell$ Werte bestimmen. Zusätzlich werden wir auf halber Balkenlänge $x = \ell/2$ einen Wert bestimmen. Wenn wir dann immer noch nicht ahnen, wohin der Hase läuft, dann schauen wir noch bei $x = \ell/4$ nach. Auf gehts, selber machen, hier gibt es nur Ergebnisse:

$$M_b(x=0) = 0; \quad M_b(x=\ell) = 0; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0 \ell^2}{8}; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{4}\right) = \frac{3 q_0 \ell^2}{32}.$$

Mit unseren Phantasie-Zahlenwerten kommt dabei heraus:

$$M_b(x=0) = M_b(x=\ell) = 0; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = 12,5 \text{ Nm}; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{4}\right) = 9,3 \text{ Nm}.$$



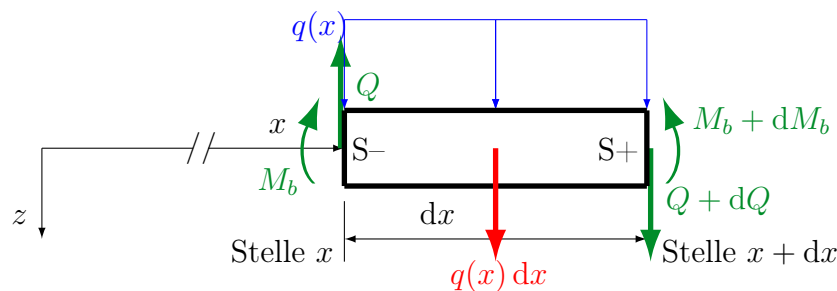
Raten Sie mal, wo der Balken kaputt geht, wenn er diese Last nicht tragen könnte.

1.3 Zusammenhang Biegemoment M_b , Querkraft Q und Streckenlast $q(x)$

Wir betrachten ein sehr kurzes Stück unseres Balkens mit der infinitesimalen Länge dx .

Die Normalkraft N wird hier von Anfang an weggelassen, wir gehen davon aus, dass sie wieder einmal null ist. Das infinitesimal kurze Stück Balken, das wir an der Stelle x aus unserem Gesamtbalken herausgeschnitten haben, wird übertrieben lang dargestellt, damit wir Platz zum Zeichnen haben. Es ist mit einer Streckenlast $q(x)$ belastet. Übrigens, das Maßband ξ brauchen wir hier nicht. Die Streckenlast könnte in ihrer Höhe variabel sein, jedoch würden wir das auf dem extrem kurzen Balkenstück dx nicht merken. Daher betrachten wir $q(x)$, nicht $q(\xi)$ oder q_0 . Positives/negatives Schnittufer wird beachtet.

Am linken Ende unseres betrachteten Stücks tragen wir Q und M_b regelgerecht an. dort ist die Stelle x . Am rechten Ende kommt zu jeder Größe eine differentielle Änderung hinzu.



Kraftgleichgewicht in z Richtung:

$$\begin{aligned} \sum Z \equiv 0 &= (Q + dQ) - Q + q(x) dx, \\ dQ &= -q(x) dx. \\ \frac{dQ}{dx} &= -q(x) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Momentengleichgewicht um das rechte Ende des Balkenstücks:

$$\sum M_{[\text{rechts}]} \equiv 0 = (M_b + dM_b) - M_b - Q dx + q(x) dx \frac{dx}{2}$$

Der Ausdruck $q(x) dx \frac{dx}{2}$ ist klein von zweiter Ordnung und wird vernachlässigt.

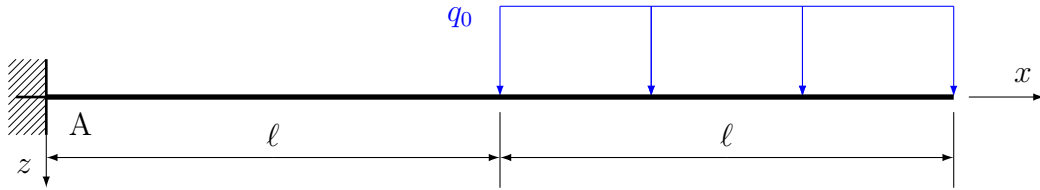
Dürfen wir das? Na klar. Wenn wir eine infinitesimale Zahl, die schon unendlich klein ist, quadrieren (dx^2), dann bleibt da nichts vernünftiges von über.

$$dM_b = Q dx$$

$$(II.2) \quad \frac{dM_b}{dx} = Q$$

Die Ableitung der Querkraft Q nach x ergibt die negative Streckenlast. Die Ableitung des Biegemoments M_b nach x ergibt die Querkraft. Wofür das gut ist, erschließt sich jetzt noch nicht. Zu einem späteren Zeitpunkt benötigen wir die beiden Zusammenhänge.

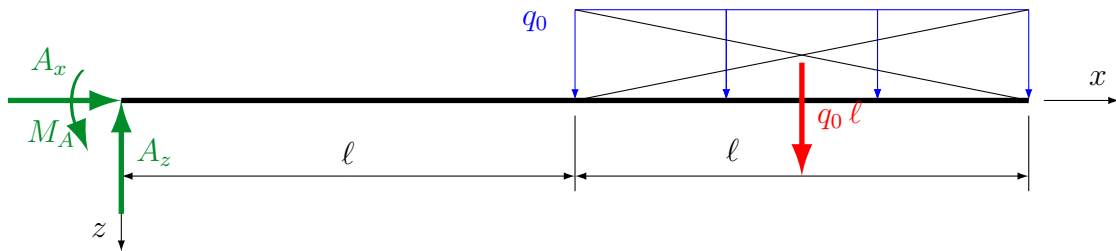
1.3.1 Übungsaufgabe, Teilstreckenlast



Gegeben: q_0 , ℓ , Gesucht: Beanspruchungsgrößen.

Zur Behandlung von Streckenlasten gibt es zwei Methoden. 1.) Integrieren über ξ . Das ist die mathematisch korrekte aber recht umständliche Methode. 2.) Verwendung von Hilfskräften. Ehrlicherweise kann ich für die Klausur nur letzteres empfehlen. Aus diesem Grunde werde ich hier nur das vorführen. Sie sind eingeladen, sich an der Integrationsmethode zu versuchen, es muss das gleiche herauskommen.

1. Lagerreaktionen Wir ersetzen die Streckenlast durch die Hilfskraft $q_0 \ell$ im Schwerpunkt des Streckenlastsymbols (Rechteck).



$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = A_x \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z + q_0 \ell \\ \sum M_{[A]} &\equiv 0 = M_A - q_0 \ell \cdot \frac{3}{2} \ell\end{aligned}$$

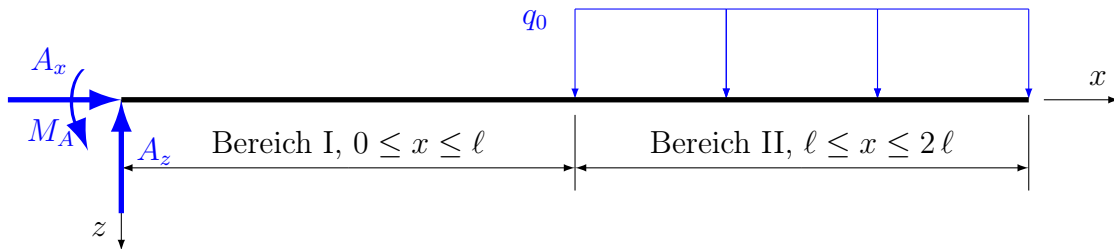
$$A_x = 0$$

$$A_z = q_0 \ell$$

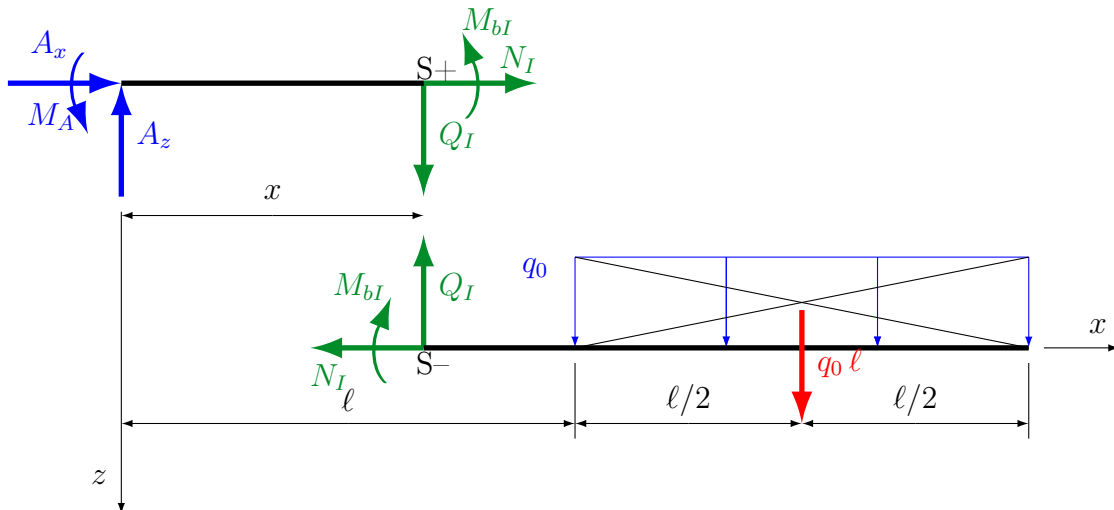
$$M_A = \frac{3}{2} q_0 \ell^2$$

2. Bereichseinteilung

An dieser Stelle müssen wir darauf achten, dass die Hilfskraft $q_0 \ell$ entfernt wird. Sie darf kein Grund für eine Bereichsgrenze sein

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle x

Die Eintragung der neuen (alten) Hilfskraft im rechten Balkenteil hätten wir uns sparen können, da wir das linke Balkenteil betrachten werden. Übung schadet nicht, daher doch eingezeichnet.



4. KG und MG um S, hier links

$$\begin{aligned}\sum X \equiv 0 &= N_I \\ \sum Z \equiv 0 &= -A_z + Q_I \\ \sum M_{[S]} \equiv 0 &= M_A + M_{bI} - A_z x\end{aligned}$$

$$N_I = 0$$

$$Q_I = A_z$$

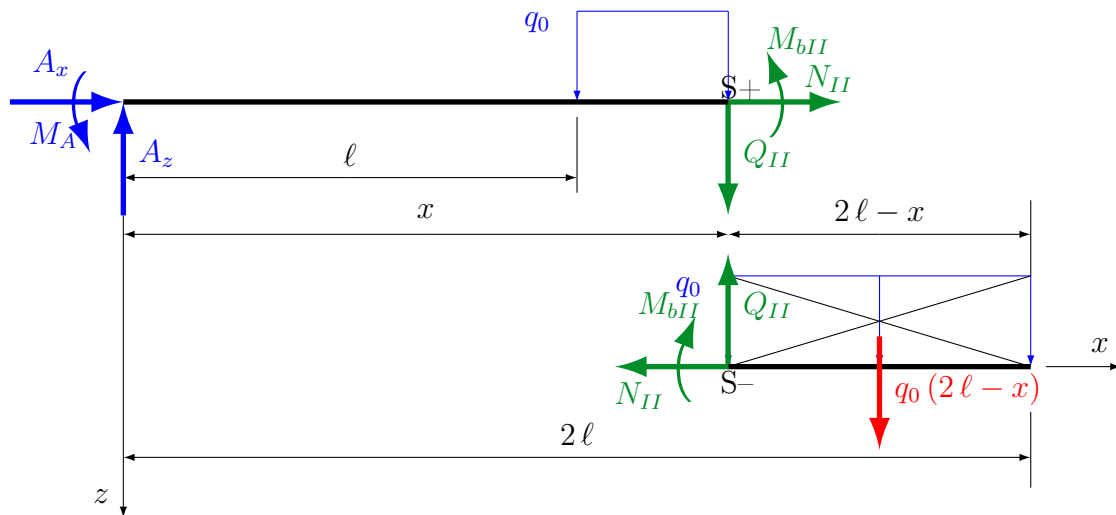
$$Q_I = q_0 \ell$$

$$M_{bI} = -M_A + A_z x$$

$$M_{bI} = -\frac{3}{2} q_0 \ell^2 + q_0 \ell x$$

$$M_{bI} = q_0 \ell \left(x - \frac{3}{2} \ell \right)$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle x



4. KG und MG um S, hier rechts

Im Zweifel nehmen wir immer das linke Balkenteil. Hier besteht aber gar kein Zweifel, dass das rechte Balkenteil weniger aufwändig ist. Also betrachten wir diesmal das rechte. Was im Schnittbild mangels Platz nicht eingezeichnet ist, ist der Hebelarm der Kraft $q_0(2\ell - x)$ bezüglich der Schnittstelle. Versuchen Sie ihn zunächst selbst zu finden. Komplizierte Hebelarme sind der Preis, den wir bezahlen, wenn wir rechte Balkenteile betrachten.

$$\begin{aligned}
\sum X &\equiv 0 = -N_{II} \\
\sum Z &\equiv 0 = -Q_{II} + q_0 (2\ell - x) \\
\sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bII} - q_0 (2\ell - x) \cdot \frac{2\ell - x}{2} \\
N_{II} &= 0 \\
Q_{II} &= q_0 (2\ell - x) \\
M_{bII} &= -q_0 \frac{(2\ell - x)^2}{2} \\
M_{bII} &= q_0 \left(2\ell x - 2\ell^2 - \frac{x^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

5. Graphische Darstellung

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
N_I &= 0, & Q_I &= q_0 \ell, & M_{bI} &= q_0 \ell \left(x - \frac{3}{2} \ell \right) \\
N_{II} &= 0, & Q_{II} &= q_0 (2\ell - x), & M_{bII} &= q_0 \left(2\ell x - 2\ell^2 - \frac{x^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

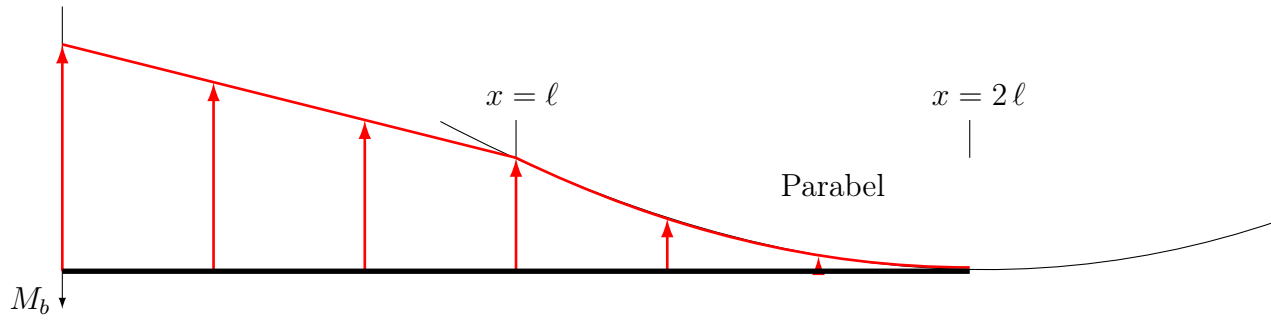
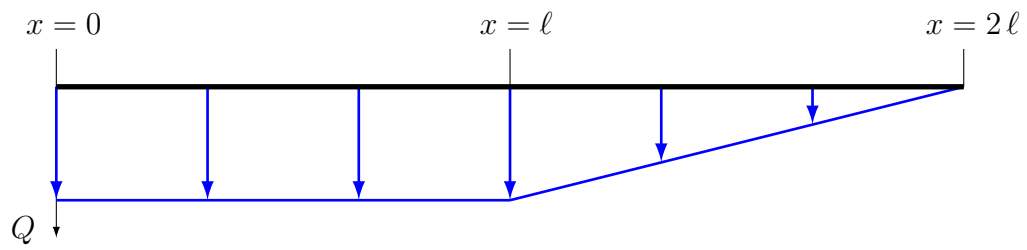
Die Normalkräfte sind beide Null und brauchen nicht dargestellt zu werden.

Die Querkraft im Bereich I ist konstant, im Bereich II verläuft sie linear mit x .

Das Biegemoment im Bereich I verläuft linear mit x , im Bereich II werden wir den Teil einer Parabel finden, da x^2 auftaucht.

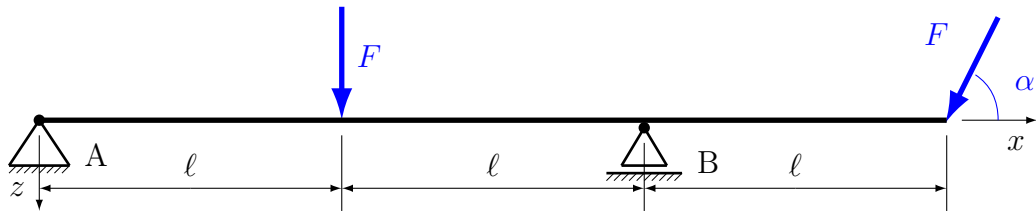
Sie berechnen an den Bereichsgrenzen Werte für Q und M_b . Zahlenwerte können Sie gerne erfinden. Bei dem Parabelast berechnen Sie noch einen Wert in Bereichsmitte bei $x = 3/2 \ell$. Falls das nicht reicht, errechnen Sie weitere Punkte. ■

Verläufe von Querkraft und Biegemoment



1.3.2 Übungsaufgabe, Sprungbrett

zum selber rechnen

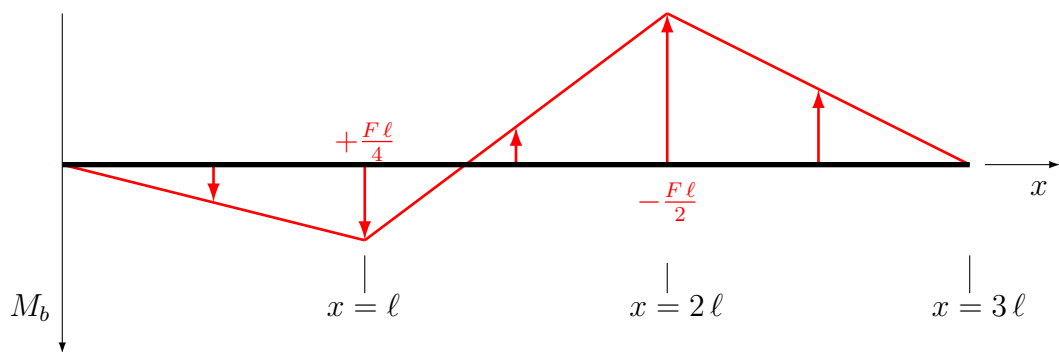
Gegeben: F , ℓ , α , gesucht: Beanspruchungsgrößen.

Ergebnisse:

Die Normalkräfte in allen Bereichen sind konstant mit den Werten $N = -F \cos \alpha$

Für die Querkräfte gilt:

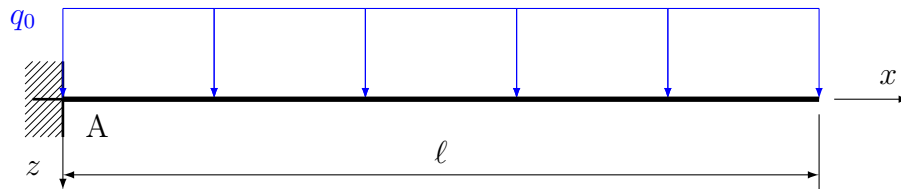
$$Q_I = \frac{F}{2} (1 - \sin \alpha), \quad Q_{II} = -\frac{F}{2} (1 + \sin \alpha), \quad Q_{III} = F \sin \alpha.$$

Bei den Biegemomenten ergibt sich der folgende Verlauf, wenn Sie annehmen $\alpha = 30^\circ$:

1.3.3 Übungsaufgabe, Streckenlast 3

zum selber rechnen

Bestimmen Sie die Beanspruchungsgrößen und stellen Sie diese graphisch dar.

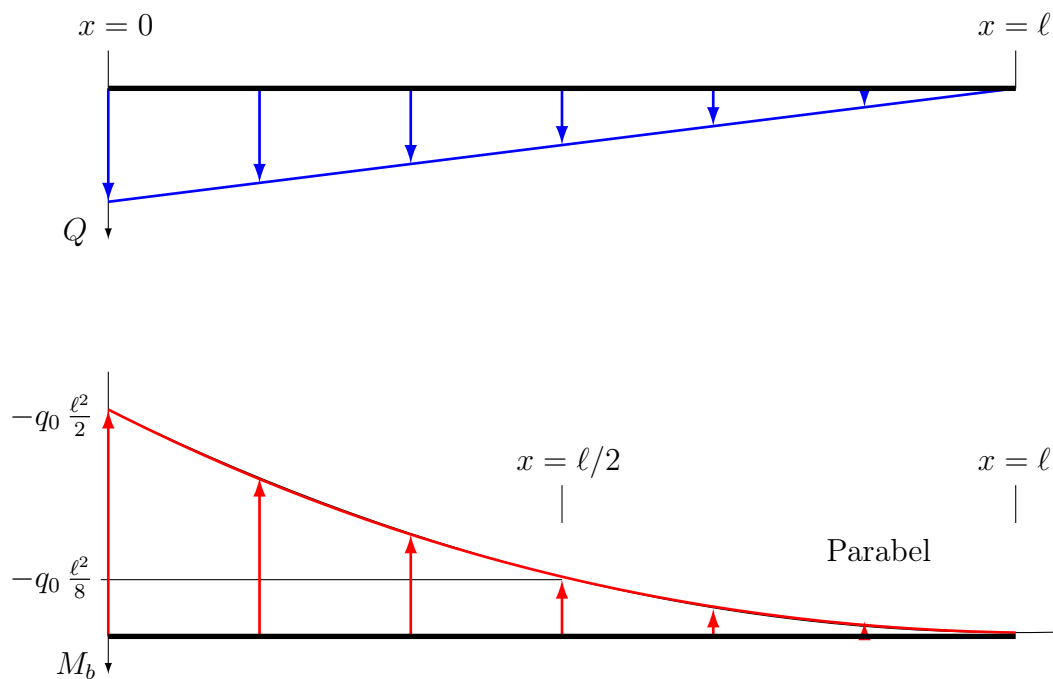


Gegeben: q_0 , ℓ

Lösungen:

$$N = 0, \quad Q = q_0 (\ell - x), \quad M_b = -\frac{q_0}{2} (\ell - x)^2.$$

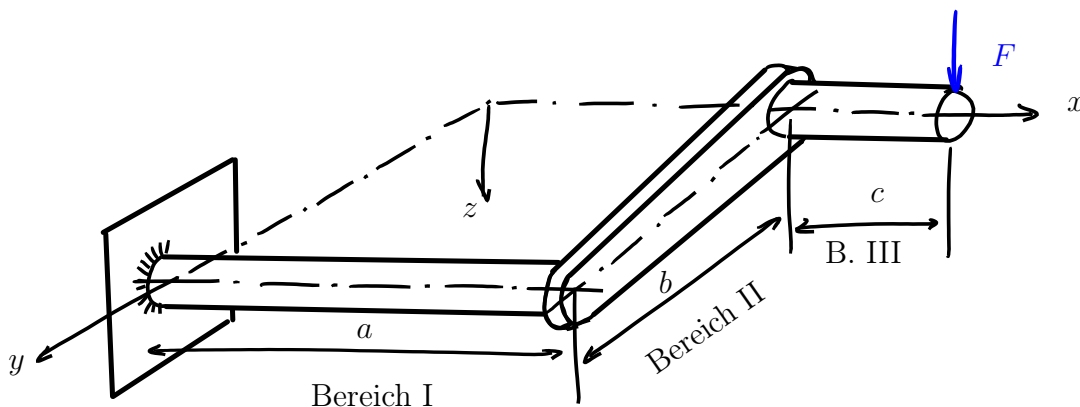
Verläufe von Querkraft und Biegemoment



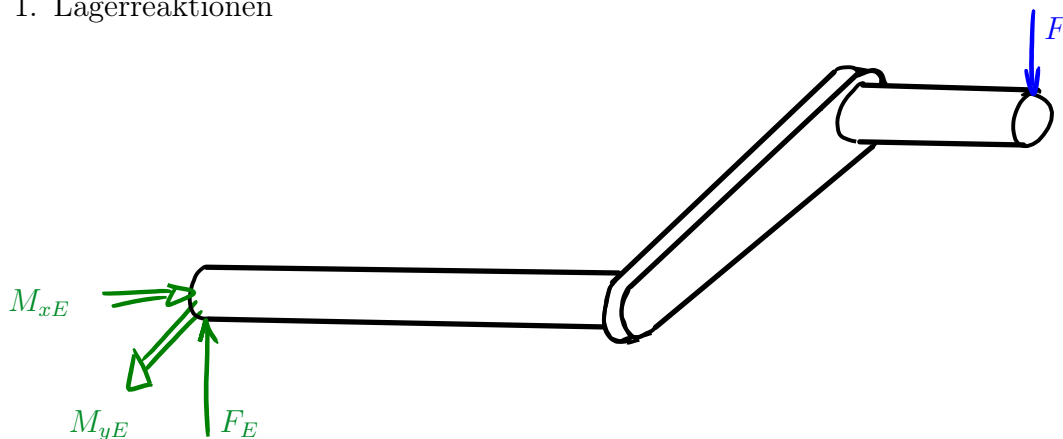
1.4 Zusammengesetzte Beanspruchung Biegung und Torsion

Nun betrachten wir zusammengesetzte Beanspruchungen. Das betrachtete Objekt, eine Handkurbel, ist extrem low tech. Trotzdem ist dieses Beispiel für maschinenbauliche Probleme gut anwendbar. Ersetzen Sie die Handkurbel gedanklich durch ein Zahnrad. Die am Handgriff wirkende Kraft entspricht der am Zahn, der sich gerade im Eingriff befindet angreifenden Kraft. Wenn Sie also im nächsten Semester Ihren Getriebebeleg erarbeiten, haben Sie hier eine Vorlage für die Ermittlung von Beanspruchungsgrößen in Getriebewellen. Wehe Sie sagen dann, „so etwas haben wir noch nie gehabt“.

Bisher hatten wir entweder Biegung (Biegebalken) oder Torsion (Torsionswellen). Nun betrachten wir einen Fall, bei dem beide Beanspruchungen kombiniert vorkommen.



1. Lagerreaktionen



Wir sehen auf den ersten Blick, dass keinerlei Kräfte in x -Richtung vorhanden sind, so dass wir auch keine Lagerreaktionen in x -Richtung eintragen. Neu ist bei der Lagerung, dass wir zwei Momente betrachten müssen.

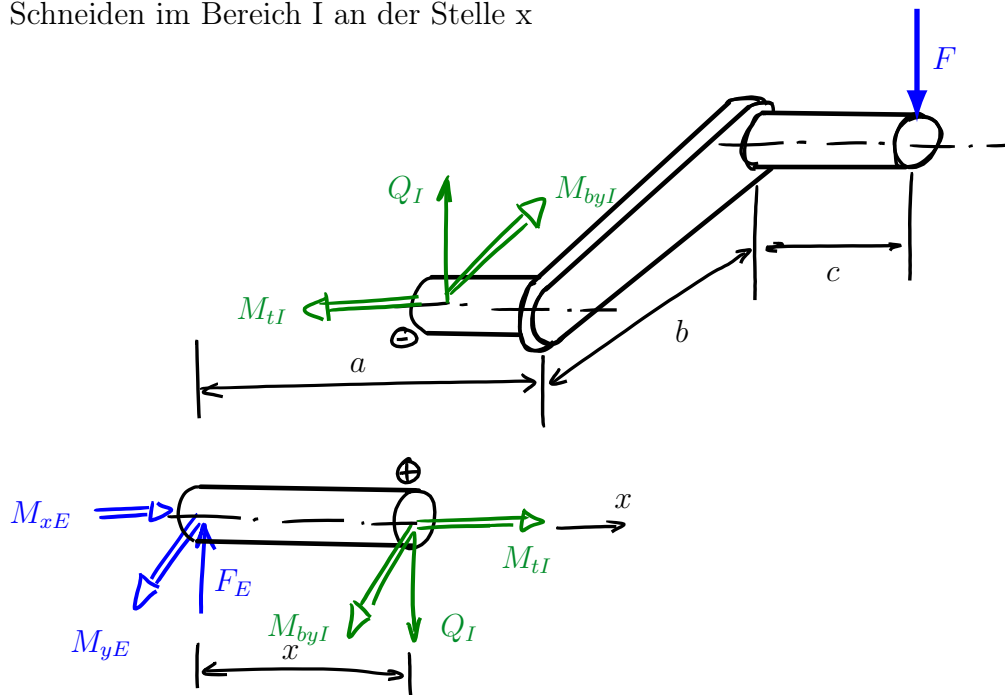
$$\begin{aligned}\sum Z &\equiv 0 = F - F_E \\ \sum M_{[x]} &\equiv 0 = -F b + M_{xE} \\ \sum M_{[y]} &\equiv 0 = -F(a + c) + M_{yE}\end{aligned}$$

$$F_E = F, \quad M_{xE} = F b, \quad M_{yE} = F(a + c)$$

Hier ist einiges ungewohnt. Bisher haben wir beim Momentengleichgewicht den Bezugspunkt angegeben, jetzt geben wir an, um welche Achse das MG vorgenommen wird. Der Bezugspunkt ist – auch ohne dass er angegeben wird – die Lagerungsstelle. Die Vorzeichenregel beim MG um y ist unsere altbekannte Uhrzeigersinnregel. Beim MG um x ist das Moment $F b$ negativ angesetzt, weil diese versuchte Drehbewegung im Koordinatensystem $y - z$ eine negative ist. Warum? Unser Moment $F b$ klappt nicht die y -Achse auf die z -Achse, sondern umgekehrt. Weiterer Erklärungsversuch: Die gekrümmten Finger der rechten Hand beschreiben das Moment (=angestrebte Drehbewegung) der Kraft F an der Kurbel. Dabei zeigt der Daumen nach links. Das ist gegen die x -Richtung, daher negativ.

Wer mit dieser Gedankenturnerei nicht klar kommt, stellt den Orts- und den Kraftvektor auf und berechnet das Kreuzprodukt. Vorzeichen werden dann berechnet und nicht durch scharfes Hingucken bestimmt.

2. Bereichseinteilung Es gibt 3 Bereiche, siehe Aufgabenstellung.
3. Schneiden im Bereich I an der Stelle x



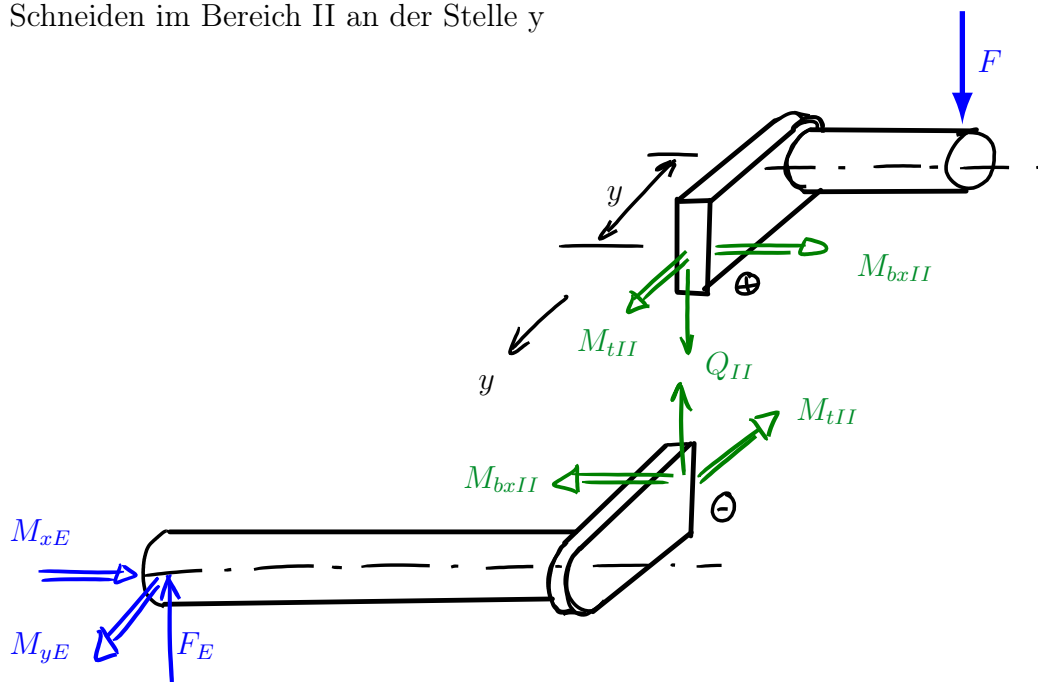
Wir haben wieder drei Beanspruchungsgrößen, jedoch diesmal andere. Die Normalkraft haben wir in unserer Voraussicht weggelassen, sie wäre Null; hinzu kommt das Torsionsmoment, weil wir an der Kurbel drehen.

4. KG und MG um S hier rechts

$$\begin{aligned}\sum Z &\equiv 0 = F - Q_I \\ \sum M_{[x]} &\equiv 0 = -F b - M_{tI} \\ \sum M_{[y]} &\equiv 0 = -F(a + c - x) - M_{byI}\end{aligned}$$

$$Q_I = F, \quad M_{tI} = -F b, \quad M_{byI} = -F(a + c - x)$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle y



4. KG und MG um S hier oben/hinten

$$\begin{aligned}\sum Z &\equiv 0 = F + Q_{II} \\ \sum M_{[x]} &\equiv 0 = -F y + M_{bxII} \\ \sum M_{[y]} &\equiv 0 = -F c + M_{tII}\end{aligned}$$

$$Q_{II} = -F, \quad M_{bxII} = F y, \quad M_{tII} = F c$$

Ungewöhnlich ist im Bereich II, dass das Torsionsmoment ein Moment um y und das Biegemoment eines um x ist. Im Bereich I war es umgekehrt. Das liegt daran, dass die betrachtete Struktur im Bereich II (Kurbelwange) rechtwinklig zur Struktur im Bereich I liegt.

3. und 4. Bereich III

Der Bereich III kann leicht selbst gelöst werden, wenn das rechte Teil betrachtet wird.

$$Q_{III} = F, \quad M_{byIII} = -F(a + c - x)$$

2 Spannungsanalyse

Wir wenden uns jetzt einem gänzlich neuen Thema zu. Wir wollen kennenlernen, wozu die Beanspruchungsgrößen eigentlich gut sind.

Zielstellung: Lokale innere Beanspruchungen, d.h. der innere Spannungszustand in jedem Punkt eines Körpers ist zu untersuchen.

Methode: Zerschneiden des Körpers in infinitesimale Volumenelemente und Freilegen von Schnittkräften auf den Schnittflächen. Stellen Sie sich vor, wir zersägen unseren Biegebalken in lauter kleine Quader, die nur wenige Millimeter Kantenlänge haben.

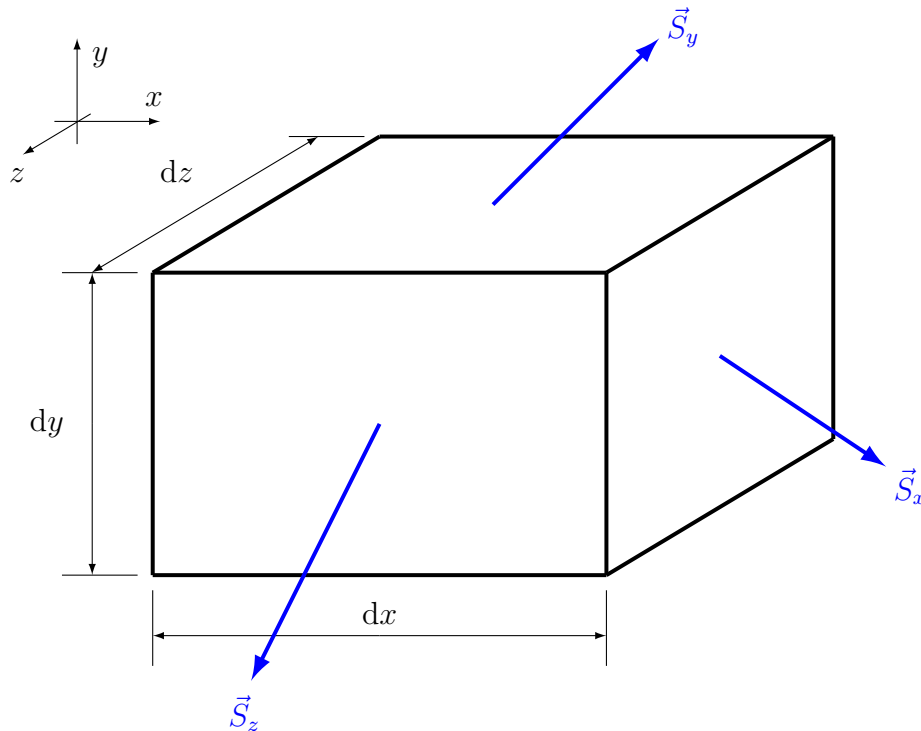
Die freigelegten Schnittkräfte sind in unerwünschter Weise vom jeweiligen Flächeninhalt abhängig: große Fläche, große Kraft, kleine Fläche, kleine Kraft.

Daher: Definition von Spannungsvektoren und Komponenten von Spannungsvektoren.

$\vec{S}$: Spannungsvektor, σ, τ : Spannungskomponenten (sigma, tau)

Wir werden später feststellen, dass die Komponenten des Spannungsvektors $\vec{S}$ unterschiedliche Buchstaben bekommen, je nach dem ob die Komponenten senkrecht auf der Fläche stehen (σ) oder in der Fläche liegen (τ). Unser einstmals kennengelernter Spannungsvektor $\vec{t}$ im Zusammenhang $\vec{t} df$ taucht nicht wieder auf.

$$\dim(\vec{S}, \sigma, \tau) : \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}; \quad \text{Einheit: } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}, \quad \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$$



Hinweise: 1. Unser Koordinatensystem hat sich geändert.

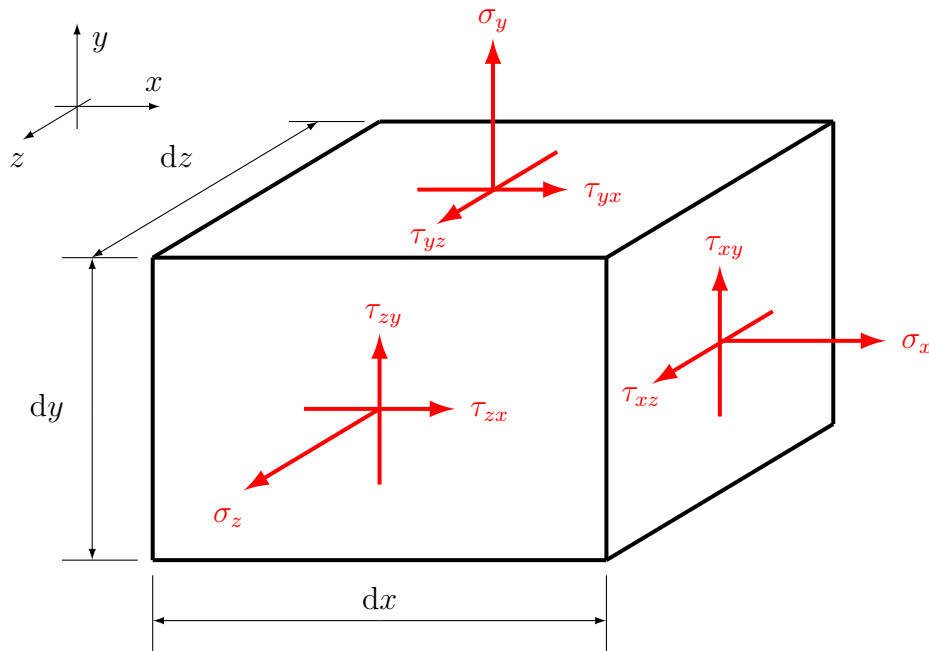
2. Die Bezeichnungen $\vec{S}_x$, $\vec{S}_y$, $\vec{S}_z$ können leicht missverstanden werden. Es sind keineswegs Komponenten eines Vektors sondern vollständige Spannungsvektoren, erkennbar daran, dass ein Pfeil über S angebracht ist. Die Indizes haben eine andere Bedeutung. Der Spannungsvektor $\vec{S}_x$ hat den Index x , weil es der Vektor ist, der auf einer bestimmten Fläche steht. Es ist die Fläche aus der die x -Achse herauskommt. Das heißt nicht, dass der Vektor exakt in x -Richtung zeigt. Der Skizze können wir gut entnehmen, dass das nicht der Fall ist.

3. Durch das Schneiden werden in Wahrheit keine Spannungen freigelegt, sondern Kräfte. Korrekt ist demzufolge diese Formulierung:

Durch Schnitt freigelegt werden die infinitesimalen Kraftvektoren

$$\vec{S}_x dy dz, \quad \vec{S}_y dx dz, \quad \vec{S}_z dx dy$$

mit den Spannungsvektoren $\vec{S}_x$, $\vec{S}_y$, $\vec{S}_z$. Diese werden in Richtung der Koordinatenachsen zerlegt.



Es gilt

$$(II.3) \quad \vec{S}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_y = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_z = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Bezeichnungen

σ : Normalspannungen (Index = Normalenrichtung der Schnittfläche)

τ : Schubspannungen (erster Index = Normalenrichtung der Schnittfläche, zweiter Index = Spannungsrichtung)

Für Spannungskomponenten gibt es strenge Vorzeichenregeln, wegen derer wir schon im Vorfeld unsere Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b nach der Regel mit dem pos./neg. Schnittufer anbringen mussten.

Vorzeichenregel Achtung, Abweichung vom bisherigen Umgang mit Kräften.

Normalspannungen σ sind positiv, wenn von der Fläche weg nach außen zeigend (Zugspannung). Druckspannungen sind negativ. Künftig werden Normalspannungen immer ziehend eingezeichnet.

Schubspannungen τ sind positiv, wenn in positiver Achsenrichtung wirkend **und** wenn die zugehörige Flächennormale in positive Richtung zeigt.

Die Vorzeichenregel für Normalspannungen ist einfach und wichtig, die für Schubspannungen ist kompliziert aber nicht ganz so wichtig. Betrachten Sie trotzdem das Volumenelement auf Seite 53. Drei Oberflächen des Volumenelements sind sichtbar. Die Normalenvektoren der sichtbaren Oberflächen (Länge eins, Richtung senkrecht zur Fläche nach außen) zeigen alle in positive Koordinatenrichtung. Alle eingezeichneten Schubspannungen τ zeigen in positive Koordinatenrichtung. Nach obiger Vorzeichenregel sind es positive Schubspannungen.

Jetzt wird es verwirrend: Auf der Rückseite unseres Volumenelements zeigen die Normalenvektoren in negative Koordinatenrichtung. Deshalb zeigt eine positive Schubspannung auf den nicht sichtbaren Oberflächen in negative Koordinatenrichtung. Alles klar?

Somit ist der Spannungszustand im Punkt $S(x, y, z)$ oder gleichbedeutend am Volumenelement $S(x, y, z)$ beschrieben durch die Spannungsmatrix

$$(II.4) \quad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Wir werden in absehbarer Zeit mit Matrizen rechnen, momentan ist diese Spannungsmatrix nur ein „Formular“, in das unsere insgesamt neun Spannungskomponenten an vorgeschriebenen Positionen eingetragen werden sollen. Der Umkehrschluss gilt natürlich auch. Wenn wir eine Spannungsmatrix mit Zahlenwerten sehen, können wir die Zahlenwerte den Formelzeichen zuordnen.

Spannungsmatrix und Volumenelement gehören auf das erlaubte Hilfsmittel der Klausur!

2.1 Differentielle Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement

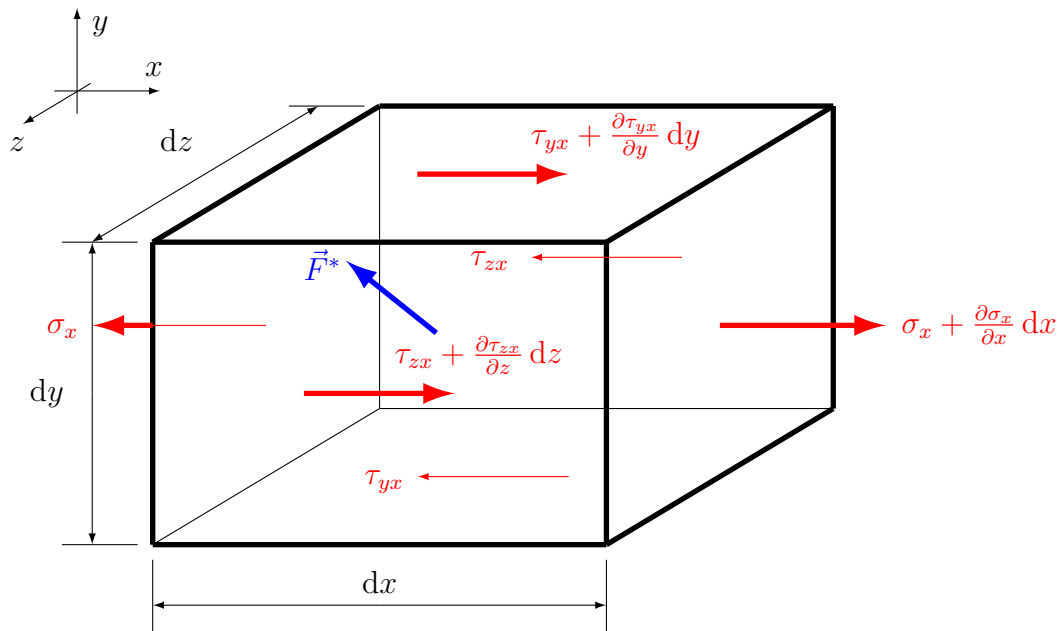
Dieses Kapitel ist eine Herleitung gewisser Zusammenhänge, die zu einem späteren Zeitpunkt von Bedeutung sind.

Auf unser Volumenelement wirken jetzt nicht nur unsere insgesamt neun Spannungskomponenten; zusätzlich wirkt eine äußere differentielle Kraft $d\vec{F}$. Diese Kraft $d\vec{F}$ wird durch das differentielle Volumen dV unseres Volumenelements geteilt, wir nennen diesen Differentialquotienten $\vec{F}^*$.

$$\vec{F}^* = \begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{pmatrix} = \frac{d\vec{F}}{dV}$$

$$\dim(\vec{F}) : \text{Kraft}, \quad \dim(\vec{F}^*) : \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^3}$$

Wir betrachten jetzt ein Volumenelement mit den Kantenlängen dx , dy , dz . Dieses Volumenelement hat in ihrem Inneren die volumenbezogene Kraft $\vec{F}^*$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit zeichnen wir nur Spannungskomponenten ein, die in oder gegen die x -Richtung wirken.



Hinzukommen diesmal die Spannungskomponenten von den Rückseiten unseres Volumenelements (dünn gezeichnet). Sie haben die vertrauten Namen σ_x , τ_{yx} , τ_{zx} . Bei den Spannungskomponenten auf den sichtbaren Oberflächen finden wir diese Namen wieder, es gibt jedoch jeweils einen Zusatz, der addiert wird. Beispiel:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy : \quad \text{Änderung von } \tau_{xy} \text{ über } y \text{ mal Kantenlänge } dy$$

Für einige dürfte ∂ , das „runde d“, unbekannt sein. Es handelt sich um das Symbol für ein partielles Differential. Hintergrund: Wir haben drei Variablen x, y, z . Wenn nun ein partieller Differentialquotient wie $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ auftaucht, so soll über y differenziert werden, wobei die anderen Variablen x, z als konstant anzusehen sind. Keine Sorge, wir werden nicht differenzieren, wir brauchen nur die mathematisch korrekten Zusammenhänge.

Nächster Schritt:

Kräftegleichgewicht in x-Richtung. Vorsicht: es gibt kein „Spannungsgleichgewicht“. Daher werden Spannungen über die jeweiligen Flächeninhalte in Kräfte umgerechnet.

$$\begin{aligned}\sum X \equiv 0 = & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy dz \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy \\ & + X^* dx dy dz\end{aligned}$$

Innerhalb der Klammern heben sich die einfachen Größen gegeneinander auf. Danach finden wir in jeder Zeile den Faktor $dx dy dz$, den wir kürzen können. Für die y - und z -Richtung gibt es ganz entsprechende Zusammenhänge.

Es folgt aus den Kräftegleichgewichten in x , y , z -Richtung das System der differentiellen Gleichgewichtsbedingungen im karthesischen Koordinatensystem x, y, z .

$$\begin{aligned}\text{(II.5)} \quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X^* = 0 \\ & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y^* = 0 \\ & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z^* = 0\end{aligned}$$

Beispiel für die Volumenkraft $\vec{F}^* = \frac{d\vec{F}}{dV}$: Eigengewichtskraft eines massebehafteten Körpers.

Zunächst betrachten wir die Eigengewichtskraft $\vec{F}$ eines ausgedehnten Körpers

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho V g \\ 0 \end{pmatrix}$$

und jetzt die differentielle Eigengewichtskraft eines differentiellen Körpers

$$d\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho g dV \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho g \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{F}^*,$$

so dass

$$X^* = 0, \quad Y^* = -\varrho g, \quad Z^* = 0.$$

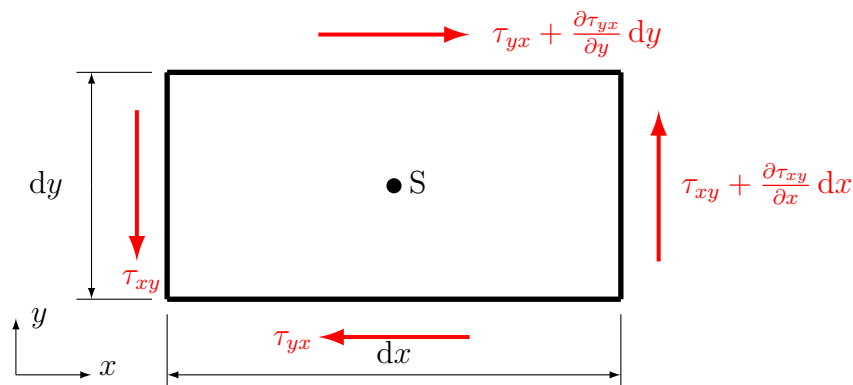
Die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen sind sehr theorielastig, sie haben nur zum Ziel, einige Zusammenhänge bereitzustellen. Wer die Zusammenhänge auch so glaubt, kommt auch ohne zurecht. Ein bisschen wissenschaftlich sollte es ab und zu dann doch sein.

Wir fahren fort mit einer wichtigen Erkenntnis, die uns künftig das Geschäft ein wenig erleichtern wird.

Die Betrachtung des Momentengleichgewichts am Volumenelement ergibt die Symmetrie des Spannungstensors.

$$(II.6) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang ist beweisbar für $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ durch Aufstellen des Momentengleichgewichts um die z -Achse am Volumenelement; Bezugspunkt ist der Punkt S. Alle Schubspannungen müssen über Flächeninhalte in Kräfte umgerechnet werden (Beispiel $\tau_{xy} dy dz$). Anschließend muss mit dem Hebelarm multipliziert werden (Beispiel $\frac{dx}{2}$).



$$\begin{aligned}
\sum M_{[S]} \equiv 0 = & \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} \\
& + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} \\
& + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz \frac{dx}{2} \\
& - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} \\
& - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} \\
& - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz \frac{dy}{2}
\end{aligned}$$

Die Terme, die mit $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$ beginnen, sind von zweiter Ordnung klein – sie haben einen Faktor dx bzw dy mehr als die anderen – und werden vernachlässigt. Es bleibt also

$$\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0$$

oder

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \text{qed.}$$

Fazit: Von den ursprünglich neun verschiedenen Spannungskomponenten in der Spannungsmatrix $\underline{\underline{S}}$ bleiben nur sechs unabhängige Größen über. Schubspannungen, die sich nur in der Reihenfolge des Index unterscheiden sind immer gleich groß. $\underline{\underline{S}}$ ist immer symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen, das ist die „ σ -Spur“.

Die Gleichungen (II.5) und (II.6) gelten für jeden Körper, auch für Flüssigkeiten und Gase.

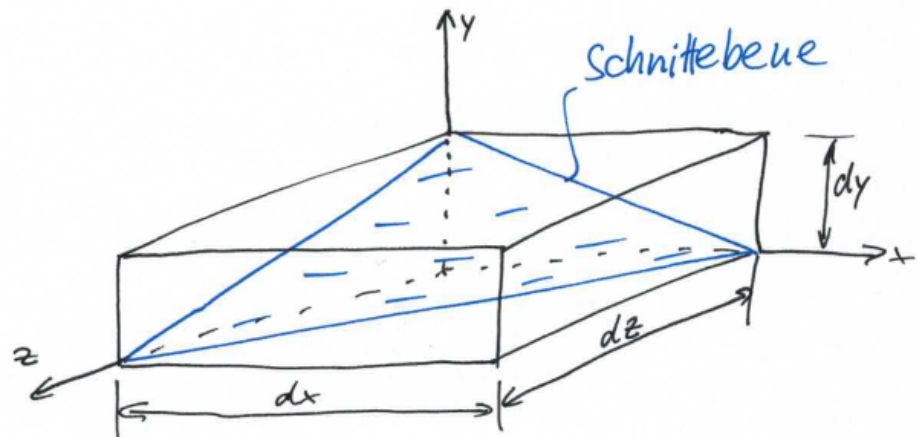
2.2 CAUCHYsche Spannungsgleichung für den ebenen Spannungszustand

Augustin-Louis Cauchy, 1789 bis 1857, französischer Mathematiker, ausgesprochen „Koschie“.

Unsere Volumenelemente sind bisher an unserem kartesischen Koordinatensystem x, y, z ausgerichtet. Die Lage des Koordinatensystems ist jedoch rein willkürlich. CAUCHY stellte u.a. Überlegungen an, wie sich die insgesamt neun Spannungskomponenten (sechs verschiedene) verändern, wenn das Koordinatensystem anders – also verdreht, verschwenkt – gewählt würde. Ziel ist es, das Volumenelement in einer anderen Orientierung aus dem Kontinuum zu schneiden, so dass möglichst viele von den neun (sechs) Spannungskomponenten Null werden. Tatsächlich werden wir es schaffen, aus den neun Größen drei besondere zu machen.

Wir steigen in die Thematik ein, indem wir unser Volumenelement im x, y, z -Koordinatensystem irgendwie in zwei Teile zerschneiden. Dabei erzeugen wir Oberflächen, die nicht in unseren Koordinatenebenen liegen.

Gegeben sei ein Spannungszustand an einem Volumenelement im kartesischen Koordinatensystem. Gesucht ist der Spannungsvektor $\vec{S}$ auf einer gegen die Koordinatenebenen geneigten Schnittebene.

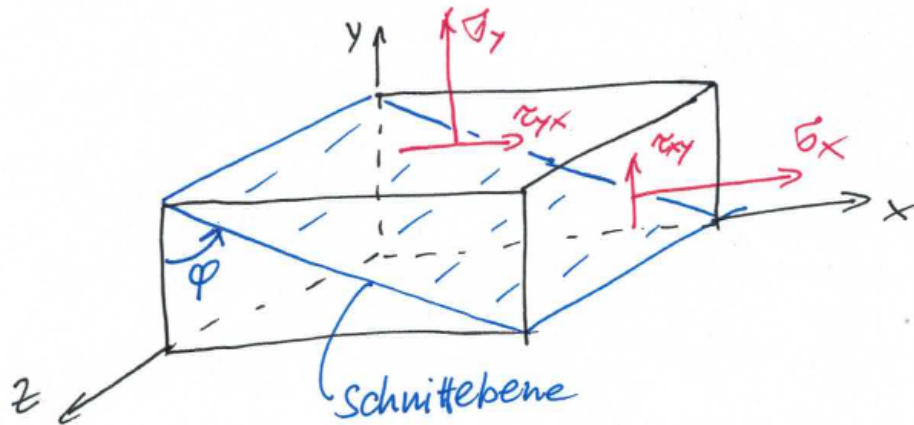


Vereinfachende Vorbetrachtung: Annahme eines ebenen Spannungszustands. In diesem Fall treten Spannungen in z -Richtung nicht auf. Die Spannungsmatrix $\underline{\underline{S}}$ reduziert sich dann zu:

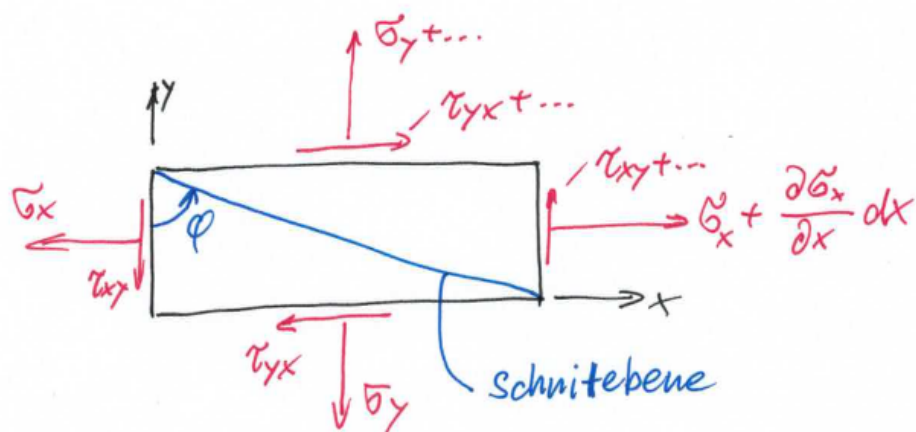
$$(II.7) \quad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merke: Eine mit lediglich vier Elementen oben links in der Ecke ausgefüllte Spannungsmatrix ist ein klarer Hinweis auf einen ebenen Spannungszustand. Alle Spannungen, die ein z im Index haben, sind Null.

Wir passen den Schnitt durch das Volumenelement dieser Vereinfachung an.

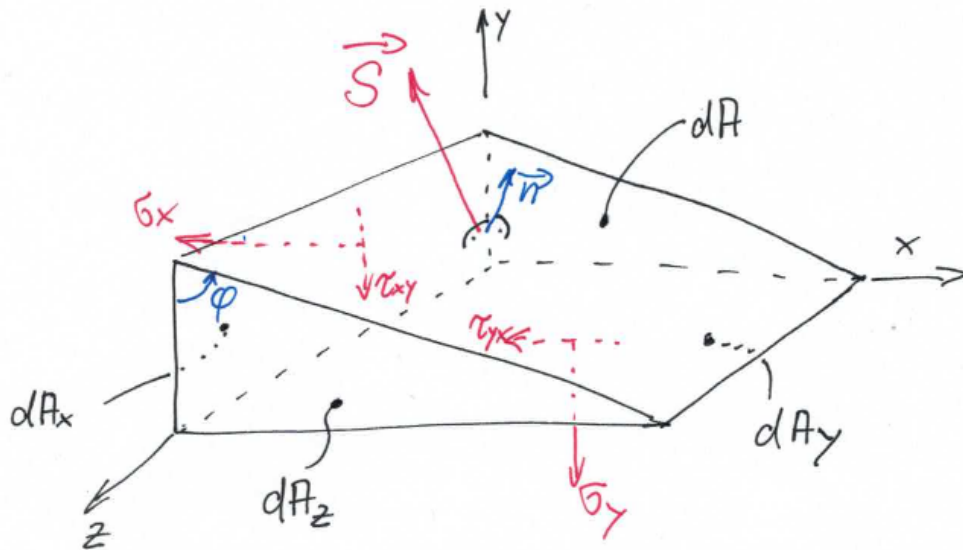


und betrachten diesen Fall als ebene Projektion.



Die angedeuteten Spannungsänderungen, Beispiel $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ dienen der Vollständigkeit, bleiben aber bei unseren Betrachtungen folgenlos. Wir sind nämlich schlau. Unseren Quader haben wir zerschnitten, so dass wir zwei Keile bekommen haben, wie man sie gerne benutzt, um Türen aufzuhalten. Wir werden den Keil unten links betrachten, dort müssen wir uns nicht um die Spannungsänderungen kümmern. ■

Darstellung des unteren abgeschnittenen Prismas = Keil.



Auf der Schnittfläche sind hinzugekommen der Vektor $\vec{S}$, ein Spannungsvektor und der Vektor $\vec{n}$, ein Normalenvektor. Letzterer steht senkrecht (normal) auf unserer neuen, geneigten Fläche und hat die Länge eins. Hinzugekommen sind auch Angaben über die Flächeninhalte unseres Keils:

dA : geneigte Schnittfläche
 dA_x : hintere Stirnfläche
 dA_y : Bodenfläche
 dA_z : vordere Dreiecksfläche

Durch Schnitt werden Schnittkräfte freigelegt, es gibt keine Schnittspannungen.

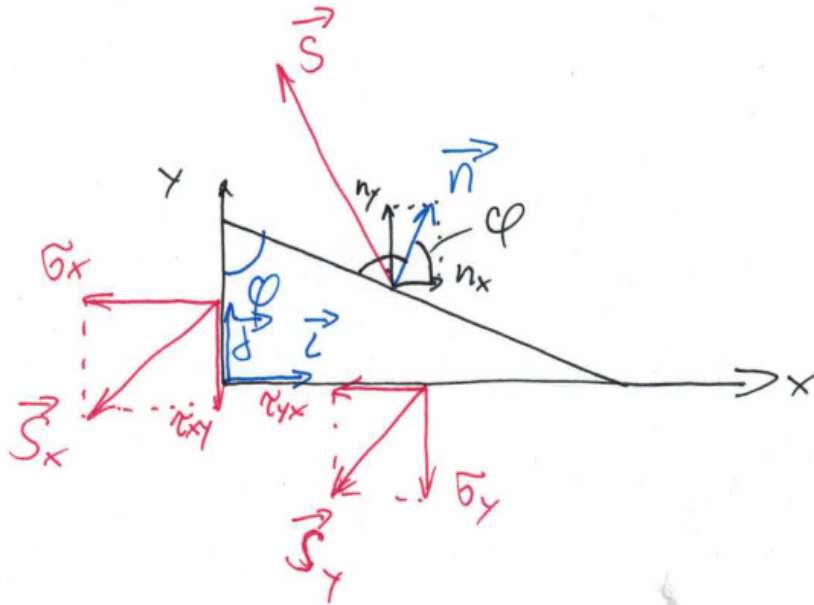
$\vec{S} \cdot dA$: Schnittkraft, Produkt aus freigelegtem Spannungsvektor und Flächeninhalt;

$\vec{n}$: Normalenvektor, er gibt die Lage/Orientierung der Schnittfläche an.

Der nächste Schritt wird sein, unseren Keil, unser Prisma als zweidimensionale Projektion zu betrachten und diverse Vektoren aufzustellen.

Auf der schrägen Schnittfläche erschien ein Spannungsvektor $\vec{S}$ und der Normalenvektor $\vec{n}$, der die Orientierung der Fläche beschreibt.

Wieder in z -Richtung projiziert.



In diesem speziellen Fall des ebenen Spannungszustands gilt

$$(II.8) \quad \vec{S}_x = \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_y = \begin{pmatrix} -\tau_{yx} \\ -\sigma_y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\vec{n}, \vec{i}) \\ \sin(\vec{n}, \vec{i}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\cos(\vec{n}, \vec{i})$ bedeutet „Cosinus des Winkels zwischen $\vec{n}$ und $\vec{i}$ “. In diesem Fall wäre das die Komponente n_x .

Gesucht ist der Spannungsvektor $\vec{S}$; er ist berechenbar durch das Kräftegleichgewicht am differentiellen Prisma. **Alle Spannungsvektoren werden durch Multiplikation mit Flächen in Kraftvektoren umgerechnet.**

$$\vec{0} \equiv \vec{S}_x \cdot dA_x + \vec{S}_y \cdot dA_y + \vec{S} \cdot dA. \quad (*)$$

Weiter gilt

$$dA_x = dA \cdot n_x; \quad dA_y = dA \cdot n_y. \quad (**)$$

Einsetzen von (**) in (*)

$$\vec{0} \equiv \vec{S}_x \cdot dA \cdot n_x + \vec{S}_y \cdot dA \cdot n_y + \vec{S} \cdot dA.$$

Kürzen von dA und Auflösen nach $\vec{S}$

$$(II.9) \quad \vec{S} = -\vec{S}_x n_x - \vec{S}_y n_y$$

Mit (II.8) gilt

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ 0 \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ 0 \end{pmatrix} n_y$$

Mit (II.7) gilt

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$(II.10) \quad \vec{S} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n} \quad \text{mit } |\vec{n}| = 1$$

CAUCHYsche Spannungsgleichung für den hier speziell angenommenen ebenen Spannungszustand.

Die Vorgehensweise beim Berechnen des Produkts aus Matrix $\underline{\underline{S}}$ mal Vektor $\vec{n}$ setze ich hier als bekannt voraus. Falls ich damit falsch liege, suchen Sie im Videoportal Ihres Vertrauens nach „Matrix mal Vektor“.

2.3 CAUCHYsche Spannungsgleichung für den dreidimensionalen Spannungszustand

Im räumlichen oder dreidimensionalen Spannungszustand gilt (II.10) ebenso mit

$$(II.11) \quad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}; \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ gibt wieder die Lage der Schnittfläche an;

$\vec{S}$ den Spannungsvektor auf dieser Schnittfläche. Er wird durch seine achsenparallelen Komponenten S_x, S_y, S_z beschrieben.

2.4 Anwendung der CAUCHYschen Spannungsgleichung: Hauptspannungen

Gesucht sind solche Schnitte eines Volumenelements, auf denen **nur** Normalspannungen, dagegen **keine** Schubspannungen auftreten. Diese schubspannungsfreien Flächen werden in ihrer Lage zum Koordinatensystem durch den Normalenvektor $\vec{n}$ angegeben.

Es gilt:

1. CAUCHYsche Spannungsgleichung (II.10)

$$\begin{array}{ccccc} \vec{S} & = & \underline{\underline{S}} & \cdot & \vec{n} \\ \text{gesucht} & & \text{bekannt} & & \text{gesucht} \end{array}$$

2. Forderung: Keine Schubspannung auf der gesuchten Fläche. D.h. $\vec{S}$ steht senkrecht auf der Fläche, genau wie $\vec{n}$, daher

$$\vec{S} \parallel \vec{n}.$$

Daraus schlussfolgern wir

$$(II.12) \quad \vec{S} = \sigma \cdot \vec{n},$$

wobei σ zunächst nur ein noch unbekannter Proportionalitätsfaktor ist.

3. Die Länge von $\vec{n}$ ist bekannt

$$(II.13) \quad |\vec{n}| = 1$$

σ verlängert den Vektor $\vec{n}$ mit der Länge 1, so dass er die Länge von $\vec{S}$ bekommt. Beide Vektoren zeigen in die gleiche Richtung. Zudem muss σ die Einheit von $\vec{S}$ aufweisen (MPa), da $\vec{n}$ keine Einheit hat oder:

Wegen (II.13) wird aus dem Proportionalitätsfaktor σ in (II.12) die gesuchte Normalspannung, auf deren Flächen keine Schubspannung ist. Neue Namensgebung:

Normalspannungen, die keine Schubspannungen „zu ihren Füßen“ haben, werden

Hauptspannungen
oder
Hauptnormalspannungen

genannt. Später sind sie an den Bezeichnungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu erkennen.

Oder Hauptspannungen stehen senkrecht auf schubspannungsfreien Flächen.

(II.12) in (II.10) eingesetzt ergibt

$$\sigma \vec{n} = \underline{\underline{S}} \vec{n}$$

Diese Gleichung wollen wir so umformen, dass auf einer Seite Null steht. Wenn wir dann $\vec{n}$ ausklammern, muss besonnen vorgegangen werden. Ein Ausdruck $\underline{\underline{S}} - \sigma$ ist nicht

zulässig, da wir von einer Matrix keine Zahl abziehen können. Matrix minus Matrix geht, Zahl minus Zahl geht. σ muss mit Hilfe einer Einheitsmatrix $\underline{\underline{E}}$ auf die richtige Dimension gebracht werden, zur Matrix 'aufgeblasen' werden.

$$\sigma \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n} \quad \text{mit } \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

So umformbar zu

$$(II.14) \quad (\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

(II.14) ist ein homogenes Gleichungssystem mit den drei Unbekannten n_x, n_y, n_z , den Komponenten von $\vec{n}$. Homogen? Das heißt, die rechte Seite ist 0.

Moment, da ist doch noch etwas unbekannt. Richtig. σ kennen wir auch nicht. Wir täuschen an, dass wir momentan nur die Orientierung der Fläche herausbekommen wollen, auf denen es keine Schubspannungen gibt. Diese Information steckt tatsächlich in $\vec{n}$ bzw. seinen Komponenten. Ein mathematischer Hackentrick auf dem Weg dahin wird uns auch das eigentlich Interessante liefern, nämlich σ und das sogar in dreifacher Ausfertigung. Das werden unsere wirklich gesuchten drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sein. Lassen wir uns überraschen.

(II.14) ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren aus.

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0 \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z &= 0 \end{aligned}$$

Hier kann gut nachvollzogen werden, wie die Multiplikation Matrix mal Vektor vonstattengeht. Sie müssen das beherrschen.

Jetzt kommt der Mathematische Hackentrick: Wir haben ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten n_x, n_y, n_z . Solche Gleichungssysteme sind nicht immer lösbar. Es gibt eine Vorschrift, die Sie in Mathematik schon kennengelernt haben bzw. noch kennenlernen werden, unter der ein solches Gleichungssystem lösbar ist. Bei dieser Vorschrift taucht die schöne Abkürzung „d.u.n.d.“ auf. Sie steht für „dann und nur dann“.

Dieses Gleichungssystem hat d.u.n.d. nichttriviale Lösungen, wenn

$$(II.15) \quad \det(\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) = 0$$

Was heißt das? Eine Lösung ist sofort zu finden. Wenn alle drei Variablen n_{xyz} null sind, ist der Drops gelutscht. Das nennt man die triviale Lösung. Wir brauchen ernstzunehmende Lösungen, weshalb wir die Determinante von $(\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}})$ ausrechnen müssen. Zum Glück habe ich Ihnen das Ausrechnen von Determinanten beim Kreuzprodukt schon beigebracht :-); wir haben anschließend jedoch eine andere, sehr rustikale Variante verwendet. Letztlich läuft es darauf hinaus, dass wir folgendes ausrechnen müssen

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Wir machen das ein einziges Mal und schreiben uns das Ergebnis möglichst übersichtlich hin, wobei wir günstige Abkürzungen mit Namen I_1, I_2, I_3 verwenden.

Ein Ausrechnen der Determinante ergibt

$$(II.16) \quad \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

mit

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{S}})$$

I_1, I_2, I_3 werden „die drei Invarianten“ genannt.

Der Name ist mit Bedacht gewählt. Würden wir an einem bestimmten Punkt unserer belasteten Struktur Volumenelemente in unterschiedlichen Orientierungen herausschneiden, so würden wir für jedes eine andere Spannungsmatrix $\underline{\underline{S}}$ erhalten. Würde man aus diesen verschiedenen Matrizen die Invarianten bestimmen, so wären sie in allen Fällen gleich. Die Werte I_1, I_2, I_3 sind unabhängig (invariant) von der Orientierung des zugrundeliegenden Volumenelements an ein und demselben Ort.

Da die Matrix $\underline{\underline{S}}$ symmetrisch ist, ergeben sich aus (II.15) bzw. (II.16), einem Polynom dritter Ordnung, drei reelle Lösungen: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Das sind die drei Hauptspannungen.

Zu jeder dieser drei Hauptspannungen gehört eine Fläche mit den Normalen $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, auf denen die Hauptspannungen senkrecht stehen.

Das war eines der wichtigsten Theorieteile in der Festigkeitslehre. Was ist wirklich wichtig davon? (II.16) ist wichtig. Wir müssen in der Lage sein, Hauptspannungen zu berechnen. Ein Polynom dritter Ordnung und die Invariante I_3 lassen Schlimmes vermuten. Keine Sorge, wenn wir das Problem auf ebenen Spannungszustand reduzieren (häufiger Spezialfall), wird es viel einfacher. Für die Invariante 3 gilt dann $I_3 = 0$. Warum ist das so? Suchen Sie sich eine Spannungsmatrix für den ebenen Spannungszustand. Entwickeln Sie die Determinante nicht nach der ersten Zeile, sondern nach der dritten Zeile. Sie besteht nur aus Nullen. Da kommt nichts raus. Mit $I_3 = 0$ wird das Polynom 3. Ordnung zu einem Polynom 2. Ordnung. Schauen Sie einmal in (II.16) nach, warum. Außerdem können Sie schon einmal die „pq-Formel“ zum Lösen von quadratischen Gleichungen herauskramen.

Kurze Zusammenfassung

Wir versuchten herauszubekommen, in welcher Orientierung der Schnitt durch ein Volumenelement liegen muss, damit der Spannungsvektor senkrecht auf der Schnittfläche steht. Wir erfuhren, dass diese senkrecht stehende Spannung einen neuen Namen hat, nämlich Hauptspannung. Merkmal einer Hauptspannung ist, dass in der dazugehörigen Fläche keine Schubspannung liegt. Bei der Suche nach der Orientierung der Fläche – eigentlich ist diese Information gar nicht so wichtig – kamen wir an der Stelle vorbei, dass das Gleichungssystem zur Berechnung der Orientierung (die drei Unbekannten n_x, n_y, n_z) nur unter einer bestimmten Bedingung lösbar ist. Die Determinante von $(\underline{S} - \sigma \underline{E})$ muss Null sein. Diese Determinante führt zu einem Polynom dritter Ordnung, die – so ist das nun einmal – drei Lösungen hat für σ , nämlich $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Wir haben also nicht nur eine sondern drei Hauptspannungen bekommen. Deshalb gibt es nicht nur eine Orientierung, sondern drei, sie heißen $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. Auch wenn uns die Orientierungen nicht sonderlich interessieren, schauen wir uns doch kurz an, wie wir sie berechnen können.

Berechnung der zu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ gehörenden Flächen mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$.

1. σ_1 in (II.14) einsetzen. Mit (II.13) folgt

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{pmatrix}.$$

2. σ_2 in (II.14) einsetzen

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{z2} \end{pmatrix}.$$

3. σ_3 in (II.14) liefert $\vec{n}_3$.

Also gibt es drei Schnittflächen für jedes Volumenelement, auf dem keine Schubspannungen auftreten. Sie werden durch die „Hauptachsen“ $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ beschrieben. Die Hauptachsen stehen alle senkrecht zueinander und bilden ein sog. Hauptachsenkoordinatensystem.

Zusammenfassung: Wir schneiden aus einem belasteten Bauteil ein Volumenelement entlang unseres x, y, z Koordinatensystems. Die dazugehörige Spannungsmatrix ist voll besetzt mit neun Spannungen (sechs voneinander unabhängig). Wir hätten das Volumenelement auch anders schneiden können, nämlich entlang des Hauptachsensystems $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ (wenn wir denn gewusst hätten, wie dieses System liegt). Wir hätten dann eine viel schönere Spannungsmatrix bekommen, nämlich folgende:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Diese viel übersichtlichere Spannungsmatrix beschreibt den gleichen Belastungszustand. In Zukunft interessiert uns gar nicht, wie das Hauptachsensystem $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ liegt (da stecken neun unbekannte Größen drin, wer soll die ausrechnen?); wir sind nur an den drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ interessiert.

Mathematischer Hintergrund: Unser hier behandeltes Problem ist ein Eigenwert-Eigenvektor-Problem, das Sie in Mathematik schon hatten oder noch bekommen werden. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die Eigenwerte, $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ die Eigenvektoren. Übrigens: Auf Englisch sind das *eigenvalues and eigenvectors*.

Abschließende Frage: Wozu das Ganze? Antwort: Wir haben ein belastetes Bauteil und wir sollen entscheiden, hält oder hält nicht. Unser Ausgangsvolumenelement mit neun Spannungen ist bekannt. Wir haben einen Werkstoff, der eine bestimmte Spannung ertragen kann, wir haben aber neun. In einem ersten Schritt reduzieren wir von neun auf drei: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Dann werden wir einen weiteren Zauber kennenlernen, die Vergleichsspannungshypothesen, mit denen wir aus den drei Hauptspannungen eine Vergleichsspannung berechnen können, die wir mit dem Werkstoffkennwert vergleichen können. Jetzt können wir sagen: Hält oder hält nicht.

2.4.1 Übungsaufgabe, Spannungsvektor

Für ein Volumenelement im Karthesischen Koordinatensystem ist eine Spannungsmatrix gegeben

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 100 \text{ MPa}$$

Gesucht:

a) Spannungsvektor zu einer Fläche, beschrieben durch

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Betrag des Spannungsvektors.

a) CAUCHYsche Spannungsgleichung

$$\vec{S} = \underline{\underline{S}} \vec{n}$$

$$(\underline{\underline{S}}) \quad \begin{pmatrix} 100 & 200 & -200 \\ 200 & 100 & 200 \\ -200 & 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ +1/3 \\ +2/3 \end{pmatrix} (\vec{n})$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{200}{3} + \frac{200}{3} - \frac{400}{3} \\ -\frac{400}{3} + \frac{100}{3} + \frac{400}{3} \\ \frac{400}{3} + \frac{200}{3} + \frac{200}{3} \end{pmatrix} (\vec{S})$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{400}{3} \\ \frac{100}{3} \\ \frac{800}{3} \end{pmatrix} \text{ MPa} = \begin{pmatrix} -133 \\ 33 \\ 267 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

b) Betrag des Spannungsvektors

$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

$$|\vec{S}| = \frac{100}{3} \sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} \text{ MPa}$$

$$|\vec{S}| = \frac{900}{3} \text{ MPa} = 300 \text{ MPa}$$

2.4.2 Übungsaufgabe, Invarianten, Hauptspannungen

Für einen Raumpunkt wird folgende Spannungsmatrix angegeben

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

Berechnen Sie

- a) die drei Invarianten,
- b) die drei Hauptspannungen,
- c) den Spannungsvektor auf dem Flächenelement mit dem Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Da diese Spannungsmatrix voll besetzt ist, werden wir ein Polynom 3. Ordnung erhalten. Normalerweise würde ein solches Polynom numerisch gelöst. Wir werden einen sehr ungewöhnlichen Lösungsweg begehen. Wir werden die erste Lösung σ_1 – auch genannt Nullstelle – raten (kein Witz). Dann werden wir das Polynom durch (σ –Nullstelle) teilen. Polynomdivision haben Sie hoffentlich schon einmal gemacht. Wenn nicht, suchen Sie im Videoportal Ihres Vertrauens nach Polynomdivision. Das Ergebnis dieser Division ist ein Polynom zweiter Ordnung (quadratische Gleichung), das wir einfach lösen können. So erhalten wir die verbleibenden Lösungen σ_2 und σ_3 .

a) Die drei Invarianten

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 I_1 &= (1 + 5 + 1) \text{ MPa}, \quad I_1 = 7 \text{ MPa} \\
 I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z \\
 &\quad - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2
 \end{aligned}$$

Beachte die zueinander passenden Indices bei der zweizeiligen Schreibweise von I_2 .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= (5 + 5 + 1 - 1 - 1 - 9) \text{ MPa}^2 \\
 I_2 &= 0 \text{ MPa}^2 \quad (\text{Zufall})
 \end{aligned}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\oplus \quad \ominus \quad \oplus$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Zeile

$$I_3 = 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = (4 + 2 - 42) \text{ MPa}^3, \quad I_3 = -36 \text{ MPa}^3$$

b) Die drei Hauptspannungen berechnen sich prinzipiell aus

$$(\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) \vec{n} = \vec{0}.$$

Diese Gleichung ist d.u.n.d. nichttrivial lösbar, wenn

$$\det (\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) = 0.$$

$$\det (\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) = \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Das ist immer so. Wir erhalten das charakteristische Polynom.

$$\sigma^3 - 7 \sigma^2 + 0 \sigma + 36 = 0$$

Lösung des Polynoms dritte Ordnung

Bei ganzzahligen Koeffizienten, wie hier, ist es möglich, eine Lösung (eine Nullstelle) zu raten. Sie ist immer ein Teiler des letzten Glieds (hier 36). Man probiert einfach aus. Eine sparsame Methode ist diese Reihenfolge: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3,

Der fünfte Versuch, $\sigma = -2$, liefert einen Treffer!

$$-8 - 28 + 36 = 0$$

$$\sigma_1 = -2 \text{ MPa} \quad \text{erste Hauptspannung}$$

Mit Kenntnis einer Nullstelle kann der Grad des Polynoms um eins verringert werden. Hierzu erfolgt eine Polynomdivision mit (σ - Nullstelle). Im vorliegenden Fall mit $(\sigma + 2)$.

$$\begin{array}{r} \sigma^3 - 7\sigma^2 + 0\sigma + 36 : (\sigma + 2) = \sigma^2 - 9\sigma + 18 \\ \underline{-(\sigma^3 + 2\sigma^2)} \\ -9\sigma^2 + 0\sigma \\ \underline{-(-9\sigma^2 - 18\sigma)} \\ +18\sigma + 36 \\ \underline{-(18\sigma + 36)} \\ 0 \end{array}$$

Neues Polynom zweiter Ordnung

$$\sigma^2 - 9\sigma + 18 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Hier gilt $x_{1,2} = \sigma_{2,3}$, $p = -9$, $q = 18$.

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3} &= +\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} \\ \sigma_{2,3} &= +\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81 - 72}{4}} \\ \sigma_{2,3} &= +\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = -2 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 6 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 3 \text{ MPa}$$

c) Spannungsvektor auf dem Flächenelement mit gegebenem Normalenvektor

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad (\vec{n}) \\
 (\underline{S}) \quad \underline{S} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3+4+36 \\ 3+20+12 \\ 9+4+12 \end{pmatrix} \quad (\vec{S}) \\
 \vec{S} &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 43 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ MPa}, \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} 3,3 \\ 2,7 \\ 1,9 \end{pmatrix} \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

2.4.3 Übungsaufgabe, Hauptachsenkoordinatensystem

Für einen dreiachsigen Spannungszustand sind bekannt

$$\begin{array}{ll}\sigma_x = 24 \text{ MPa} & \tau_{xy} = 22,1 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 20 \text{ MPa} & \tau_{xz} = 27,0 \text{ MPa} \\ \sigma_z = 30 \text{ MPa} & \tau_{yz} = 24,5 \text{ MPa}\end{array}$$

Gesucht sind

- a) Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
- b) Spannungsmatrix im Hauptachsenkoordinatensystem.
- c) Überprüfen Sie, ob die Invarianten invariant sind.

Die Spannungsmatrix ist diesmal nicht in gewohnter Form gegeben; lediglich sechs Spannungswerte sind gegeben. Es muss jetzt bekannt sein, dass Schubspannungen, die sich nur in der Reihenfolge des Index unterscheiden, immer gleich groß sind. Die scheinbar fehlenden Spannungen $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ sind daher nicht etwa Null sondern genauso groß, wie ihre Geschwister.

a) Die Hauptspannungen werden berechnet aus der Bedingung

$$\det(\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) = \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Es gilt

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 24,0 & 22,1 & 27,0 \\ 22,1 & 20,0 & 24,5 \\ 27,0 & 24,5 & 30,0 \end{pmatrix} \text{ MPa}, \quad \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der drei Invarianten

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad I_1 = 74 \text{ MPa}$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_2 = (480 + 600 + 720 - 488,41 - 600,25 - 729) \text{ MPa}^2$$

$$I_2 = -17,66 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{S}})$$

$$I_3 = 24 \begin{vmatrix} 20,0 & 24,5 \\ 24,5 & 30,0 \end{vmatrix} - 22,1 \begin{vmatrix} 22,1 & 24,5 \\ 27,0 & 30,0 \end{vmatrix} + 27 \begin{vmatrix} 22,1 & 20,0 \\ 27,0 & 24,5 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = (-6 - 33,15 + 39,15) \text{ MPa}^3, \quad I_3 = 0 \text{ MPa}^3$$

Das ist ein sehr schöner Zufall. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\sigma^3 - 74\sigma^2 - 17,66\sigma = 0$$

Die erste Nullstelle fällt sofort auf, sie lautet $\sigma_1 = 0$. Polynomdivision ist nicht notwendig, wir teilen durch σ .

$$\sigma^2 - 74\sigma - 17,66 = 0$$

$$\sigma_{2,3} = \frac{74}{2} \pm \sqrt{1369 + 17,66}$$

$$\sigma_{2,3} = 37 \pm 37,24$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 74,24 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -0,24 \text{ MPa}$$

b) Spannungsmatrix im Hauptachsenkoordinatensystem. Er lautet allgemein

$$\underline{\underline{S}}_H = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Natürlich, wo Hauptspannungen sind, gibt es keine Schubspannungen; alle ' τ -Positionen' sind 0. In beliebiger Reihenfolge tragen wir unsere Hauptspannungen auf den ' σ -Positionen' ein.

Im vorliegenden Fall gilt

$$\underline{\underline{S}}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 74,24 & 0 \\ 0 & 0 & -0,24 \end{pmatrix}$$

c) Invarianten des Hauptspannungszustands

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_1 = 74 \text{ MPa}$$

$$I_1 = \sigma_2 \cdot \sigma_3, \quad I_2 = -17,8 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = 0 \quad (\text{Entwickeln nach der ersten Zeile})$$

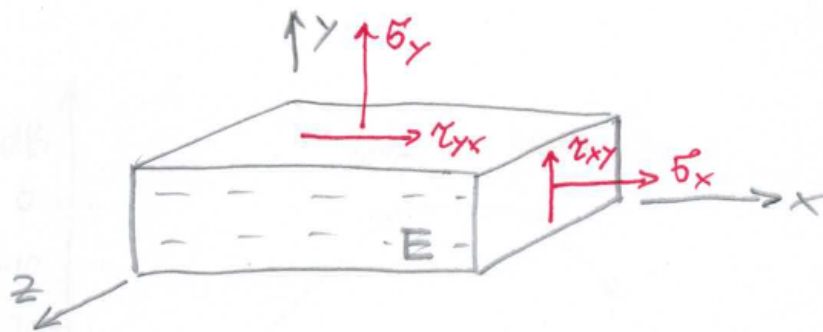
Bis auf Rundungsfehler sind die Invarianten tatsächlich invariant. Mit I_1 kann sehr einfach überprüft werden, ob die errechneten Hauptspannungen plausibel sind.

■

2.5 Ebener Spannungszustand

Wir haben in den Übungsaufgaben festgestellt, dass die Bestimmung der Hauptspannungen im räumlichen Fall nicht zuverlässig funktioniert. Entweder müssen wir Nullstellen raten oder wir müssen großes Glück haben, und die Invariante I_3 ist Null.

Recht häufig in der Realität finden wir jedoch den Fall, dass in einer unserer drei Richtungen keinerlei Spannungen vorhanden sind. So etwas nennen wir den Ebenen Spannungszustand. Wir legen dann gerne unser Koordinatensystem so, dass in z -Richtung keinerlei Spannungen vorhanden sind.



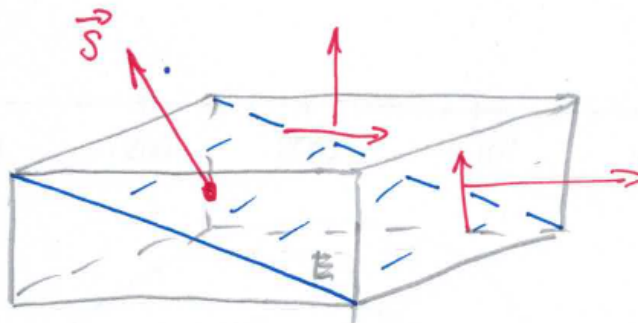
E: Spannungsfreie Ebene, hier $\parallel x, y$

Zugehöriger Spannungstensor

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel Scheiben: Belastungen erfolgen nur in Scheibenebene.

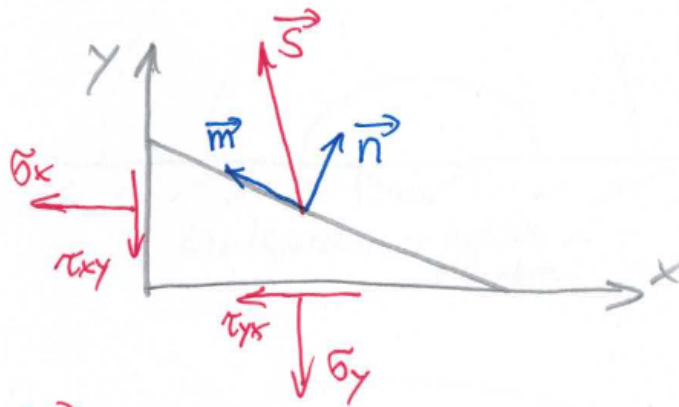
Untersuchung des ebenen Spannungszustands in der x - y -Ebene. Gegeben sei der Spannungstensor $\underline{\underline{S}}$ in einem Punkt P. Gesucht ist der Spannungsvektor $\vec{S}$ auf einer Schnittfläche senkrecht zu E.



Wir werden zwei Lösungswege kennenlernen

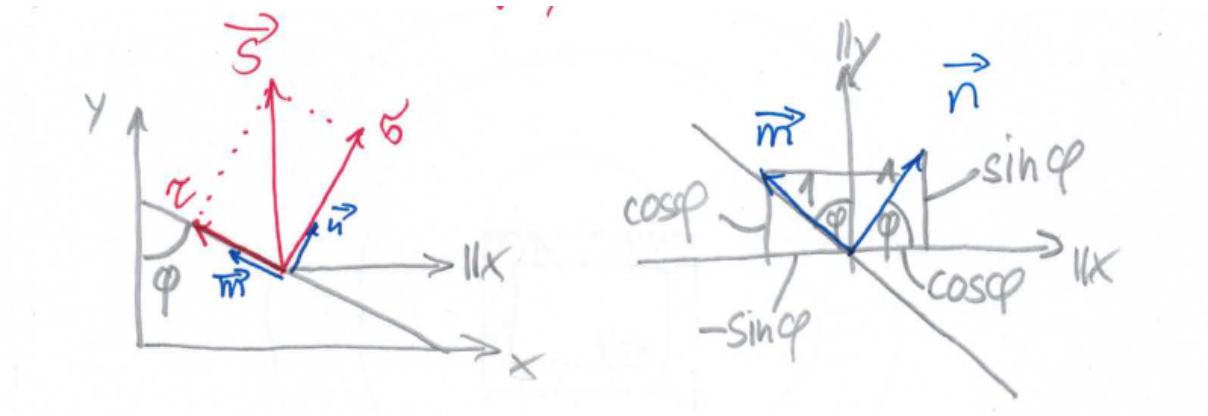
1. CAUCHYsche Spannungsgleichung. Bekannt und bei ebenem Spannungszustand zuverlässig benutzbar.
2. MOHRscher Kreis, eine zeichnerische Methode. Noch unbekannt. Wenn auch zeichnerische Methoden in digitalen Zeiten reichlich antiquiert wirken, taucht die Methode des MOHRschen Kreis doch auch in anderen Disziplinen, insbesondere in der Werkstoffkunde auf. Grund genug, uns auch hier damit zu befassen.

Wir betrachten eine zweidimensionale Projektion nach Schnitt.



Bei der CAUCHYschen Spannungsgleichung wird $\vec{S}$ in x - und y -Richtung zerlegt. Jetzt soll $\vec{S}$ in $\vec{n}$ - und $\vec{m}$ -Richtung zerlegt werden.

Wir fahren fort bei der Suche nach Hauptspannungen im ebenen Spannungszustand. Daher fehlen alle Spannungen, die in z -Richtung zeigen. Zuletzt betrachteten wir noch ein Volumenelement im ebenen Spannungszustand, das erneut geschnitten wurde. In der zweidimensionalen Projektion ist der Normalenvektor $\vec{n}$ zu sehen, der die Lage der Schnittebene beschreibt. Neu hinzugekommen ist der Vektor $\vec{m}$, der wie $\vec{n}$ die Länge eins hat und in der Schnittebene liegt. Wir wollen jetzt den Spannungsvektor $\vec{S}$ so zerlegen, dass er eine Komponente in $\vec{n}$ -Richtung bekommt (Komponente σ) und eine in $\vec{m}$ -Richtung (Komponente τ). Los gehts:



Es ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } |\vec{n}| = |\vec{m}| = 1$$

Weiter ist

$$(II.17) \quad \sigma = \vec{S} \cdot \vec{n}$$

$$(II.18) \quad \tau = \vec{S} \cdot \vec{m}$$

$$(II.19) \quad \vec{S} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}$$

Letzteres ist schon als Gleichung (II.10) bekannt. Aus (II.17) und (II.19) folgt.

$$(II.20) \quad \sigma = (\underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n},$$

aus (II.18) und (II.19) folgt.

$$(II.21) \quad \tau = (\underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{m}.$$

(II.20) ausgeschrieben lautet

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ \tau_{yx} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(II.22) \quad \begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \tau_{yx} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Ganz entsprechend mit (II.21)

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \varphi & + & \tau_{xy} \sin \varphi \\ \tau_{yx} \cos \varphi & + & \sigma_y \sin \varphi \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(II.23) \quad \begin{aligned} \tau &= -\sigma_x \cos \varphi \sin \varphi - \tau_{xy} \sin^2 \varphi \\ &\quad + \tau_{yx} \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Eliminieren des Winkels φ aus (II.22), (II.23).

Das ist leichter gesagt als getan. Schwere Geschütze müssen aufgefahren werden. Dazu zählen das Halbwinkeltheorem der Trigonometrie

$$\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos x),$$

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos x).$$

Mit $x = 2\varphi$ folgt

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi),$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi).$$

Dann braucht es noch ein Additionstheorem

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

mit $x = y = \varphi$ wird daraus

$$\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$$

wir glauben es einfach, es führt zu

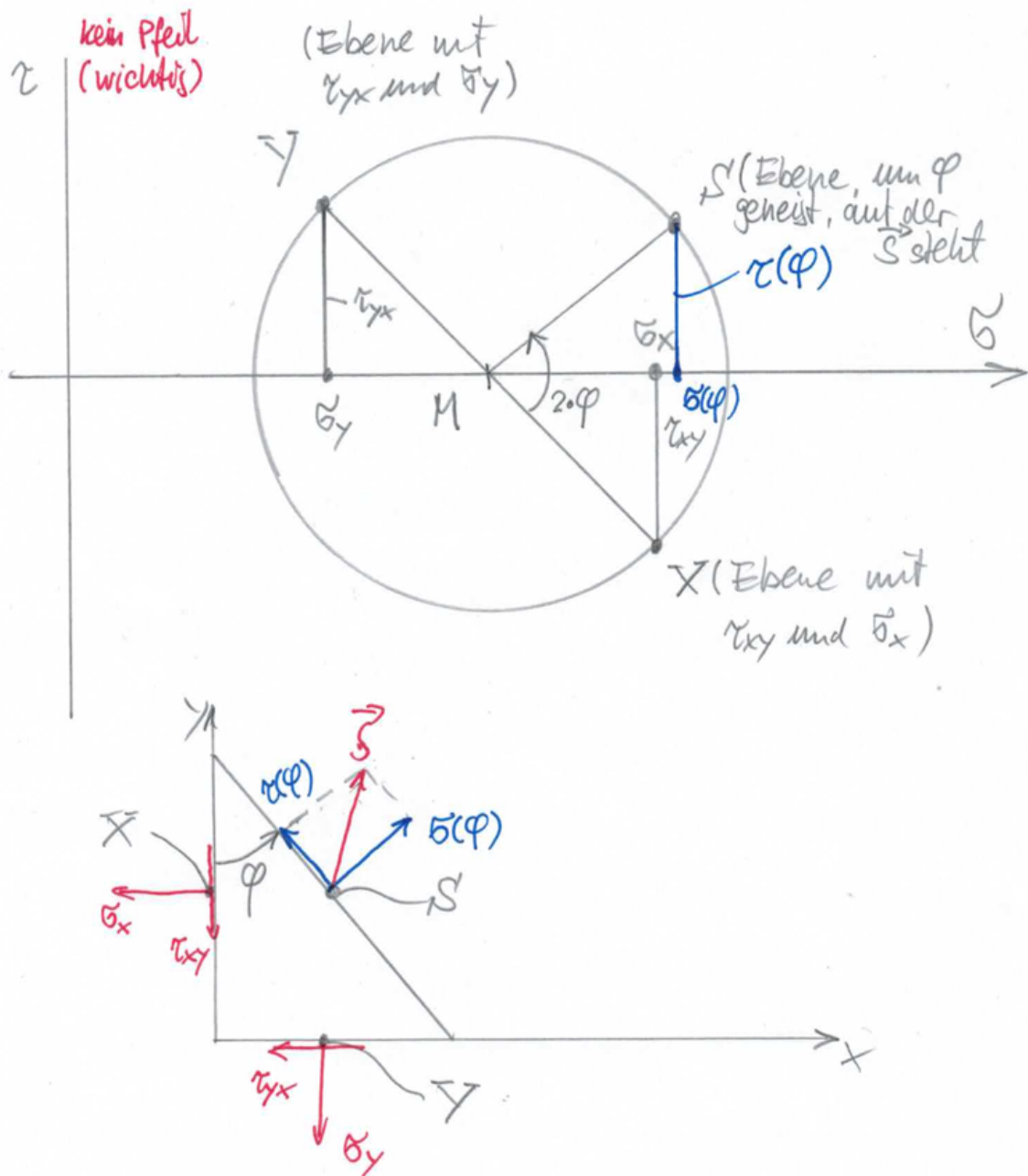
$$(II.24) \quad \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2,$$

wobei σ_x , σ_y , τ_{xy} bekannt sind, da sie in $\underline{S}$ gegeben sind.

(II.24) hat die Struktur $x^2 + y^2 = r^2$, was eine Kreisgleichung ist.

In einem σ - τ -Koordinatensystem hat die Gleichung (II.24) die Form eines Kreises (MOHR¹ 1882).

¹Christian Otto Mohr, geb. 1835 in Wesselbühren (Holstein), gest. 1918 in Dresden.



Eigenschaften des MOHRschen Kreises

1. Der Kreismittelpunkt liegt immer auf der σ -Achse.
2. Die Punkte X (σ_x, τ_{xy}) und Y (σ_y, τ_{yx}) sind Punkte des Kreises.
3. Die Strecke $\overline{XY}$ ist der Durchmesser des Kreises.

4. Der ebene Spannungszustand wird durch die Punkte X und Y beschrieben. Am Volumenelement stehen die durch X und Y beschriebenen Ebenen senkrecht zueinander (90°). Im MOHRschen Kreis liegen sie gegenüber ($2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$).

Erschwerend kommt hinzu, dass am Volumenelement die Punkte X und Y auf Koordinatenachsen liegen, wenn auch auf den jeweils anderen (X auf y , Y auf x), im MOHRschen Kreis hingegen „schief“. Das ist leider sehr verwirrend.

5. Schnittebenen am Volumenelement unter einem Winkel φ (z.B. S) können durch Antragen des doppelten Winkels im MOHRschen Kreis erzeugt werden. Dort auftretende Normal- und Schubspannungen $\sigma(\varphi)$ und $\tau(\varphi)$ können dem Diagramm entnommen werden.

Genauer beschrieben: Am Volumenelement wird von der senkrechten Achse (y -Achse) der Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Die senkrechte Achse ist gekennzeichnet mit dem Punkt X, dort liegen σ_x und τ_{xy} . Im Mohrschen Kreis wird der doppelte Winkel $2 \cdot \varphi$ gegen den Uhrzeigersinn angetragen. Ausgangslage zur Winkelmessung ist die Strecke $\overline{MX}$

6. Die Vorzeichenlage von τ ist unklar, weshalb an der τ -Achse kein Pfeil angebracht werden darf.

Konstruktion des MOHRschen Kreises

Es folgt eine Abfolge von Anweisungen, die Sie am Besten an Hand einer der nächsten Übungsaufgaben erproben.

1. σ_x auf der σ -Achse antragen. Von dort ein positives τ_{xy} nach unten. Das liefert den Punkt X.
2. σ_y auf der σ -Achse antragen. Von dort ein positives τ_{yx} nach oben. Das liefert den Punkt Y.
3. Punkte X und Y verbinden. Der Schnittpunkt von $\overline{XY}$ mit der σ -Achse liefert den Kreismittelpunkt M.
4. $\overline{MX} = \overline{MY}$ = Radius des MOHRschen Kreises.

Zusammenfassung

Zu jedem Punkt auf dem Umfang des Kreises gehört ein Spannungszustand auf einer Schnittfläche des Volumenelements. Der Spannungszustand wird angegeben durch die abzulesenden σ - und τ -Werte ($\sigma(\varphi)$, $\tau(\varphi)$). Die Lage der Schnittfläche, d.h. der Winkel φ , wird durch den Mittelpunktswinkel $2 \cdot \varphi$ ermittelt.

Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 werden gefunden als Schnittpunkte des Kreises mit der σ -Achse, denn dort gilt $\tau = 0$. Beim ebenen Spannungszustand gilt ferner $\sigma_3 = 0$ (Indexreihenfolge egal).

Die beiden zugehörigen Schnittflächen stehen senkrecht aufeinander, da der Winkel $2 \cdot \varphi$ zwischen $\overline{M\sigma_1}$ und $\overline{M\sigma_2}$ 180° beträgt.

Erneut wird auf die Hauptverwirrung beim MOHRschen Kreis hingewiesen. Die Zustände X und Y liegen am Volumenelement auf Koordinatenachsen. Die Zustände der Hauptspannungen geneigt. Im MOHRschen Kreis ist es genau umgekehrt. Die Zustände X und Y werden geneigt dargestellt, die Zustände der Hauptspannungen liegen auf der σ -Achse. Das ist sehr verwirrend. Hinzukommt, dass der MOHRschen Kreis alle Winkel verfälscht, indem er sie verdoppelt.

2.5.1 Übungsaufgabe, zwei MOHRsche Kreise, Schnittbilder

Gegeben sind zwei ebene Spannungszustände

a)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 200 \text{ MPa} & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 100 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -500 \text{ MPa} & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 300 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -100 \text{ MPa}\end{aligned}$$

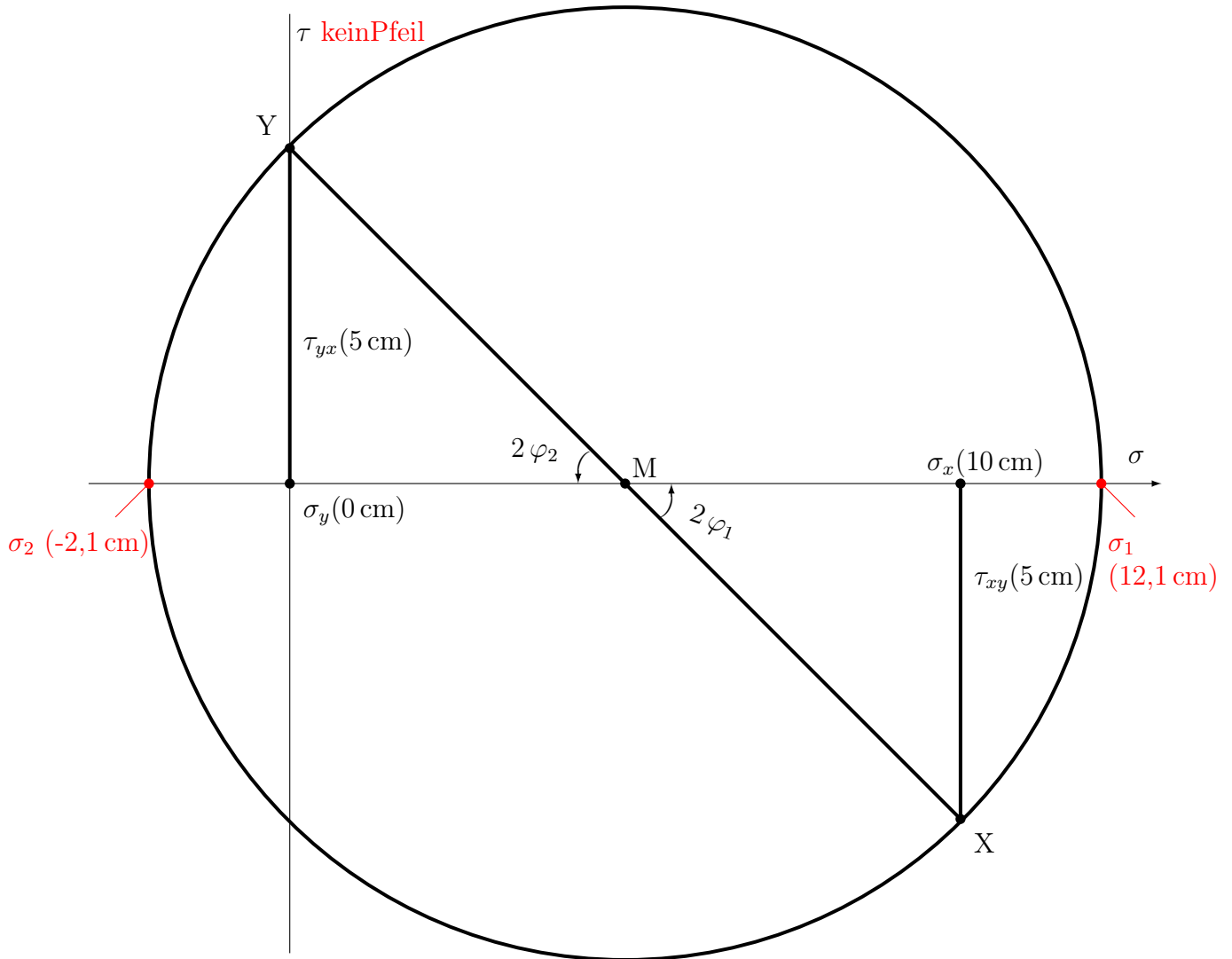
- Konstruieren Sie den MOHRschen Kreis.
- Bestimmen Sie die Hauptspannungen
- Zeichnen Sie Schnittbilder der Schubspannungsfreien Ebenen.
- Berechnen Sie die Hauptspannungen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus der Konstruktion.

Zu den schon geschilderten Verwirrungen beim MOHRschen Kreis (das Schiefe ist gerade und das Gerade ist schief), kommt noch hinzu, dass vor dem Zeichnen überlegt werden muss, welchen Zeichenmaßstab man wählt, und wo im σ , τ -Koordinatensystem der Kreis liegen wird. Es bleibt am Anfang nicht aus, dass einem das „das Papier ausgeht“ oder „Briefmarkenkunst“ erzeugt wird. Richten Sie sich auf einen iterativen Prozess ein. Ziel ist es, dass der zweite Versuch einen großen Kreis liefert, der auf das Zeichenpapier passt. Querformat hilft.

a) Erster Aufgabenteil

Konstruktion gemäß Vorschrift in der Vorlesung.

- Maßstab festlegen, hier 1 cm entspricht 20 MPa.
- σ_x (10 cm nach rechts) und τ_{xy} (5 cm willkürlich nach unten) $\rightarrow$ Punkt X
- σ_y (0 cm, also im Ursprung) und τ_{yx} (5 cm, jetzt nach oben) $\rightarrow$ Punkt Y
- X mit Y verbinden $\rightarrow$ Kreismittelpunkt M
- Kreis zeichnen, Radius = $\overline{MX} = \overline{MY}$
- Hauptspannung 1 auf der σ -Achse ablesen: $\overline{0\sigma_1} = 12,1 \text{ cm}$, $\rightarrow \sigma_1 = 242 \text{ MPa}$
- Hauptspannung 2 auf der σ -Achse ablesen: $\overline{0\sigma_2} = -2,1 \text{ cm}$, $\rightarrow \sigma_2 = -42 \text{ MPa}$
- Ferner gilt bei ebenem Spannungszustand immer $\sigma_3 = 0$ (kann wichtig werden). Die Vergabe der Indices 1, 2, 3 ist willkürlich.

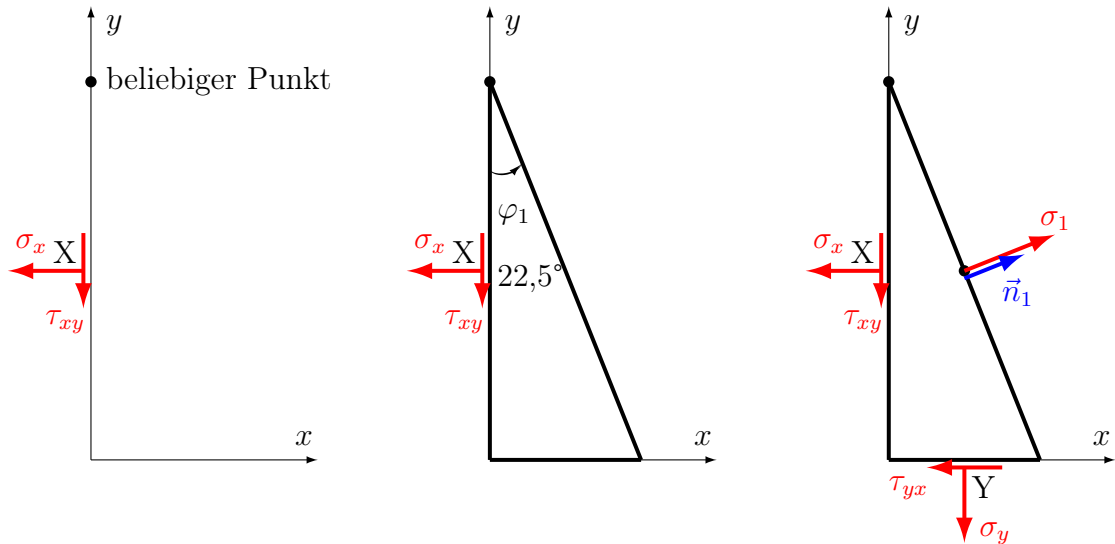


Der Winkel $2\varphi_1$ wird vom Zustand X gegen den Uhrzeigersinn gemessen und beträgt hier 45° . Der Winkel $2\varphi_2$ wird vom Zustand Y gegen den Uhrzeigersinn gemessen und beträgt ebenfalls 45° .

Schnittbild für die schubspannungsfreie Ebene, auf der die Hauptspannung σ_1 steht.

Wir werden vom Zustand X am Volumenelement den einfachen Winkel $\varphi_1 = 22,5^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn antragen. Am Volumenelement sehen wir, dass der Zustand X an einer senkrechten Kante des Volumenelements anzutreffen ist (Vorsicht Verwirrung, X liegt auf der y -Achse).

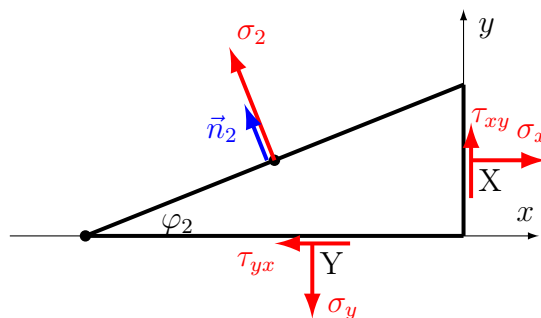
Wir beginnen mit einer senkrechten Linie und tragen die Spannungen des Zustands X an. Außerdem markieren wir einen beliebigen Punkt. Dort messen wir einen Winkel von $22,5^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn ab und vervollständigen ein Dreieck.



In der dritten Abbildung ist zu sehen, wie das Schnittbild vervollständigt wird. Der Zustand Y wird eingetragen und die Hauptspannung σ_1 , die immer senkrecht auf ihrer Schnittebene steht. Der Normalenvektor $\vec{n}_1$ bestätigt das.

Schnittbild für die schubspannungsfreie Ebene, auf der die Hauptspannung σ_2 steht.

Der Zustand Y befindet sich an einer waagerechten Kante des Volumenelements. Wir beginnen mit einer waagerechten Linie, markieren einen Punkt und tragen $\varphi_2 = 22,5^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn an.



Berechnung der Hauptspannungen mit der charakteristischen Gleichung

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\det(\underline{\underline{S}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) = \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Berechnung der drei Invarianten

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \cancel{\sigma_z}, \quad I_1 = 200 \text{ MPa}$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \cancel{\sigma_y \cdot \sigma_z} + \cancel{\sigma_x \cdot \sigma_z} - \tau_{xy}^2 - \cancel{\tau_{yz}^2} - \cancel{\tau_{xz}^2}$$

$$I_2 = -10^4 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{S}})$$

$$I_3 = 0$$

Wegen der Matrixstruktur beim ebenen Spannungszustand in der x - y -Ebene

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gelten die **roten Streichungen und Festlegungen** immer.

Das charakteristische Polynom

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

vereinfacht sich im ebenen Spannungszustand wegen $I_3 = 0$ zu

$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0 \quad \text{mit} \quad \sigma_1 = 0.$$

Hier gilt

$$\sigma^2 - 200 \cdot \sigma - 10^4 = 0$$

$$\sigma_{2,3} = +100 \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 10^4}{4} + 10^4}$$

$$\sigma_{2,3} = +100 \pm \sqrt{2 \cdot 10^4}$$

$$\sigma_2 = 241,4 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -41,4 \text{ MPa}, \quad \sigma_1 = 0$$

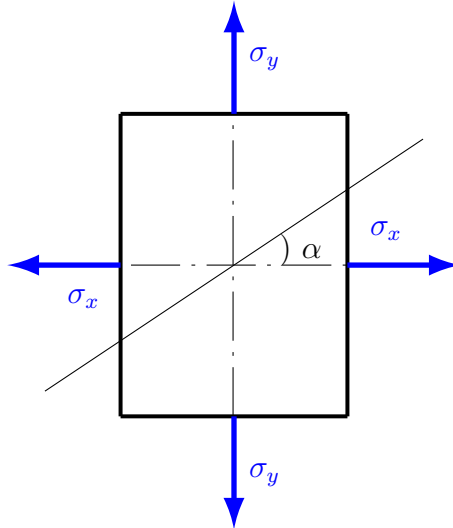
Es gibt lediglich Abweichungen aufgrund der Ablesegenauigkeit beim MOHRschen Kreis. Außerdem sei erinnert, dass die Vergabe der Indices willkürlich ist.

- b) Der zweiter Aufgabenteil sollte eigenständig gelöst werden. Die errechneten Hauptspannungen lauten

$$\sigma_2 = -661 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = +61 \text{ MPa}, \quad \sigma_1 = 0.$$

2.5.2 Übungsaufgabe, σ , τ bei Schnitt

Gegeben ist ein Bauteil, das einem ebenen Spannungszustand ausgesetzt ist. Es gilt:
 $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 80 \text{ MPa}$, alle $\tau = 0$.



Ermitteln Sie rechnerisch die Normal- und Schubspannungen, die unter einem Schnittwinkel von $\alpha = 30^\circ$ entstehen und prüfen Sie das Ergebnis mit dem MOHRschen Kreis nach.

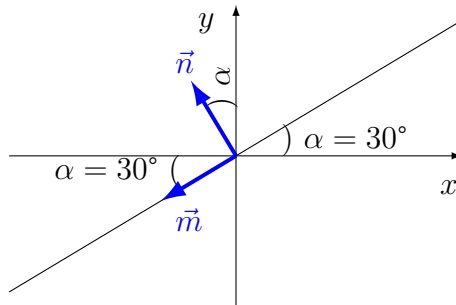
Es liegt ebener Spannungszustand vor $\sigma_z = 0$. Da alle Schubspannungen $\tau = 0$ sind ist zufällig das x - y -Koordinatensystem das Hauptachsensystem. In diesem Fall sind daher σ_x und σ_y auch Hauptspannungen, die wir σ_1 und σ_2 nennen könnten.

Benötigte Formeln

$$\vec{S} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}$$

$$\sigma = \vec{S} \cdot \vec{n}$$

$$\tau = \vec{S} \cdot \vec{m}$$



Aus der Skizze erkennen wir:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = 1$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{m}| = 1$$

Der Spannungstensor lautet

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

Berechnung des Spannungsvektors auf der um α geneigten Fläche

$$\vec{S} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}, \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -\sigma_x \sin \alpha \\ +\sigma_y \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} -20,0 \\ +69,3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Aus diesem Spannungsvektor wird nun die Normalspannung σ und die Schubspannung τ berechnet.

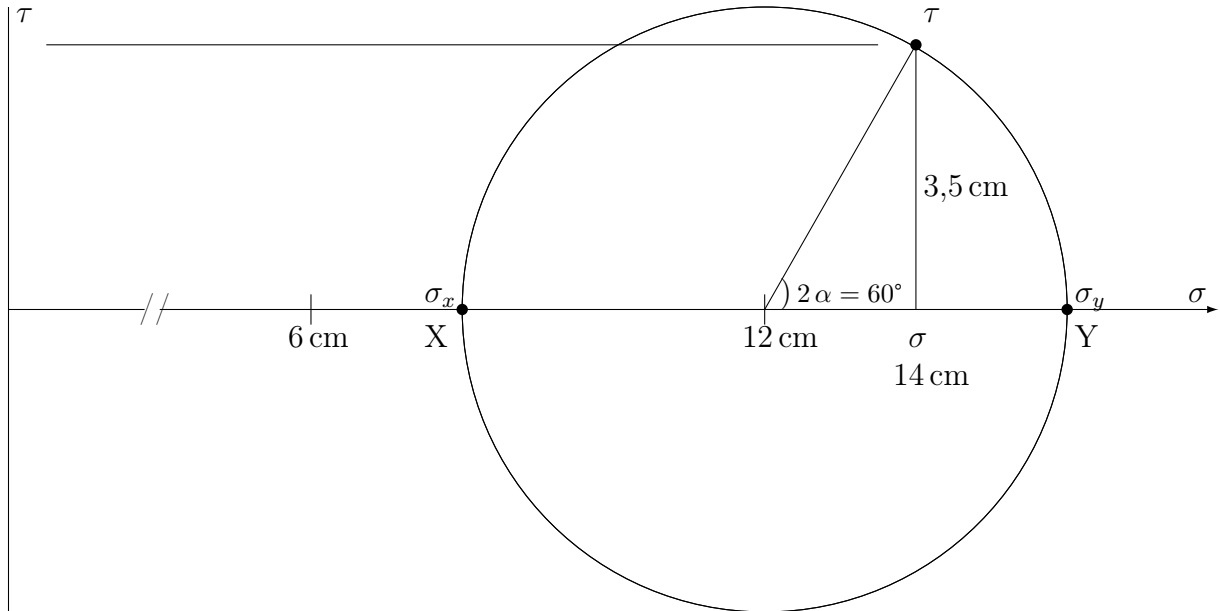
$$\begin{aligned}\sigma &= \vec{S} \cdot \vec{n} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} -\sigma_x \sin \alpha \\ +\sigma_y \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha \\ \sigma &= 70 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau &= \vec{S} \cdot \vec{m} \\ \tau &= \begin{pmatrix} -\sigma_x \sin \alpha \\ +\sigma_y \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tau &= \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= -17,3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

MOHRscher Kreis

Der Winkel α wird von der x -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Parallel zur x -Achse liegt die Oberfläche, auf der σ_y steht. Wir müssen also im MOHRschen Kreis vom Punkt Y den Winkel 2α gegen den Uhrzeigersinn antragen.

Maßstab: 5 MPa $\hat{=}$ 1 cm, 40 MPa $\hat{=}$ 8 cm, 80 MPa $\hat{=}$ 16 cm



Achtung: aus zeichnerischen Gründen hat die σ -Achse eine Unterbrechung. Verwenden Sie ein Blatt Papier im Querformat.

Normalspannung: 14 cm $\hat{=}$ 70 MPa, $\sigma = 70$ MPa

Schubspannung: 3,5 cm $\hat{=}$ 17,5 MPa, $\tau = 17,5$ MPa

Der MOHRsche Kreis liefert kein korrektes Vorzeichen für die Schubspannung. Aus diesem Grund wäre ein Pfeil an der τ -Achse ein Fehler!

2.5.3 Übungsaufgabe, Normalspannung aus $\vec{S}$

Für einen Punkt P ist $\underline{\underline{S}}$ gegeben.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Berechnen Sie den Spannungsvektor, der auf einem Flächenelement steht, das durch

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben ist. Wie groß ist der Normalspannungsanteil von $\vec{S}$?

Am Spannungstensor sehen wir, dass kein ebener Spannungszustand vorliegt. Der MOHRsche Kreis fällt demzufolge als Werkzeug aus. Wir müssen rechnen.

Lösung

$$\vec{S} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Der gesuchte Spannungsvektor lautet

$$\vec{S} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Berechnung des Normalspannungsanteils

$$\sigma = \vec{S} \cdot \vec{n}$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{1}{9} (10 - 20 - 60) \text{ MPa}$$

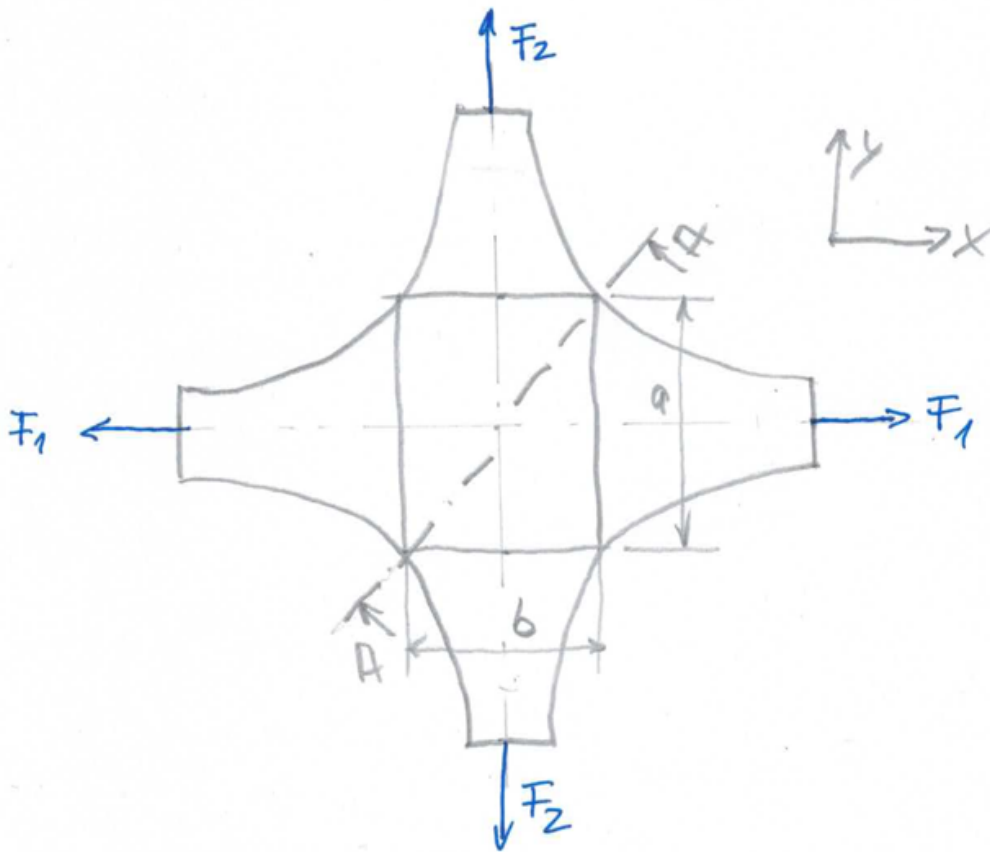
$$\sigma = -7,78 \text{ MPa}$$

■

2.5.4 Übungsaufgabe, Knotenblech 1

Ein Knotenblech wird wie folgt belastet. Zu bestimmen sind die Normal- und Schubspannungen im Schnitt A – A.

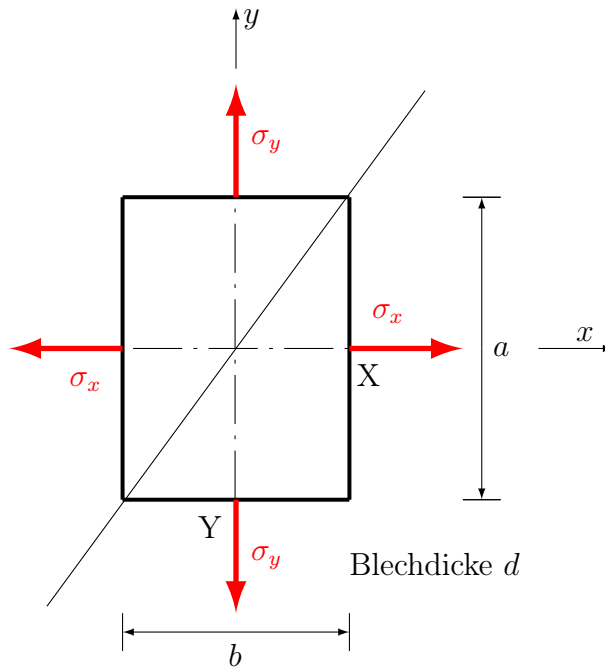
Gegeben: $F_1 = 80 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$, $a = 40 \text{ mm}$, $b = 30 \text{ mm}$, Blechdicke $d = 1 \text{ mm}$.



Bestätigen Sie mittels MOHRschem Kreis.

Lösung

Ebener Spannungszustand, da $\sigma_z = 0$.



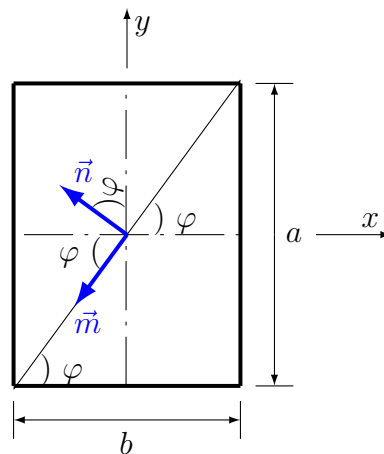
$$\sigma_x = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_1}{a \cdot d} = \sigma_1, \text{ da keine Schubspannung}$$

$$\sigma_y = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_2}{b \cdot d} = \sigma_2, \text{ da keine Schubspannung}$$

$$\sigma_x = \frac{80 \text{ N}}{40 \text{ mm}^2} = 2 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = \frac{40 \text{ N}}{30 \text{ mm}^2} = \frac{4}{3} \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Festlegung der Richtungsvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$.



$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a}{b}; \quad \varphi = \arctan \frac{a}{b}; \quad \varphi = 53^\circ$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = 1 \quad |\vec{m}| = 1$$

$$\text{Cauchy} \quad \vec{S} = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}$$

$$\text{dann} \quad \sigma = \vec{S} \cdot \vec{n}$$

$$\text{dann} \quad \tau = \vec{S} \cdot \vec{m}$$

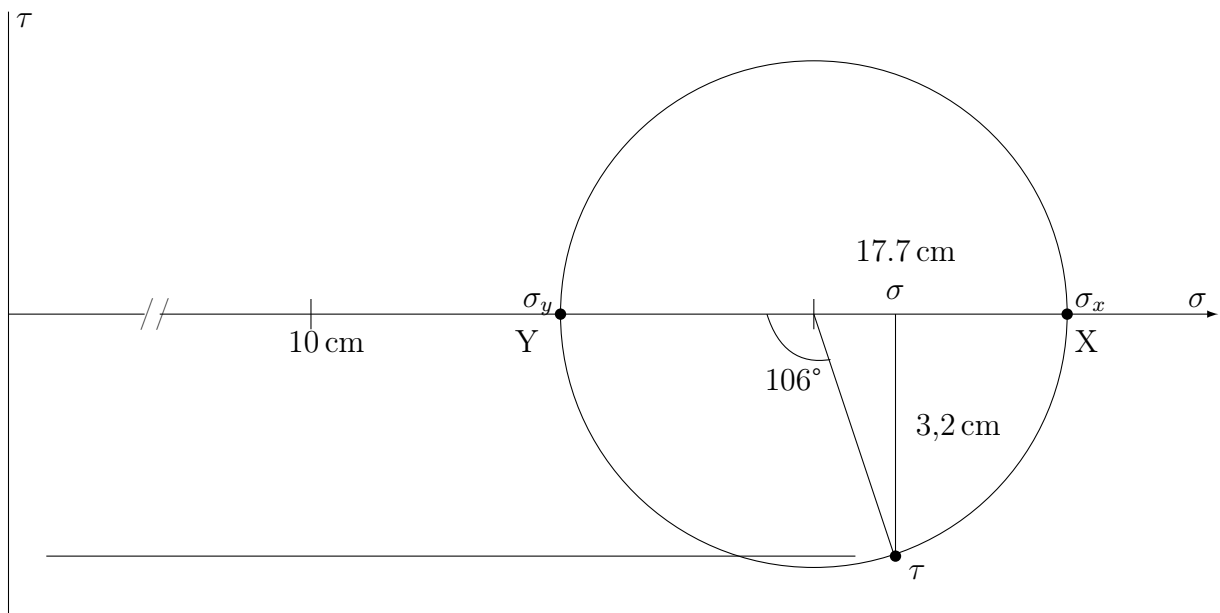
selber rechnen

$$\sigma = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi$$

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma = 1,76 \text{ MPa}, \quad \tau = 0,32 \text{ MPa}$$

Maßstab: 1 MPa $\hat{=}$ 10 cm, 4/3 MPa $\hat{=}$ 13.3 cm, MPa $\hat{=}$ 20 cm



Vom Zustand Y müssen 2φ , $2 \cdot 53^\circ = 106^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn angetragen werden.

$$\sigma = 1,77 \text{ MPa}, \quad \tau = 0,32 \text{ MPa}$$

Passt ganz gut.

3 Verformungen

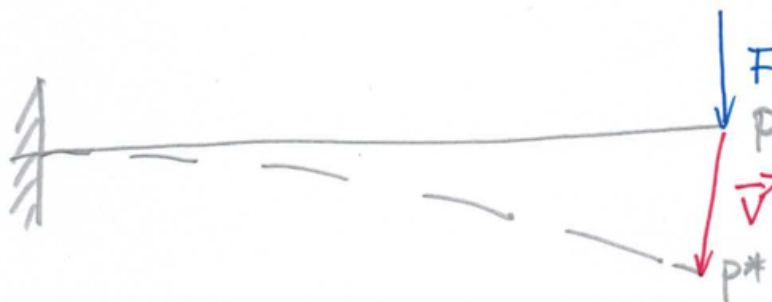
Wir wenden uns dem nächsten Thema zu. Bisher haben wir Spannungen betrachtet. Diese bleiben nicht folgenlos.

Jedes Vorhandensein von Spannungen führt zu Verformungen. Diese werden durch drei verschiedene Phänomene beschrieben.

Zunächst wird der Eindruck entstehen, die drei Phänomene seien völlig unabhängig voneinander. Zum Schluss stellt sich heraus, dass alle drei voneinander abhängig sind.

1. Verschiebung

Ein Punkt P eines Körpers wird durch Beanspruchung verschoben $P \rightarrow P^*$.

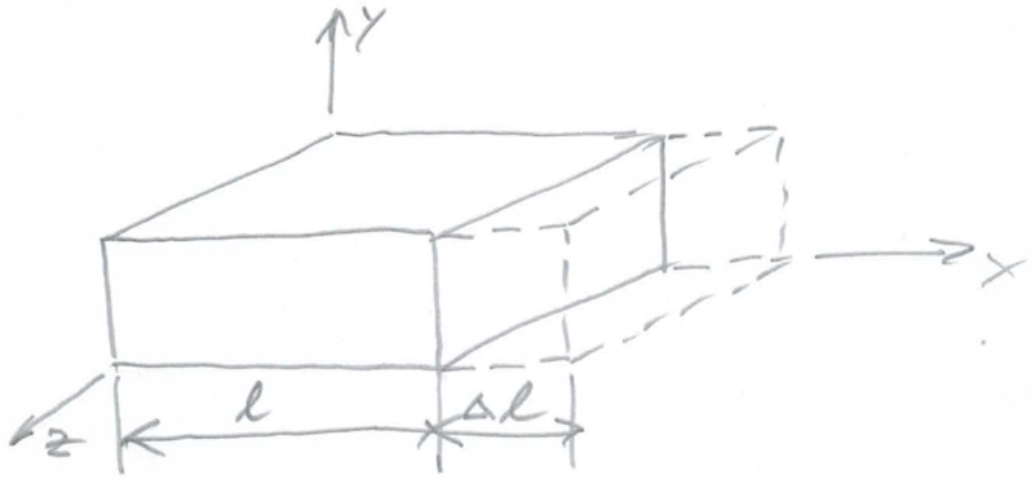


$$(II.25) \quad \text{Verschiebungsvektor} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Die Bezeichnungen sind unglücklich gewählt. Der Buchstabe v taucht zweimal auf. Einmal als der gesamte Vektor $\vec{v}$ und einmal als y -Komponente v . Das ist unschön. Da wir künftig nur mit der Verschiebung in z -Richtung (z -Komponente w) zu tun haben werden, ist der Schönheitsfehler nicht wirklich schlimm. Warum die z -Richtung? Bei unseren Biegebalken liegt das Koordinatensystem so, dass die z -Achse nach unten zeigt, wohin sich Teile des Balkens verschieben werden, wenn wir ihn biegen.

2. Längenänderung (= Dehnung)

Beispiel einer isolierten Längenänderung in x -Richtung:

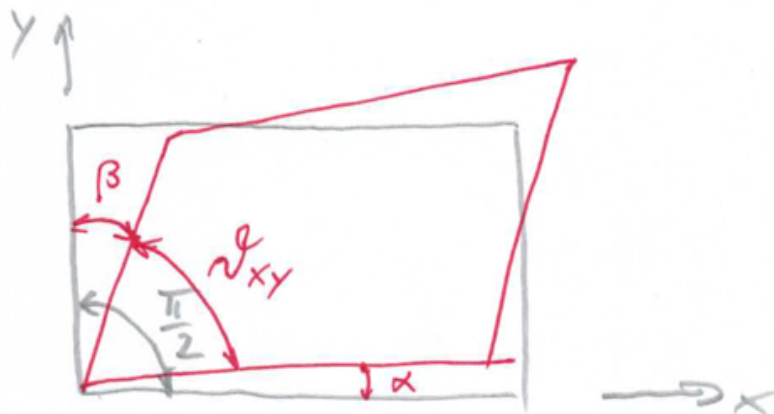


$$(II.26) \quad \text{Dehnung} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Ausgangslänge}}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\text{hier } \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_y, \varepsilon_z \text{ analog}$$

3. Winkeländerung (= Scherung)

Eine ursprünglich rechteckige Oberfläche eines Volumenelements wird durch Beanspruchung rautenförmig.



$$(II.27) \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta_{xy} = \gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

mit

$\frac{\pi}{2}$: Kantenwinkel vor der Verformung

ϑ_{xy} : Kantenwinkel nach der Verformung

γ_{xy} : Scherung

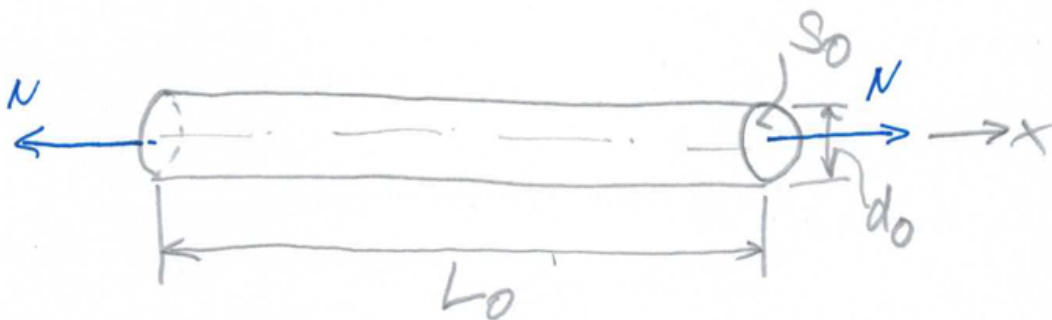
Die Scherung γ_{xy} (sprich gamma xy) ist zwar in der Skizze nicht direkt zu erkennen. Im Gegensatz zum gut erkennbaren Winkel ϑ_{xy} hat die Scherung den großen Vorteil, dass sie Null ist, wenn keine Verformung vorhanden ist. ϑ_{xy} wäre in diesem Fall $\pi/2$.

3.1 Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung

Voraussetzung: Isotropie, d.h. alle Körperpunkte haben gleiche Materialeigenschaften. Es gibt keine Vorzugsrichtungen.

Schweizerkäse ist ein Beispiel für einen anisotropen Werkstoff. Manche Körperpunkte liegen im Käse, manche liegen in einem Loch. Ähnliches gilt für Gusswerkstoffe mit Lunkern. Holz ist ein anderes Beispiel für einen anisotropen Werkstoff. Durch die Faserstruktur hat Holz eine Vorzugsrichtung. Kundige Holzhacker versuchen erst gar nicht quer zur Faser zu hacken, sondern nehmen die Kettensäge. Faserverstärkte Kunststoffe wie GFK und CFK gehören auch zu dieser Kategorie.

Grundversuch: Axial gezogener (oder gedrückter) Zylinder. In einem solchen Fall nennen wir die Struktur einen Stab.



Annahme: In hinreichendem Abstand vom Kraftangriffspunkt herrscht ein gleichmäßiger, über den Querschnitt verteilter eindimensionaler Spannungszustand (SAINT-VENANT'sches Prinzip) mit

$$\sigma_x = \frac{N}{S_0}$$

Der Abstand d_0 , vom Kraftangriffspunkt stabeinwärts gemessen, genügt. Übrigens, σ_x ist bei diesem Spezialfall eine Hauptspannung, da keinerlei Schubspannungen vorhanden sind. Wir bleiben diesmal bei der Bezeichnung σ_x und benennen nicht um in σ_1 oder σ_2 oder σ_3 .

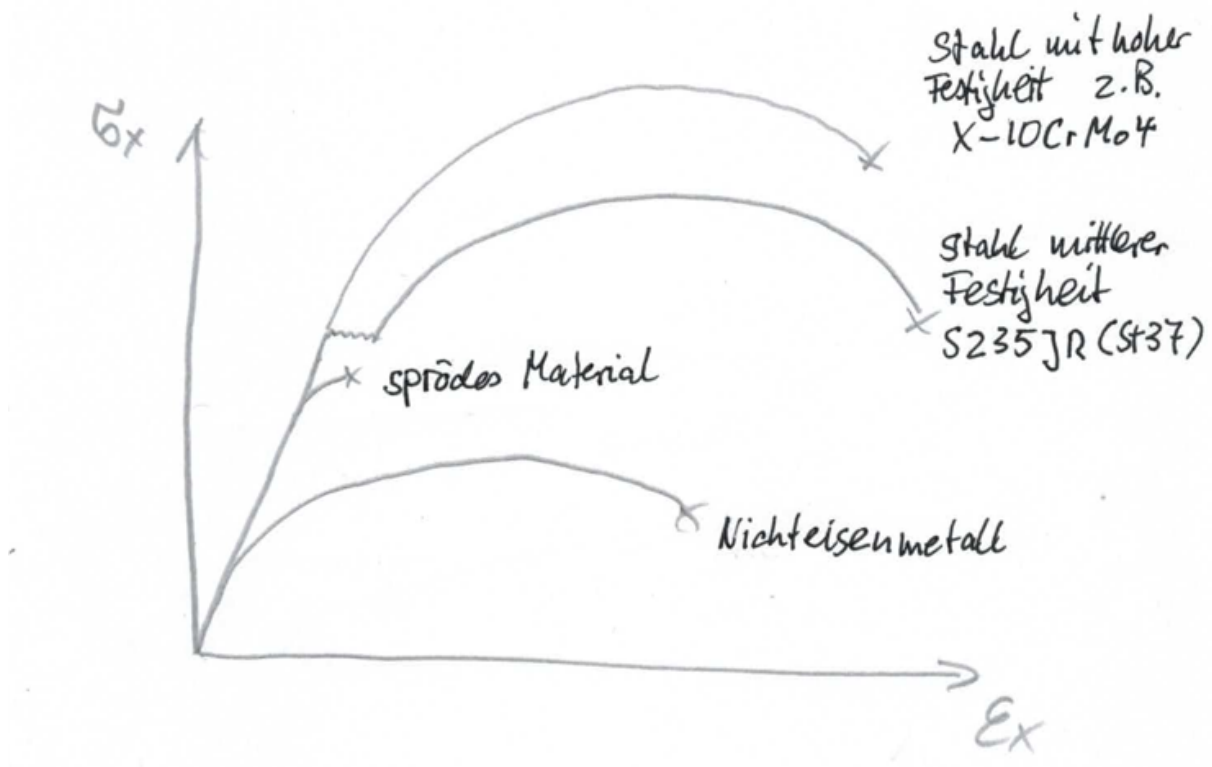
Das Ergebnis ist eine

- Stabverlängerung um ΔL ,
- Querkontraktion um Δd .

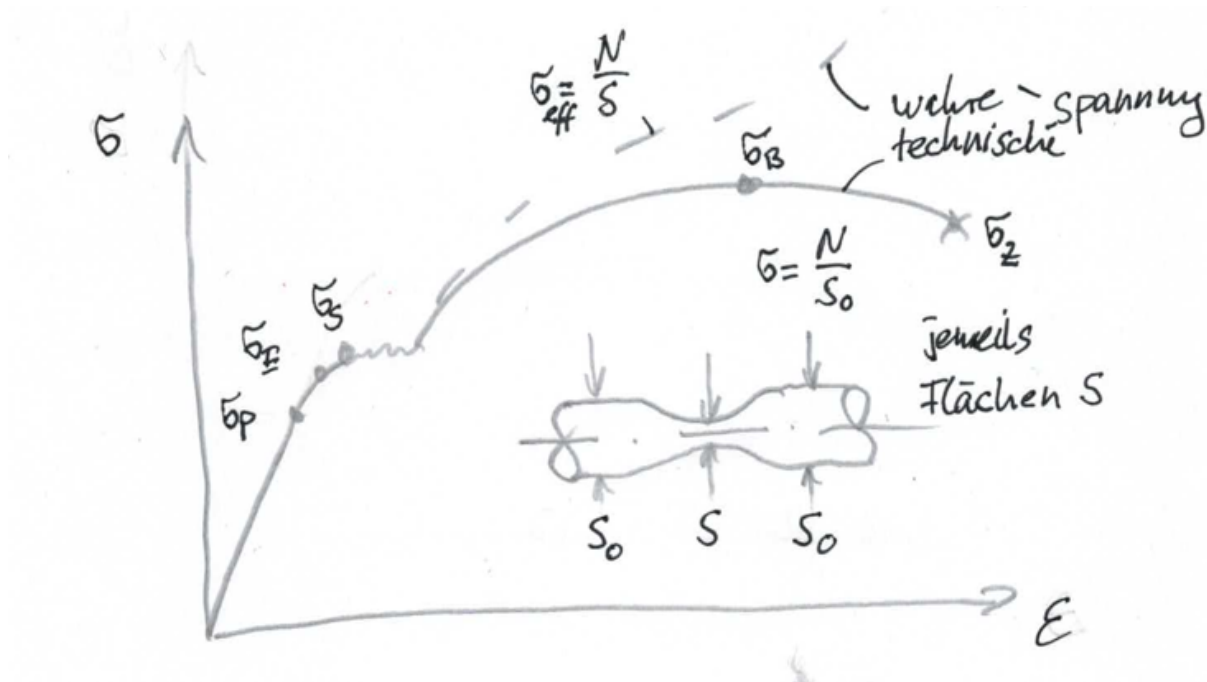
Erkenntnis: Der Zusammenhang zwischen

$$\sigma_x = \frac{N}{S_0}, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}$$

ist für jedes Material verschieden. Eine echte Nullaussage, danke für das Geräusch :-)



Wir betrachten die üblichen Bezeichnungen in solchen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen.



σ_P : Proportionalitätsgrenze oder theoretische Elastizitätsgrenze. Bis dahin reversibles Verhalten. Linearer Kurvenverlauf mit Steigung E (Elastizitätsmodul).

σ_E (R_p): Dehngrenze, oder technische Elastizitätsgrenze. Bei Entlastung irreversibler Dehnungsanteil von 0,01% ($\epsilon = 0,0001 = 1 \cdot 10^{-4}$). Weitere Bezeichnungen: $\sigma_E = \sigma_{0,01} = R_{p0,01}$.

σ_S (R_e): Streck- oder Fließgrenze, sofern ausgeprägt. Ohne ausgeprägte Fließgrenze, einführen einer technischen Fließgrenze. Weitere Bezeichnungen: $\sigma_S = \sigma_{0,02} = R_{p0,2}$

σ_B (R_m): Zugfestigkeit, starke örtliche Einschnürung, Maximum der σ - ϵ -Kurve, noch kein Bruch außer bei sprödem Material.

σ_Z : Bruchfestigkeit, zerreißen der Probe. Hat keine praktische Bedeutung als Materialkennwert.

In der Mechanik und in der Werkstofftechnik sind die Spannungsbezeichnungen leider auseinandergedriftet. Die Mechanik hat keine Scheu vor dem griechischen Buchstaben sigma, während die Werkstoffkunde wohl ohne griechischen Zeichensatz auskommen möchte.

Nachsatz zu σ_P : Diesen Wert messtechnisch zu erfassen, ist nicht wirklich möglich. Nach der Entlastung darf keine bleibende Längenänderung vorliegen. Das trifft aber auch bei Belastungen mit kleineren Spannungswerten zu. Deshalb hat man willkürlich definiert, wenn 0,01% bleibende Dehnung übrig bleibt, dann kann man das gut messen, es ist aber noch keine nennenswerte bleibende Dehnung. Daher hat σ_P auch keine werkstoffkundliche Bezeichnung mit R .

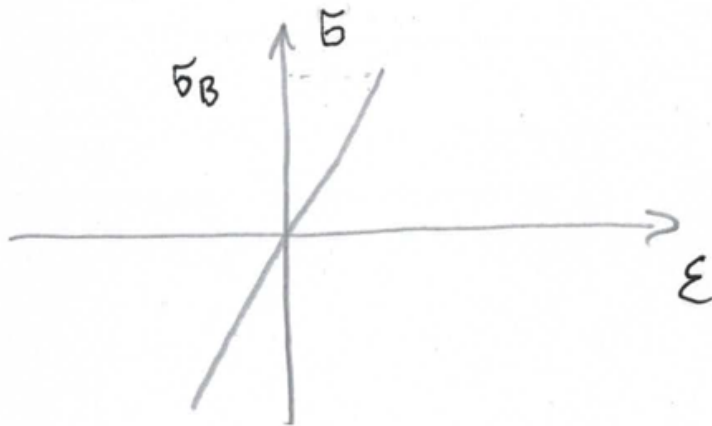
Völlig ohne technische Bedeutung ist der Verlauf der wahren Spannung. Den Verlauf messtechnisch zu erfassen, wäre extrem aufwendig. Bei Beginn der Querkontraktion müsste man die Probe entlasten, ausbauen, abdrehen, so dass die Einschnürung verschwunden ist und den Versuch mit kleinerer Querschnittsfläche S ein wenig fortsetzen, wieder unterbrechen, ausbauen, abdrehen usw. – Macht kein Mensch.

Das alles ist uns viel zu kompliziert. Wir brauchen eine

Vereinfachte Darstellung

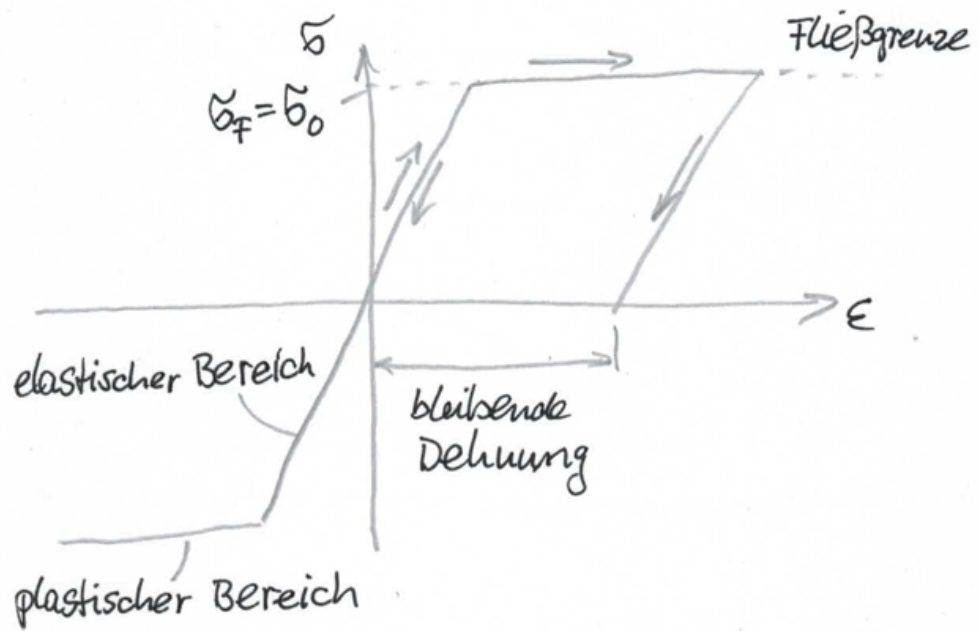
In erster Näherung gibt es in der technischen Mechanik nur zwei Werkstoffe

1. Sprödes Material



Es gibt eine lineare Abhängigkeit zwischen σ und ϵ . Mit Erreichen der Zugfestigkeit σ_B zerreißt das Material. Glas kommt dieser Idealisierung ziemlich nahe.

2. Elastisch, ideal plastisches Material



Sofern die Fließgrenze σ_F nicht überschritten wird, sind die Verformungen reversibel und finden entlang der Geraden im elastischen Bereich statt. Wird die Fließgrenze überschritten, gibt es eine plastische Verformung. Nach der Entlastung verbleibt in einem solchen Fall eine bleibende Dehnung.

3.2 Elastischer Bereich, HOOKEsches Gesetz

Wir haben uns ein stark vereinfachtes Materialverhalten beschafft. Nun betrachten wir den elastischen Bereich, der so bei nahezu jedem Werkstoff zu finden ist, zumindest wenn wir es mit der Belastung nicht übertreiben.

Es gilt:

$$(II.28) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i \quad \text{mit } i = 1, 2, 3.$$

Dieses HOOKE²sche Gesetz gilt nur für den Fall, dass eine einzige Hauptspannung auftritt (= einachsiger Zug oder Druck).

E : YOUNG³scher Elastizitätsmodul. Er ist experimentell für jedes Material zu ermitteln. Für Stahl gilt näherungsweise

$$E_{\text{St}} = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

²Robert Hooke, 1635 bis 1703

³Thomas Young, 1773 bis 1829

Ein Stab unter Zugspannung wird gedehnt mit $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$, dabei nimmt sein Durchmesser ab.

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

Der Zusammenhang zwischen Längs- und Querdehnung ε_q ist materialabhängig

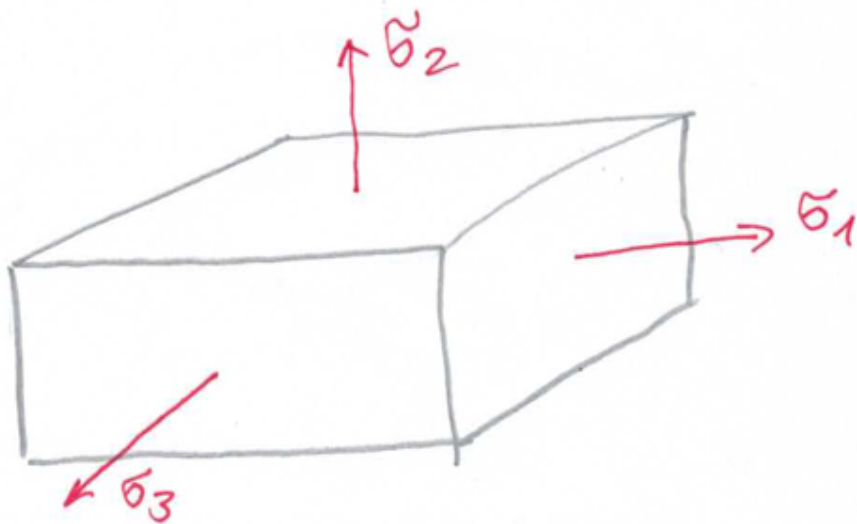
$$(II.29) \quad \varepsilon_q = -\nu \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

ν : POISSON⁴sche Querkontraktionszahl. $\nu_{St} = 0,25 \dots 0,3$. Es gilt $\nu \leq 0,5$.

Bei ν handelt es sich um den griechischen Buchstaben nü. Obiges ausgesprochen lautet: Nü-Stahl gleich 0,3.

Anmerkung: Die häufige Annahme einer Volumenkonstanz des gedehnten Körpers tritt in der Regel nicht ein. Ausnahme Gummi mit $\nu_{Gummi} = 0,5$. Bei $\nu = 0,5$ bleibt das Volumen konstant.

Beim räumlichen Hauptspannungszustand,



d.h., es treten drei Hauptspannungen auf, jedoch keine Schubspannungen, gilt:

⁴Siméon Denis Poisson 1781 bis 1840

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)] \\
 \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)].
 \end{aligned}
 \tag{II.30}$$

Dieser Zusammenhang ist von eventuell auftretenden Schubspannungen unabhängig. In einem beliebigen Spannungszustand gilt:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)].
 \end{aligned}
 \tag{II.31}$$

Für den Zusammenhang zwischen Schubspannungen und Scherungen im elastischen Bereich gilt

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau.
 \tag{II.32}$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}$$

gilt

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

G : Schubmodul. Bei Stahl mit $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa und $\nu = 0,3$ gilt $G \approx 8,1 \cdot 10^4$ MPa.

Weiterführende Hinweise

Die hier getrennt behandelten Verformungsgrößen

- Verschiebungen u, v, w bzw. $\vec{v}$ [m, mm]
- Dehnungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ [1]
- Scherungen $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ [1] bzw. [rad]

sind voneinander abhängig. Beispiele ohne Beweis:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \dots$$

Alle Verformungsgrößen ε und γ werden im CAUCHY-GREENSchen Verzerrungstensor zusammengefasst

$$(II.33) \quad \underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

3.2.1 Übungsaufgabe, CAUCHY-GREENScher Verzerrungszustand

Für einen ideal elastischen Werkstoff sei in einem Punkt P der folgende Spannungszustand gegeben:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 100 \text{ MPa}$$

Ferner ist gegeben: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$.

Gesucht: CAUCHY-GREENScher Verzerrungszustand.

Zusatzfragen:

1. Ist der Verzerrungszustand räumlich, eben oder einachsig?
2. Welcher Spannungszustand liegt vor, zeichnen Sie den MOHRschen Kreis.

Allgemein gilt:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Für die Dehnungen gilt

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [400 - 0,3 \cdot 100]$$

$$\varepsilon_x = 1,76 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [100 - 0,3 \cdot 400]$$

$$\varepsilon_y = -0,095 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [0 - 0,3 \cdot 500]$$

$$\varepsilon_z = -0,71 \cdot 10^{-3}$$

Nun die Scherungen

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2,6}{2,1 \cdot 10^5} \cdot 200$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2,48 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx} = 1,24 \cdot 10^{-3}$$

CAUCHY-GREENScher Verzerrungszustand:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} +1,76 & +1,24 & 0 \\ +1,24 & -0,095 & 0 \\ 0 & 0 & -0,71 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

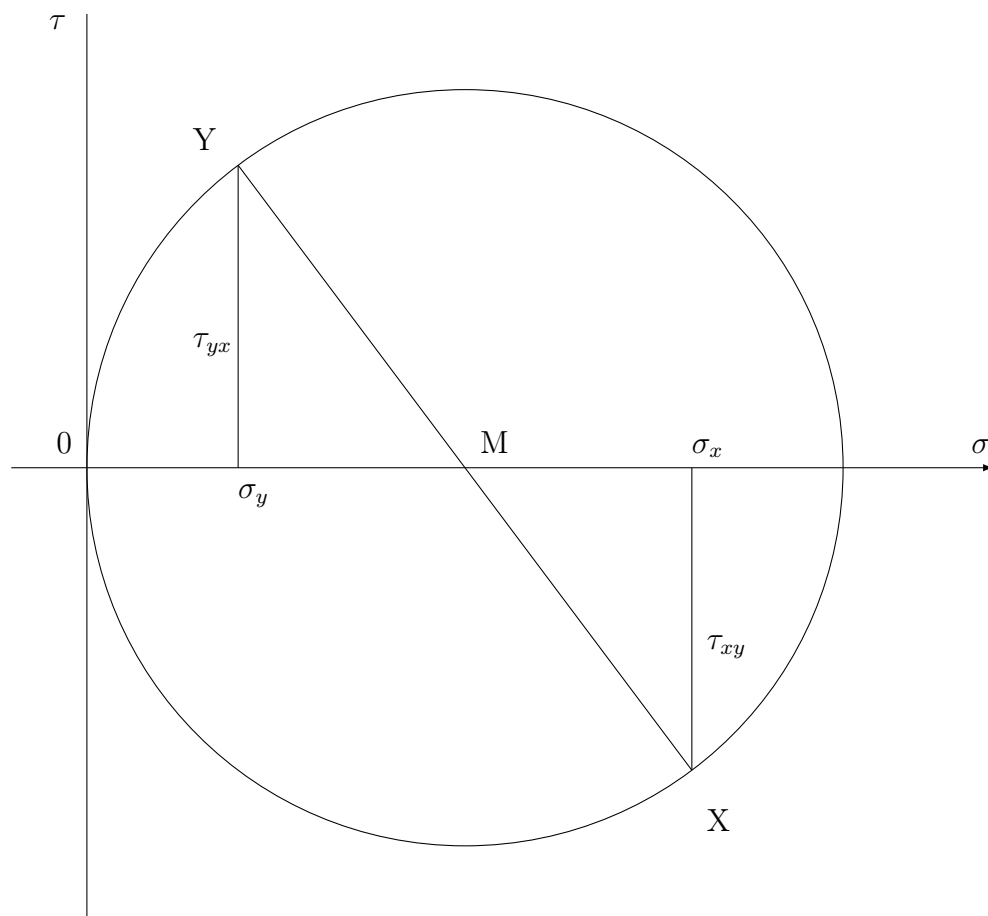
1. Ist der Verzerrungszustand räumlich, eben oder einachsigt?

Da auf der Position von ε_z ein von Null verschiedener Zahlenwert steht, haben wir einen räumlichen Verzerrungszustand.

2. Welcher Spannungszustand liegt vor?

Bei der Spannungsmatrix finden wir eine Zeile Nullen und eine Spalte Nullen. Das ist ein klarer Nachweis für einen ebenen Spannungszustand. Üblicherweise sind in einem solchen Fall nur vier Zahlenwerte oben links in der Ecke vorhanden, so wie hier. Übrigens einen einachsigen (synonym: eindimensionalen) Spannungszustand finden wir, wenn nur ein σ -Wert alleine in der Matrix steht, sonst nur Nullen.

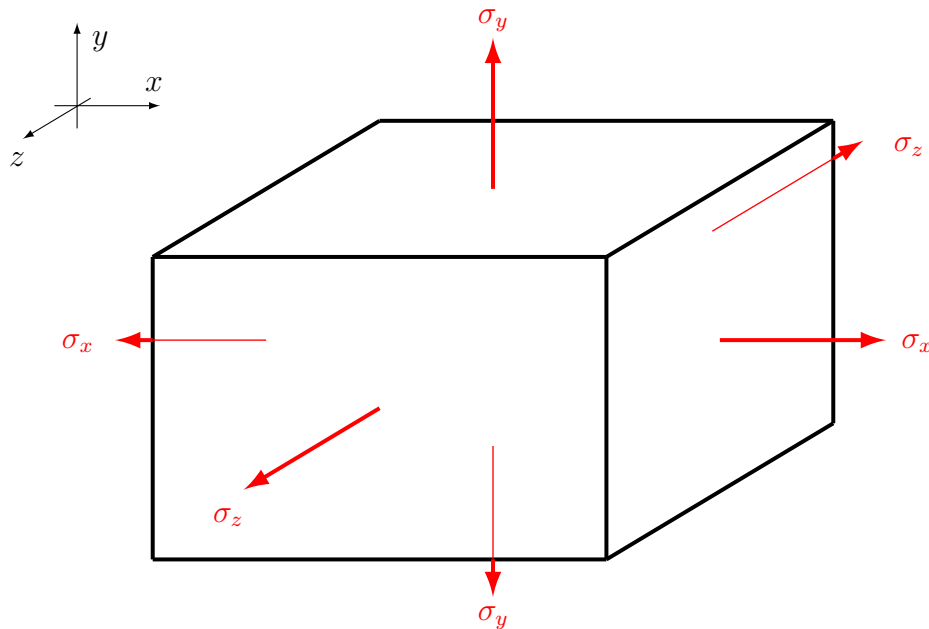
MOHRscher Kreis, Maßstab: $1 \text{ cm} \hat{=} 50 \text{ MPa}$



Hier können Sie das Finden der Hauptspannungen üben (Schnittpunkte des Kreises mit der σ -Achse. Wer möchte kann auch Schnittbilder für die Schubspannungsfreien Ebenen zeichnen. ■

3.2.2 Übungsaufgabe, Längenänderung eines Quaders

Auf einen Stahlwürfel wirken folgende Spannungen (tatsächlich ein Würfel, auch wenn die Skizze anders aussieht):



$$\begin{aligned}
 |\sigma_x| &= 200 \text{ MPa} && \text{als Zugspannung} \\
 |\sigma_y| &= 150 \text{ MPa} && \text{als Druckspannung} \\
 |\sigma_z| &= 100 \text{ MPa} && \text{als Druckspannung} \\
 E &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, && \nu = 0,3 \\
 \ell_x &= \ell_y = \ell_z = 40 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Gesucht sind die Kantenlängen in belastetem Zustand ℓ_x^* , ℓ_y^* , ℓ_z^* .
Es gibt keine Schubspannungen.

Wir haben drei Normalspannungen gegeben mit verschleiertem Vorzeichen. Es gibt die feste Vorgabe: Druckspannungen sind negativ, Zugspannungen sind positiv. Ferner gibt es den Hinweis, dass es keine Schubspannungen gibt. Also sind die Spannungen σ_x , σ_y , σ_z Hauptspannungen. Das ist verwirrend. Daher noch einmal folgender Hinweis:

σ_x , σ_y , σ_z zeigen immer in x , y , z -Richtung
 σ_1 , σ_2 , σ_3 sind immer Hauptspannungen.

Wenn aber eine Hauptspannung in x -Richtung zeigt, dann kann sie wahlweise σ_x oder σ_{123} heißen. Welche Ziffer im Index steht, ist willkürlich.

Vorzeichenüberlegung

$$\sigma_x = +200 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -150 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = -100 \text{ MPa}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\Delta \ell_x}{\ell_x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{\Delta \ell_y}{\ell_y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\Delta \ell_z}{\ell_z}$$

Neue Kantenlänge

$$\ell_x^* = \ell_x + \Delta \ell_x = \ell_x + \ell_x \varepsilon_x = \ell_x (1 + \varepsilon_x)$$

$$\ell_x^* = \ell_x \left(1 + \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \right)$$

$$\ell_x^* = 40,052 \text{ mm}$$

$$\ell_y^* = \ell_y \left(1 + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \right)$$

$$\ell_y^* = 39,966 \text{ mm}$$

$$\ell_z^* = \ell_z \left(1 + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \right)$$

$$\ell_z^* = 39,978 \text{ mm}$$

4 Vergleichsspannungshypothesen

Problemstellung Gegeben sei ein dreiachsiger (synonym: räumlicher) Spannungszustand für einen Punkt eines belasteten Bauteils. Ab welchen Zahlenwerten im Spannungstensor $\underline{\underline{S}}$ tritt plastisches Fließen ein?

Da im Spannungstensor neun (sechs unabhängige)⁵ Zahlenwerte angesammelt sind, ist die Antwort alles andere als trivial.

Lösung Es muss ein Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor $\underline{\underline{S}}$ (9 bzw. 6 Größen) oder besser seinen Invarianten I_1, I_2, I_3 und einer Vergleichsspannung hergestellt werden, die direkt mit Materialkennwerten verglichen werden kann.

$$\sigma_v = f(I_1, I_2, I_3)$$

σ_v kann z.B. mit der Fließgrenze σ_F des elastisch-ideal plastischen Werkstoffs verglichen werden.

Wir reduzieren unser Problem von neun Belastungsgrößen (Spannungen) in der Matrix zunächst auf drei Invarianten I_1, I_2, I_3 und dann weiter auf einen einzigen Zahlenwert σ_v . Den können wir dann mit Materialkennwerten aus der Werkstoffkunde vergleichen. Dieser Vergleich liefert die Aussage „hält oder hält nicht“.

Der erste Schritt ist noch mathematisch korrekt, Invarianten können präzise berechnet werden. Vorgriff: Aus diesen Invarianten bestimmen wir die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, was auch mathematisch präzise vonstatten geht aber es sind immer noch drei Zahlenwerte.

Der nächste Schritt, die Reduktion von drei Spannungen auf eine einzige, ist nicht mathematisch korrekt, sondern eine Hypothese (Annahme).

Eine besonders hirnrissige Hypothese ist folgende: Lasst uns die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ addieren. Wenn das Ergebnis kleiner ist, als die Fließgrenze sollte das Bauteil eigentlich nicht kaputt gehen. Da ist es wieder, das hässliche Wort. Diese Hypothese ist völlig untauglich. In manchen Fällen verschwendet man Material, in anderen Fällen fliegt einem alles um die Ohren.

Wir benötigen bessere Vergleichsspannungshypothesen, die sogar funktionieren. Die schlechte Nachricht bei dem Thema: Wir müssen Hauptspannungen bestimmen (MOHRscher Kreis oder charakteristisches Polynom). Die gute Nachricht: Die Vergleichsspannungshypothesen (es gibt zwei Stück) sind reine Taschenrechnerakrobatik.

⁵Die Schubspannungen tauchen immer paarweise mit gleichem Zahlenwert auf. Beispiel $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

An einem abschreckenden haben wir gesehen, dass die Vergleichsspannungshypothesen etwas durchdachter sein müssen. Es stellt sich die Frage, was ist das Kriterium, dass ein Werkstoff beginnt zu fließen.

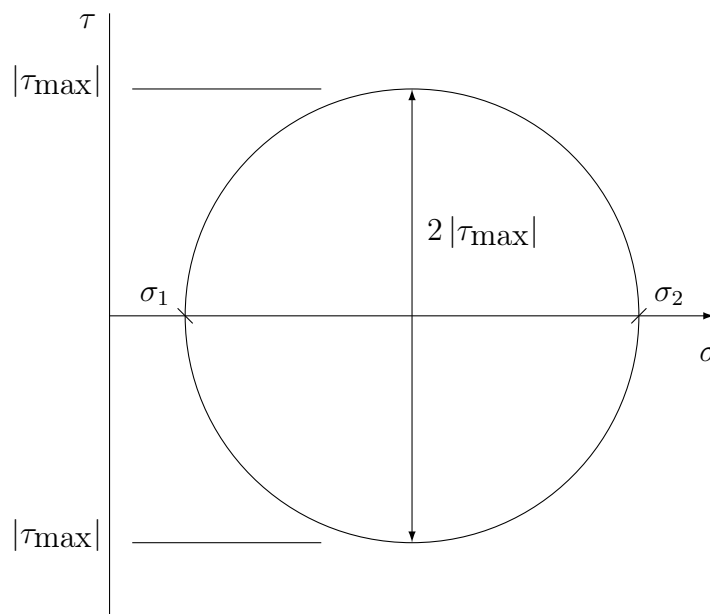
4.1 Mögliche Fließkriterien

1. Fließbedingung nach TRESCA⁶, auch genannt Schubspannungshypothese.

TRESCA fand heraus, dass das Doppelte der maximale Schubspannung ein gutes Kriterium für die Werkstoffbelastung ist. Damit ist jedoch nicht der größte Schubspannungszahlenwert gemeint, der in der Spannungsmatrix steht, sondern die tatsächlich auftretende maximale Schubspannung, auf einer irgendwie geeigneten Schnittfläche.

$$2 |\tau_{\max}| = \sigma_v,$$

mit $\tau_{\max}$ aus dem MOHRschen Kreis.



Der Durchmesser des MOHRschen Kreis ist das Fließkriterium. Er berechnet sich erkennbar aus einer Hauptspannungsdifferenz.

Für den räumlichen Hauptspannungszustand gilt

$$(II.34) \quad \sigma_v = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

⁶Henri Édouard Tresca, 1814 bis 1884

Wir suchen also den Betrag der größten Hauptspannungsdifferenz, sie ist unsere Vergleichsspannung nach TRESCA.

2. Hypothese von HUBER und VON MISES⁷, genannt Gestaltänderungsenergiehypothese.

Der Grundgedanke der Herren HUBER und VON MISES war, dass die Energie, die aufgewandt werden muss, um einen Körper zu verzerren, das Fließkriterium ist. Auf eine Herleitung wird verzichtet, es wird lediglich das Ergebnis verkündet.

$$(II.35) \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$

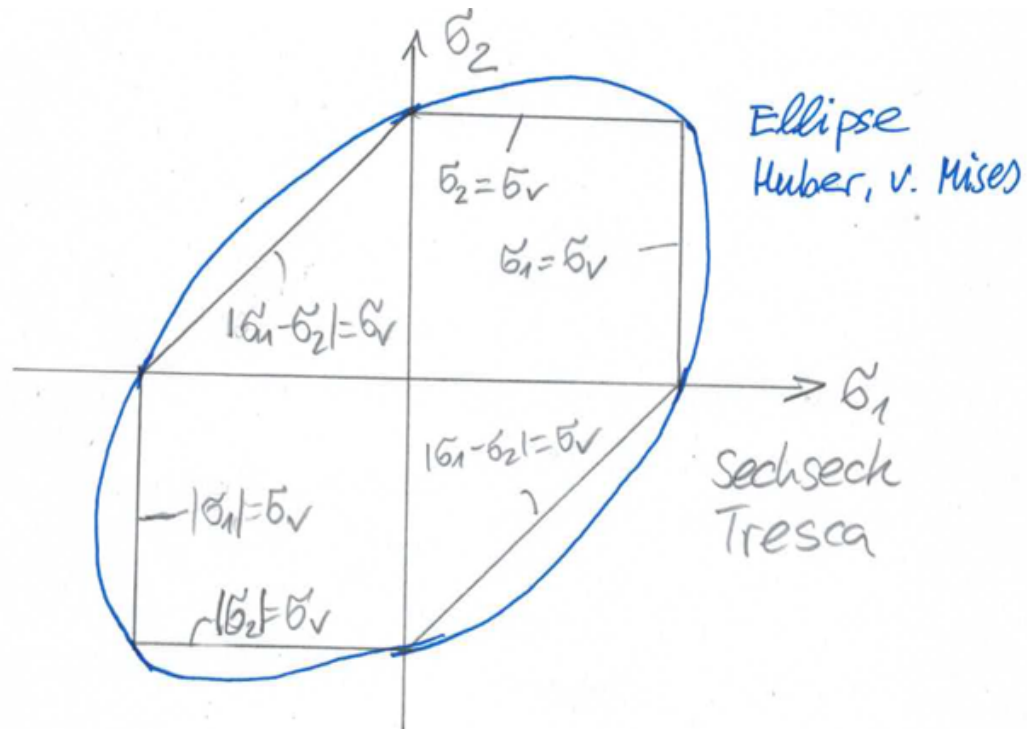
Taktischer Hinweis. Bei der Berechnung nach HvM passiert folgender klassische Fehler: Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird nur bei $(\sigma_1 - \sigma_2)^2$ angewandt und bei den anderen Termen vergessen. Um das zu verhindern speichern Sie die drei Hauptspannungen incl. Vorzeichen in die Speicher A, B, C Ihres Taschenrechners und tippen Sie die Gleichung (II.35)

Bei beiden Hypothesen müssen aus einem beliebigen räumlichen Spannungszustand zunächst der räumliche Hauptspannungszustand bestimmt werden.

Das ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Wir wissen, das geht auf zwei Wegen, entweder charakteristisches Polynom oder MOHRscher Kreis. Mit den Bordmitteln während der Klausur schaffen wir das nur bei ebenem Spannungszustand. Beide Verfahren liefern zunächst nur zwei Zahlenwerte, nennen wir sie σ_1, σ_2 . Wichtig ist, dass die dritte Hauptspannung nicht vergessen wird. Beim ebenen Spannungszustand gilt $\sigma_3 = 0$. Die Vergabe der Ziffern im Index ist – wie wir wissen – willkürlich.

⁷Maksymilian Tytus Huber, 1872 bis 1950,
Richard Edler von Mises, 1883 bis 1953.

Zeichnerische Darstellung von (II.34) und (II.35) für den ebenen Hauptspannungszustand mit $\sigma_3 = 0$ in einem σ_1, σ_2 -Koordinatensystem.



Liegt der Spannungszustand eines Körperpunkts, dargestellt durch σ_1, σ_2 und $\sigma_3 = 0$ im Inneren der Fließfigur (Sechseck oder Ellipse), so verhält sich das Material elastisch. Am Rand tritt plastisches Fließen ein. Außerhalb der Fließfigur ist die Vergleichsspannung σ_v größer als die Fließgrenze σ_F .

TRESCA kalkuliert 'vorsichtiger' als HUBER und VON MISES. Im Stahlbau ist HUBER und VON MISES üblich.

Wir sind noch nicht ganz fertig. Nach der Entscheidung 'hält', weil $\sigma_v < \sigma_F$ möchte die Ingenieurin, der Ingenieur auch noch gut schlafen können. Üblicherweise geht man nicht bis an die Grenze der Fließfigur sondern hält einen Sicherheitsabstand, bzw. man führt einen Sicherheitsfaktor ein

4.2 Zulässige Spannung

Bei beiden Hypothesen muss gelten

$$\sigma_v < \sigma_{\text{zul}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

bei Auslegung im elastischen Bereich, oder

$$\sigma_v < \sigma_{\text{zul}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_B}{s_B}$$

bei Auslegung im plastischen Bereich. Dabei sind s_F , s_B Sicherheitsfaktoren gegen Fließen bzw. gegen Bruch. σ_F ist die Fließgrenze und σ_B die Zugfestigkeit.

Zusammenfassung zur Dimensionierung von Bauteilen

1. Gefährdete Bauteilbereiche identifizieren. Details später, z.B. maximales Biegemoment suchen.
2. Spannungszustand an dieser Stelle erfassen. Spannungsberechnung später $\rightarrow \underline{S}$.
3. Hauptspannungen bestimmen $\rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
4. Vergleichsspannungshypothese anwenden $\rightarrow \sigma_v$.
5. σ_v mit σ_{zul} vergleichen.

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F} \text{ gegen Fließen}$$

$$\sigma_v < \sigma_{\text{zul}} \quad \text{mit}$$

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_B}{s_B} \text{ gegen Bruch}$$

Sicherheitsfaktoren sind Unsicherheitsfaktoren!

Welchen Sicherheitsfaktor man wählt, ist sehr verschieden. Im Seilbahnbau wird wegen der noch nicht restlos bekannten Vorgänge in Drahtseilen mit bis zu $s_F = 8$ gerechnet. Grund sind die Wechselbiegungen über einen langen Zeitraum in rauer, korrosiver Umgebung. Zudem werden Drahtseile zur Personenbeförderung nach bestimmten Nutzungsdauern verworfen. Am anderen Ende der Skala erzählt man sich die Geschichte, dass bei der Entwicklung der Mondrakete Saturn V mit $s_B = 0,9$ gerechnet wurde. Wird schon gut gehen, ist ja ohnehin eine Wegwerfrakete. Irgendwo dazwischen müssen Sie Ihr Schlafmittel dosieren. Ein anderes Bild lautet in diesem Zusammenhang: Die Leute von Doppelmayr⁸ ziehen sich warm an; die NASA-Fritzen von damals standen in der Badehose da.

⁸Österreichischer Seilbahnhersteller, Weltmarktführer. Beim Skifahren (in Ischgl und überall sonst) sehen Sie das Firmenschild an jedem Stützmast.

4.2.1 Übungsaufgabe, Vergleichsspannungshypothesen

Gegeben sind ebene Spannungszustände. Berechnen Sie die Vergleichsspannungen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese.

1.

$$\sigma_x = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 100 \text{ MPa}$$

2.

$$\sigma_x = -500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 300 \text{ MPa}$$

Verwenden Sie zunächst die Methode mit MOHR'schem Kreis und bestätigen Sie die Ergebnisse durch eine Berechnung mit charakteristischem Polynom.

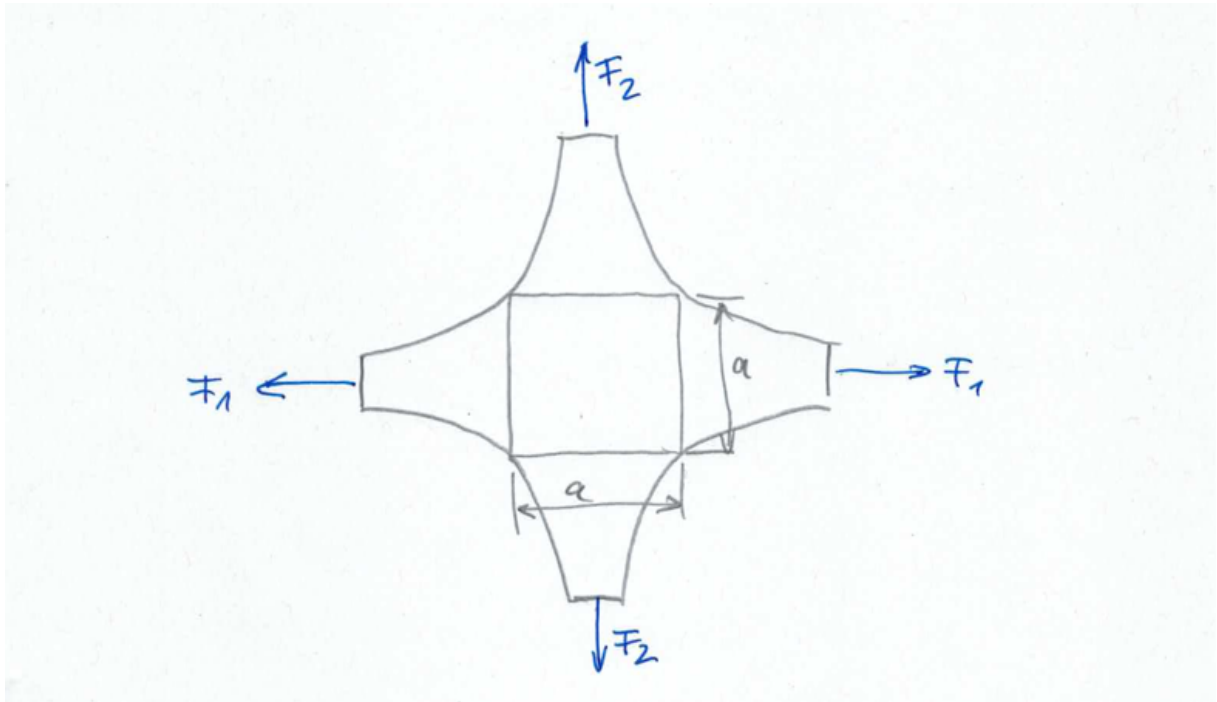
Ergebnisse

1. $\sigma_1 = 240 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -40 \text{ MPa}$, rechnerisch $\sigma_1 = 241,4 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -41,4 \text{ MPa}$.
 $\sigma_v = 264,5 \text{ MPa}$. Nicht vergessen, $\sigma_3 = 0$.
2. $\sigma_1 = -660 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 60 \text{ MPa}$, rechnerisch $\sigma_1 = -660,56 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 60,56 \text{ MPa}$.
 $\sigma_v = 692,83 \text{ MPa}$.

Abweichungen auf Grund von Rundungen oder dickem Bleistift sind möglich.

4.2.2 Übungsaufgabe, Knotenblech 2, TRESCA

Ein Knotenblech wird durch äußere Kräfte beansprucht.



Im quadratischen Kernbereich kann ebener Hauptspannungszustand angenommen werden.

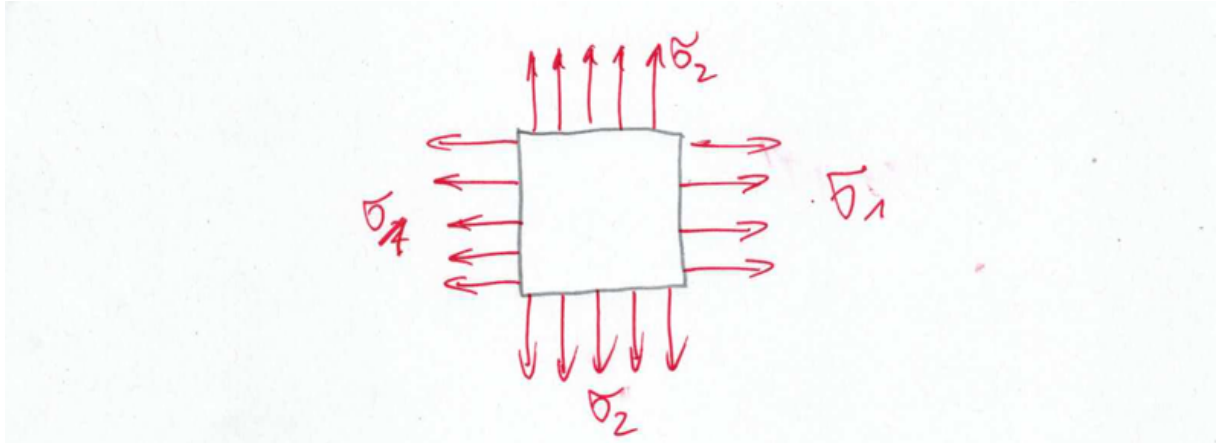
Gegeben: $F_1 = 30 \text{ kN}$, $a = 40 \text{ mm}$, Blechdicke $d = 3 \text{ mm}$, $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$.

Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen nach TRESCA für

a)
 $F_2 = +10 \text{ kN}$

b)
 $F_2 = -10 \text{ kN}$

Wir betrachten den quadratischen Kernbereich des Knotenblechs. Bei der Gelegenheit sei darauf hingewiesen, dass meine Darstellung von Spannungen nicht einheitlich ist. Im folgenden Bild symbolisiert eine Vielzahl von Pfeilen die Spannung, in anderen Fällen ein einzelner Pfeil. Auch in solchen Fällen sind Spannungen auf der gesamten Fläche vorhanden. Da im vorliegenden Fall aus Einzelkräften Spannungen berechnet werden sollen, ist der zweifelsfreie zeichnerische Hinweis „Spannung wirkt auf der gesamten Kantenfläche“ von Vorteil.



Spannungsberechnung

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{a d}, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{a d}.$$

Die Aufgabenstellung weist uns auf einen Hauptspannungszustand hin, so dass die Bezeichnungen σ_1 , σ_2 korrekt sind. Zufällig passen die Indizes zu denen der Kräfte.

Wir betrachten die Aufgabenteile a) und b) parallel

$$\text{a) } \sigma_1 = 250 \text{ MPa, } \sigma_2 = 83,3 \text{ MPa} \qquad \text{b) } \sigma_1 = 250 \text{ MPa, } \sigma_2 = -83,3 \text{ MPa}$$

Vergleichsspannungshypothese nach TRESCA.

$$\sigma_v = \max \left[|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3| \right].$$

Wichtig:

$$\sigma_3 = 0$$

a)
 $\sigma_1 - \sigma_2 = 167 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 - \sigma_3 = 83,3 \text{ MPa}$
 $\sigma_1 - \sigma_3 = 250 \text{ MPa}$

$$\sigma_v = 250 \text{ MPa.}$$

b)
 $\sigma_1 - \sigma_2 = 333,3 \text{ MPa}$
 $|\sigma_2 - \sigma_3| = 83,3 \text{ MPa}$
 $\sigma_1 - \sigma_3 = 250 \text{ MPa}$

$$\sigma_v = 333,3 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_v < \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F}; \quad s_F < \frac{\sigma_F}{\sigma_v}$$

a)
 $s_F < 1,2$

b)
 $s_F < 0,9$

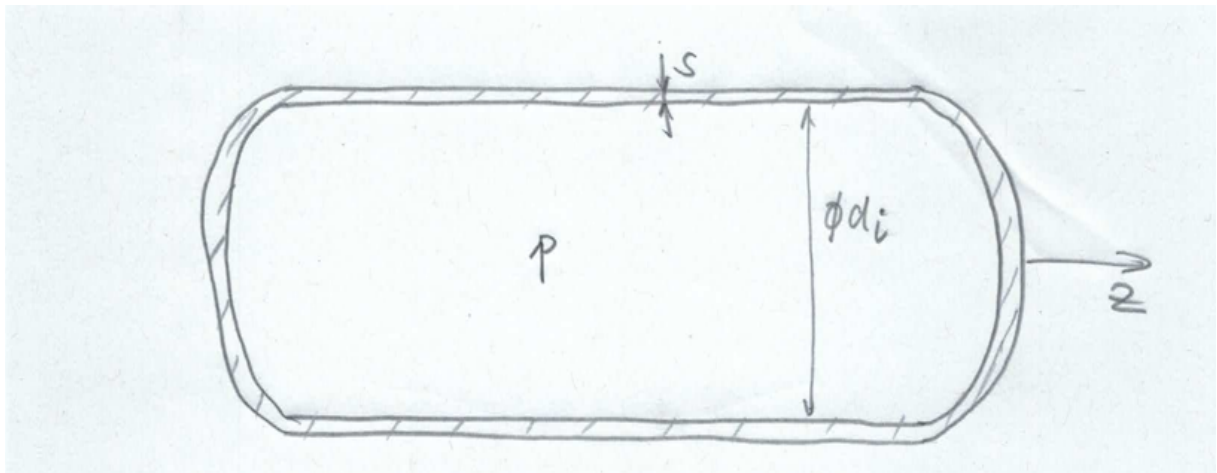
Im Fall b) beginnt das Knotenblech zu fließen. Bauteil ist unterdimensioniert.

Bemerkenswert ist bei dieser Aufgabe, dass nur eine Richtungsumkehr der Kraft F_2 zu den unterschiedlichen Ergebnissen führt. Wir sehen auch, dass bei ebenem Spannungszustand die Tatsache, dass $\sigma_3 = 0$ ist, von entscheidender Bedeutung sein kann.

4.2.3 Übungsaufgabe, Kesselformel

In dieser Übung wollen wir das Mysterium klären, warum Grill- oder Brühwürstchen immer längs aufplatzen, wenn sie zu heiß werden. Sie könnten ja auch ein Ende absprenge oder mittig in zwei Teile platzen. Tun sie aber nicht. Nach Verständnis dieser Übungsaufgabe können Sie bei Grillpartys alle Anwesenden belehren, dass die Würstchen gar keine andere Wahl haben, als längs aufzuplatzen. Das liegt nämlich an der Kesselformel, die wir herleiten werden. Leider werden Sie anschließend zu keiner Grillparty mehr eingeladen.

Ein zylindrischer Kessel steht unter dem Druck p . Wie groß ist die Sicherheit gegen plastisches Fließen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese? Betrachtet sei nur der zylindrische Teil des Kessels.



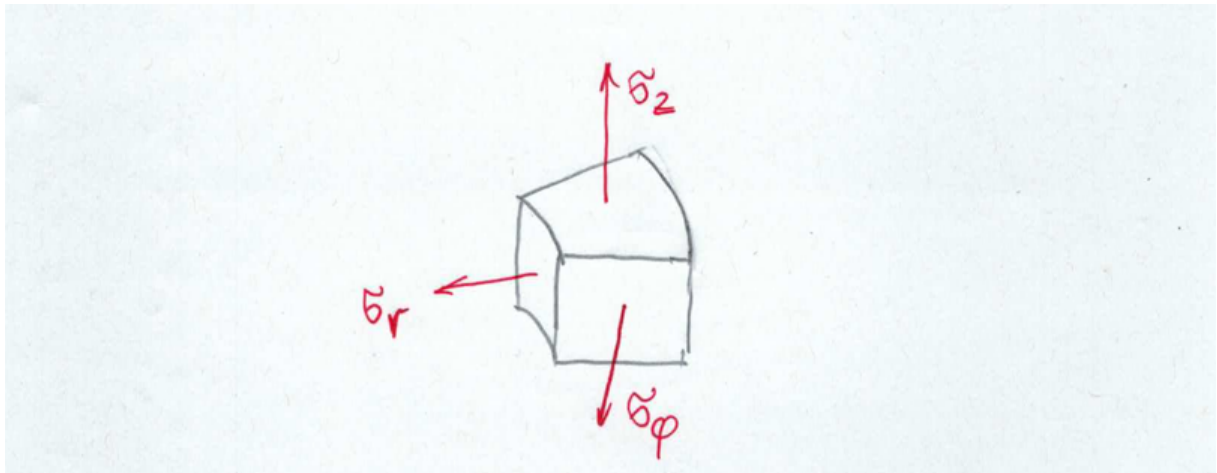
Gegeben: $p = 100 \text{ bar}$, $d_i = 300 \text{ mm}$, $s = 5 \text{ mm}$, $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$.

Zur Erinnerung: Vergleichsspannung nach HUBER und VON MISES.

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$

$$\sigma_v < \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

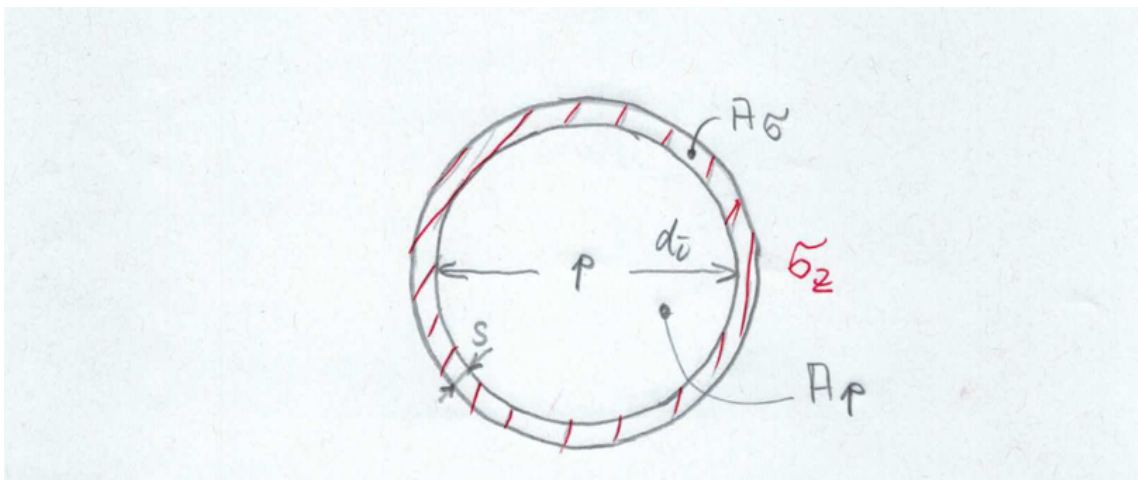
Die Suche nach Hauptspannungen ist hier in einem Zylinderkoordinatensystem vergleichsweise einfach. Wir betrachten ein Stück aus der Kesselwandung ([Bockwurstpel-le](#)).



Wir sehen eine Spannung in Umfangsrichtung σ_φ , eine Spannung in radialer Richtung σ_r und eine Spannung in Längsrichtung σ_z .

Ohne Nachweis: In dünnwandigen Behältern treten keine Schubspannungen auf, so dass die vorhandenen drei Spannungen Hauptspannungen sind. Wir könnten sie umbenennen in σ_{123} , tun das aber nicht.

1. Berechnen von σ_z durch Schneiden des Behälters.



Kräftegleichgewicht aus Druckkräften und Kräften aus σ_z .

$$\sigma_z A_\sigma = p A_p$$

Die Fläche A_σ , die Fläche auf der die Spannung σ_z wirkt berechnet sich zu

$$A_\sigma = [(d_i + 2s)^2 - d_i^2] \frac{\pi}{4}$$

Diese Gleichung ist genau aber unpraktisch. Einfacher ist der Ansatz, indem wir den mittleren Umfang auftrennen, abrollen und ein langgestrecktes Rechteck betrachten. Mittlerer Umfang mal Wandstärke.

$$A_\sigma = (d_i + s) \pi s$$

Bei einem dünnwandigen Behälter kann dieser Zusammenhang noch weiter vereinfacht werden zu

$$A_\sigma = d_i \pi s.$$

Nun zu der Fläche, auf der der Druck p wirkt.

$$A_p = d_i^2 \frac{\pi}{4}$$

Nun kann σ_z berechnet werden.

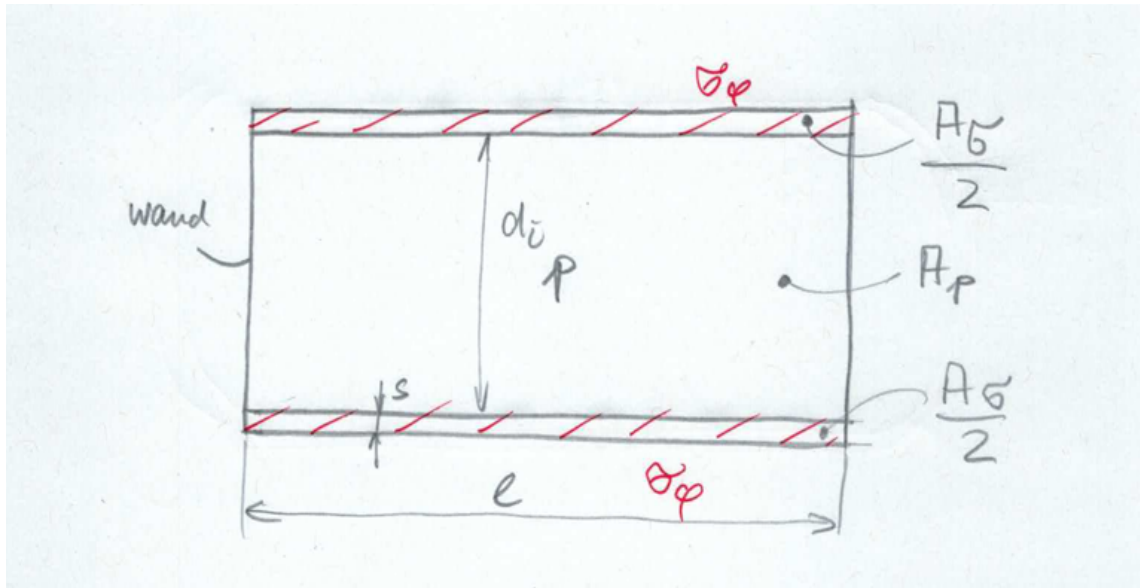
$$\sigma_z = p \frac{A_p}{A_\sigma} = p \frac{d_i^2 \pi}{4 d_i \pi s}$$

Es kann gekürzt werden.

$$\sigma_z = p \frac{d_i}{4s}$$

2. Berechnen von σ_φ

Wir schneiden erneut und erhalten neue, andere Flächen A_σ , A_p . Da wie die Behälterböden nicht betrachten sollen, schließen wir den zylindrischen Teil des Behälters mit zwei dichten aber nicht tragenden virtuellen Wänden ab.



$$\sigma_{\varphi} A_{\sigma} = p A_p$$

Für die Flächenberechnung kennen wir leider die Behälterlänge nicht. Wir erfinden kurzerhand die Länge ℓ und hoffen, dass sie sich herauskürzt.

$$A_{\sigma} = 2 \ell s$$

$$A_p = \ell d_i$$

Nun kann σ_{φ} berechnet werden.

$$\sigma_{\varphi} = p \frac{A_p}{A_{\sigma}} = p \frac{\ell d_i}{2 \ell s}$$

$$\sigma_{\varphi} = p \frac{d_i}{2 s}$$

Wir stellen fest, dass

$$\sigma_{\varphi} = 2 \sigma_z$$

Die Bockwurst hat also keine andere Wahl, als längs aufzureißen. Gleiches gilt für Druckbehälter und Dampfkessel aller Art. Diese Zusammenhänge werden unter dem Begriff Kesselformel zusammengefasst.

3. $\sigma_r = 0$ Wegen des Fehlens von Schubspannungen muss die Radialspannung Null sein. Das ist nicht sehr einleuchtend, da der Innendruck doch auf die innere Oberfläche der Kesselwandung drückt. Trotzdem, in guter Näherung gilt bei dünnwandigen Behältern $\sigma_r = 0$.

Es gilt $1 \text{ bar} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= 100 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{300 \text{ mm}}{2 \cdot 5 \text{ mm}} \\ \sigma_\varphi &= 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_\varphi}{2} = 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Es liegt ein ebener Hauptspannungszustand vor.

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} \\ \sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[150^2 + 300^2 + 150^2 \right]} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_v &= 260 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_v &< \frac{\sigma_F}{s_F} \\ s_F &< \frac{\sigma_F}{\sigma_v} \\ s_F &< 1,15\end{aligned}$$

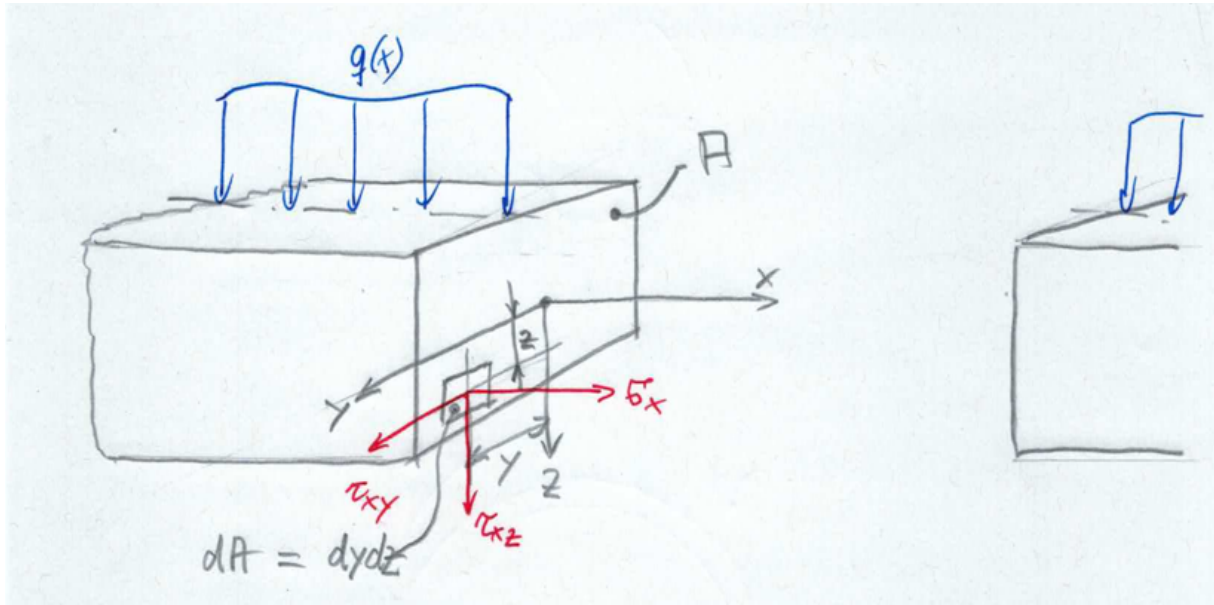
Die Sicherheit gegen Fließen beträgt 1,15. Für Bockwürste mag das ausreichen, für Druckbehälter in Kernkraftwerken bei weitem nicht.

Im KKW Brunsbüttel ist im Jahr 2001 ein Rohr zum Reaktordruckbehälter bei einer H₂-Explosion auf größerer Länge längs gerissen. Der Betreiber konnte die offene Rohrleitung abschiebern und fuhr die Anlage wochenlang weiter. Als die Aufsichtsbehörde nachfragte, deklarierte der Betreiber das Ereignis als „spontanes Dichtungsversagen“ und verweigerte zunächst eine Begehung. Dass im Regelbetrieb eines Siedewasserreaktors durch Radiolyse H₂ entsteht, war bei der Auslegung dieser Anlage noch nicht bekannt. Der Schlitten wird zum Glück jetzt abgebaut. ■

5 Elementare Theorie der Balkenverformung

5.1 Zusammenhang zwischen Spannungen in einem Balkenquerschnitt und den Beanspruchungsgrößen

Betrachtet sei ein belasteter Balken mit beliebigem aber konstanten Querschnitt der Fläche A .



Wir wenden gleich einen Trick an. Wir versuchen die Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b aus den eingezeichneten Spannungen zu berechnen. Wenn uns das gelingt, dann drehen wir den Spieß um, denn wir können die Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b am freigeschnittenen Balken schon seit langem berechnen, sozusagen von außen. Auf diese Weise bekommen wir die Spannungen heraus. Los gehts.

Die x -Achse sei die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte. Die Beanspruchungsgrößen berechnen sich wie folgt:

1. Normalkraft

$$(II.36) \quad N = \int_A \sigma_x \, dA.$$

2. Querkräfte in z und y -Richtung

$$(II.37) \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} \, dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} \, dA.$$

3. Biegemomente um die Achsen y und z

$$(II.38) \quad M_{by} = \int_A \sigma_x z \, dA, \quad M_{bz} = \int_A \sigma_x y \, dA.$$

4. Torsionsmoment um die x -Achse

$$(II.39) \quad M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) \, dA.$$

Das sind mehr Beanspruchungsgrößen, als wir gewohnt sind. Die eingezeichneten drei Spannungen sind aber in der Lage, die aufgeführten insgesamt sechs Beanspruchungen zu erzeugen. Im nächsten Schritt werden wir Vereinfachungen vornehmen, die dazu führen, dass wir nur die altbekannten Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b brauchen.

5.2 Balkenbiegung BERNOULLISCHE Annahmen

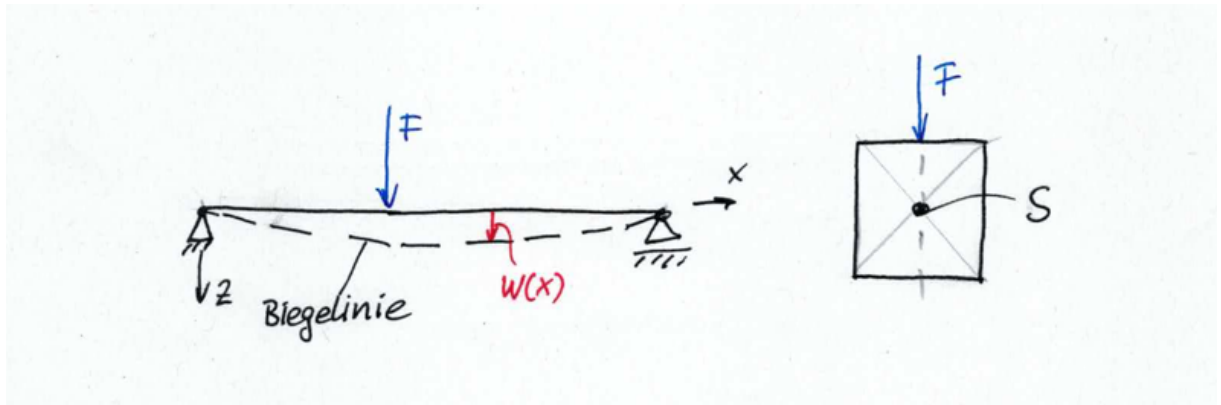
Erst BERNOULLI'S⁹ Annahmen ermöglichen es, mit vertretbarem Aufwand Balkenbiegung zu berechnen.

- a) Die Balkendeformation sei durch die Biegelinie (d.h. die verbogene Balkenachse) $w(x)$ gekennzeichnet.

Der Begriff 'Biegelinie' hat zwei Bedeutungen. Zum einen ist es die Linie des verbogenen Balkens, zum anderen ist es eine mathematische Formel $w(x) = \dots$. Zur Erinnerung: Wir kennen die Verschiebungsgröße $\vec{v}$ mit den Komponenten u, v, w . Demnach ist w die Verschiebung in z -Richtung. Nur die ist für uns interessant.

- b) Alle Kraftwirkungen sind vertikal (z -Richtung). Wirkungslinien von Kräften gehen durch die Schwerpunkte S zugehöriger Querschnittsflächen.

⁹Jakob Bernoulli 1655 bis 1705. Jakob ist Spross einer Familie, die aus vielen berühmten Mathematikern bestand: Nikolaus I, Johannes I, Nikolaus II, Daniel I, Johann II, Daniel II. Alle trugen den Nachnamen Bernoulli. Somit nimmt es nicht wunder, dass es eine Vielzahl von BERNOULLISCHEN Gleichungen und Annahmen gibt.



Wir legen unser Koordinatensystem immer so, dass die Kräfte in oder gegen die z -Richtung wirken. Bei uns zeigt die z -Achse immer nach unten. Wenn die Kräfte auf den Schwerpunkt drücken, wird der Balken nicht tordiert. Torsion werden wir hiervon unabhängig in einem späteren Kapitel kennenlernen.

- c) Balkenlängsfasern sollen sich gegenseitig nicht beeinflussen.

Das wird uns von einigen Spannungen in y - und z -Richtung befreien.

- d) Die Querschnitte bleiben bei der Deformation eben (unverwölbt), sie bleiben senkrecht zur Biegelinie.

Das ist nur sichergestellt, wenn wir es mit dem Biegen des Balkens nicht übertreiben. Die Durchbiegungen w dürfen nicht zu groß werden.

- e) Annahme eines ebenen Spannungszustands

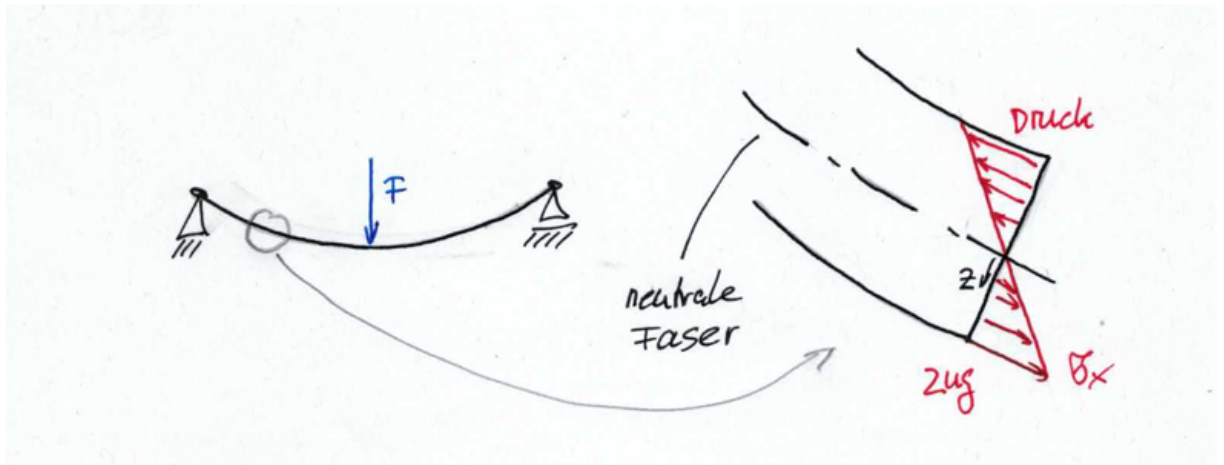
$$\sigma_x \neq 0, \quad \tau_{xz} \neq 0, \quad \tau_{zx} \neq 0.$$

Das hat zur Folge, dass gilt

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Hier ist sie, die gute Nachricht. Von unseren neun denkbaren Spannungen bleiben je nach Zählweise drei oder zwei übrig. Da gilt $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ haben wir es nur mit zwei unabhängigen Spannungen zu tun. Das wird doch wohl zu schaffen sein.

f) Annahme linearer Normalspannungsverteilung



Die wichtigste Spannung σ_x und deren Verlauf legt BERNOULLI schlichtweg durch Verordnung fest. Das ist zwar unbefriedigend, denn den Spannungsverlauf hätten wir ja gerne selbst hergeleitet (haha). Praktisch ist dieser lineare Verlauf allemal. Beim Aufstellen der Formel für σ_x , gleich im Anschluss, werden wir uns hierauf berufen. Die Verformung in obiger Skizze ist übrigens stark übertrieben dargestellt. Wir würden so gegen Bedingung d) verstoßen. Die Folge unserer Übertreibung sehen wir an der Koordinate z , die zeigt ja in eine völlig falsche Richtung. Mit geringen Verformungen w bleibt alles im grünen Bereich.

Mit der Annahme f) gilt

$$(II.40) \quad \sigma_x = c z$$

mit einem zunächst unbekannten Proportionalitätsfaktor c .

Je weiter wir von der neutralen Faser entfernt sind, Abstand z , desto größer wird die Spannung σ_z . Da z oberhalb der neutralen Faser negativ ist, bekommen wir sogar die Vorzeichenumkehr, wenn wir in den Bereich der Druckspannung geraten.

Weiter gilt Gleichung (II.2)

$$\frac{dM_{by}}{dx} - Q_z = 0$$

und Gleichung (II.1)

$$\frac{dQ_z}{dx} - q(x) = 0$$

sowie

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

und Gleichung (II.38) **erster Teil**

$$M_{by} = \int_A \sigma_x z \, dA.$$

Abschließend wird noch das HOOKEsche Gesetz für den einachsigen Zug benötigt

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

Wir setzen ein (II.40) in (II.38)

$$M_{by} = \int_A c z \, dA$$

bzw

$$(II.41) \quad M_{by} = c \int_A z^2 \, dA,$$

denn c ist ein konstanter Faktor. Das Integral ist nunmehr ein rein geometrischer Ausdruck.

5.3 Abkürzung für häufig auftretende geometrische Ausdrücke: Flächenträgheitsmoment

Trägheitsmomente sind sicher in irgend einer Form bereits bekannt. Gängig sind üblicherweise Massenträgheitsmomente. Sie kommen in der Dynamik vor und beschreiben, wie sehr sich ein rotierender Körper gegen eine Drehzahländerung (= Winkelbeschleunigung) wehrt. Hier geht es um etwas ganz anderes. Das Flächenträgheitsmoment beschreibt, wie sich ein Balken mit einer bestimmten Querschnittsfläche A gegen das Biegen wehrt. Die Größe der Querschnittsfläche alleine reicht als Kriterium nicht aus. Probieren Sie es aus. Nehmen Sie ein Lineal, legen es flach an eine Tischkante, halten es so, dass ein dreiwertig gelagerter Balken entsteht. Am Linealende lassen Sie eine Kraft wirken. Sie stellen fest, dass das Lineal recht einfach verformt (gebogen) werden kann. Jetzt stellen Sie das Lineal hochkant und versuchen das Gleiche. Es ist einleuchtend, dass das Lineal so sich nur sehr schwer biegen lässt.

Es kommt also auch darauf an, wie gebogen wird. Dazu definieren wir Biegeachsen. Die Biegeachse ist die Koordinatenachse um die der Balken gebogen wird. Dieser Satz ist möglicherweise nicht recht verständlich, weshalb ich eine ziemlich absurde Hilfsvorstellung beschreibe. Unser Balken, das Lineal von eben ist jetzt ein Handtuch. Es liegt ausgebreitet auf dem Tisch. Die x -Achse beschreibt die lange Dimension des Handtuchs, die z -Achse zeigt nach unten durch den Tisch, die y -Achse beschreibt die kürzere Handtuchbreite. Jetzt wickeln wir das Handtuch auf. Wir wickeln es um die y -Achse. y ist die Biegeachse, synonym: wir biegen um die y -Achse.

Bei dem von uns gewählten Koordinatensystem (Balkenlängsachse x , Verformungsrichtung z , Balkenquerrichtung y) werden wir immer um die y -Achse biegen.

Wir definieren

$$(II.42) \quad I_y = \int_A z^2 \, dA.$$

mit I_y : Axiales Flächenträgheitsmoment (FTM) um die y -Achse.

Dieses wird benötigt da in unseren Fällen immer um die y -Achse gebogen wird. Es gibt jedoch noch zwei weitere Achsen, um die gebogen/tordiert werden kann.

$$(II.43) \quad I_z = \int_A y^2 \, dA$$

mit I_z : Axiales Flächenträgheitsmoment um die z -Achse.

In Tafelwerken wird mit I_y und I_z der Unterschied zwischen „Lineal flach und Lineal hochkant“ beschrieben.

$$(II.44) \quad I_0 = \int_A (z^2 + y^2) \, dA$$

mit I_0 : Polares Flächenträgheitsmoment um die x -Achse. Diese FTM wird bei Torsion benötigt.

Es gilt

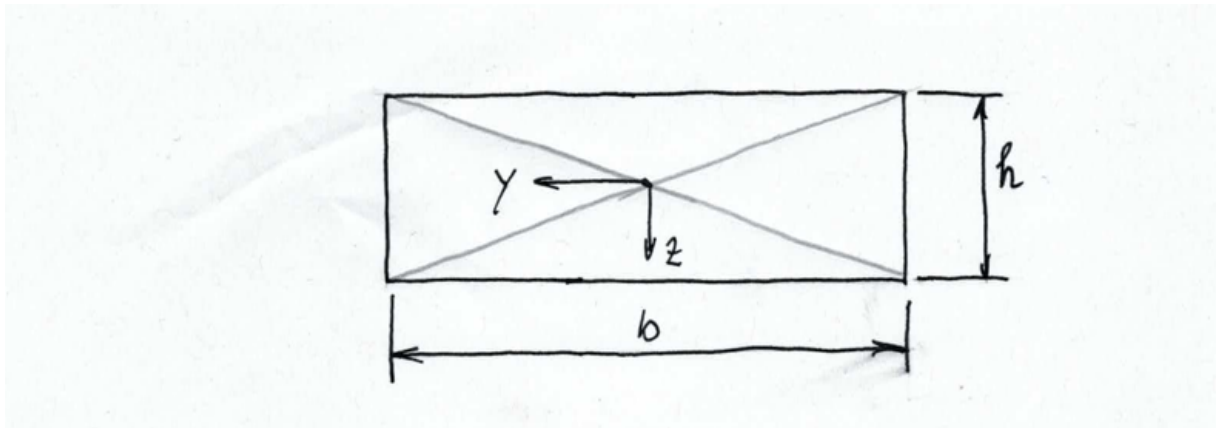
$$I_0 = I_y + I_z$$

Die Einheit von I_y , I_z , I_0 ist m^4 oder mm^4 .

Was können wir uns unter der Einheit mm^4 vorstellen? Ganz recht: gar nichts. Es ist einfach so.

Beispiel für die Berechnung des Flächenträgheitsmoments I_y

Gegeben ist ein Balken mit Rechteckquerschnitt der Breite b und der Höhe h .



$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz dy.$$

Wir lösen das innere Integral

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy.$$

Wir setzen obere und untere Grenze ein

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) dy.$$

Wir lösen das äußere Integral

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{h^3}{12} dy = \frac{h^3}{12} y \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$$

und erhalten

$$I_y = \frac{b h^3}{12}.$$

Künftig werden wir diese Berechnung nicht durchführen. In Tafelwerken sind Flächenträgheitsmomente aller denkbaren Querschnittsformen aufgeführt. Suchen Sie die Axialen und Polaren FTM von vollem und hohem Rechteckquerschnitt sowie von vollem

und hohlem Rundquerschnitt heraus und notieren Sie sich die Werte auf Ihrem legalen Pfuschzettel.

An dem Ergebnis sehen wir auch, dass die Balkenhöhe mit dritter Potenz in das FTM eingeht, während die Balkenbreite nur linear beiträgt. Das bestätigt unseren Linealversuch eindrucksvoll.

Taktischer Hinweis: Nicht immer lauten die Abmaße der Querschnittsfläche Höhe h und Breite b . In Klausuren tauchen gerne die Maße a und b auf. Damit möchte ich nachprüfen, dass Sie nicht nur Formeln abschreiben können, sondern auch bekannte Formeln auf die gegebenen Verhältnisse anpassen können.

Wir waren auf dem Wege, Verformungen und Spannungen am Balken zu berechnen. Dabei kam uns das Integral

$$\int_A z^2 \, dA$$

in die Quere. Wir konnten es lösen und werden jetzt die Verfolgung unseres eigentlichen Ziels wieder aufnehmen.

5.4 Differentialgleichung der Balkenbiegung

Eine längere Herleitung liefert für die Durchbiegung eines Balken folgenden Zusammenhang

$$(II.45) \quad I_y E \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_b(x)$$

mit

$w = w(x)$: Durchbiegung des Balkens an der Stelle x , auch genannt Biegelinie

E : Elastizitätsmodul

I_y : Flächenträgheitsmoment um die y -Achse

$M_b(x)$: Biegemomentenverlauf im Balken, wie in TM I kennengelernt.

Gleichung (II.45) wird auch gerne in vereinfachter Form angeschrieben

$$I_y E w'' = -M_b(x)$$

Gesprochen: „I-psilon mal E mal we-zweistrich istgleich minus Em-be von x“

Sehen Sie mir es bitte nach, dass wir die wichtigste Gleichung in TMII nicht hergeleitet haben. Wir bräuchten dafür etwa drei Seiten. Das wäre alles sehr rechtschaffen, diene aber kaum dem Verständnis.

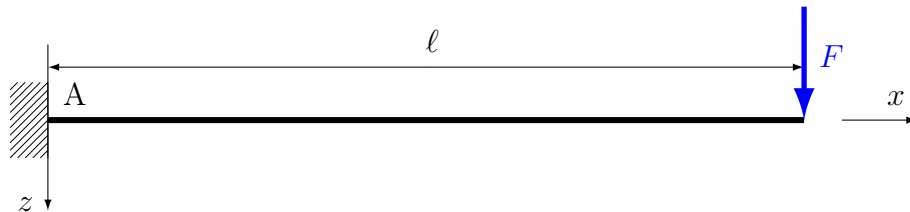
Nunmehr haben wir alles zusammengetragen, was zur Berechnung der Durchbiegung eines Balkens nötig ist. Die Berechnung der Spannungen (viel einfacher) kommt als bald.

Die künftige Vorgehensweise für die Verformungsrechnung wird sein:

1. Balken von Lagern freischneiden und Lagerreaktionen bestimmen.
2. Bereichseinteilung.
3. Schneiden im Bereich an der Stelle x in jedem Bereich.
4. KG und MG um die Schnittstelle in jedem Bereich, Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b bestimmen (wir brauchen nur M_b).
Das alles können wir schon. Jetzt kommt Neuland.
5. DGL der Biegelinie zwei mal integrieren, dabei entstehen zwei Integrationskonstanten (für jeden Bereich).
6. Rand- und Übergangsbedingungen aufstellen und Integrationskonstanten bestimmen, müssen wir beim ersten Beispiel kennenlernen.
7. Alles einsetzen und nach w auflösen. Fertig.

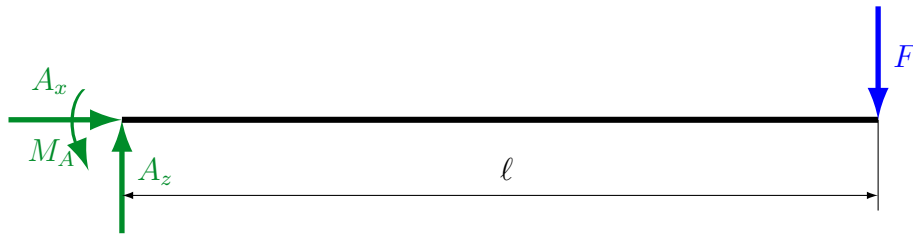
Die Bestimmung der Biegelinie wollen wir an einem Beispiel im Rahmen der Vorlesung kennenlernen. Zur Erinnerung: Der Begriff Biegelinie steht zum einen für die eigentlich sichtbare Verformung der einstmals geraden Balkenlängsachse, zum anderen für unser Rechenergebnis, die Angabe $w(x) = \dots$.

Beispiel



Gegeben: I_y , E , ℓ , F ; Gesucht: Biegelinie.

1. Lagerreaktionen:



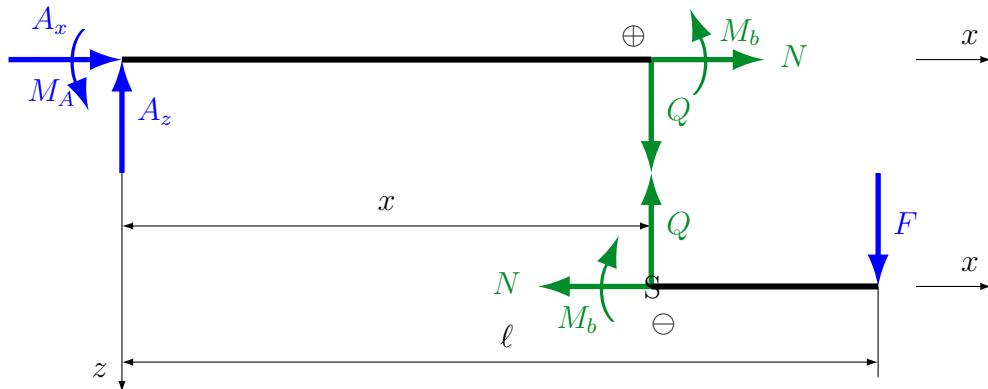
$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A - F \ell$$

$$A_x = 0; \quad A_z = F; \quad M_A = F \ell$$

2. Bereichseinteilung: Nur ein Bereich, $0 \leq x \leq \ell$.
3. Schneiden im Bereich an der Stelle x :



4. KG und MG um S, hier rechts.

$$\sum X \equiv 0 = -N$$

$$\sum Z \equiv 0 = -Q + F$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -M_b - F(\ell - x)$$

$$N = 0; \quad Q = F; \quad M_b = -F(\ell - x)$$

Das Einhalten der Regel mit dem positiven und negativen Schnittufer wird jetzt wichtig, da wir die Durchbiegung w mit richtiger Vorzeichenlage herausbekommen wollen. [Wir haben es richtig gemacht.](#)

5. DGL der Biegelinie

$$I_y E w'' = -M_b(x)$$

M_b einsetzen

$$I_y E w'' = F(\ell - x)$$

ausmultiplizieren

$$I_y E w'' = F\ell - Fx$$

zweimal integrieren

$$I_y E w' = F\ell x - F \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$I_y E w = F\ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Beim Integrieren der linken Seite unserer DGL verschwinden nacheinander nur die beiden 'Ableitungsstriche', da I_y und E konstante Größen sind. Das Integrieren der Polynome der rechten Seite hatten wir ganz ähnlich bei der Bestimmung von Streckenlasten. Damals waren die Integrationsgrenzen bekannt; das ist hier nicht der Fall, weshalb die Integrationskonstanten c_1 , c_2 hinzugefügt werden müssen. Die müssen im nächsten Schritt bestimmt werden.

6. Rand- und Übergangsbedingungen:

Bei diesem ersten Beispiel gibt es noch keine Bereichsgrenze, an der der Begriff 'Übergangsbedingung' erläutert werden könnte. Wir heben uns das für spätere Beispiele mit zwei Bereichen auf. Trotzdem verwenden wir die zukunftsichere Überschrift 'Rand- und Übergangsbedingungen'. Wir fangen mit den Randbedingungen an. Ein Balken hat zwei Ränder, links außen und rechts außen. Wir suchen jetzt zwei Aussagen zur Balkenverformung an den Rändern, die bei unserer Lagerung zutreffen. Warum zwei? Wir haben zwei Integrationskonstanten.

Der rechte Rand bringt uns keine Erkenntnis. Die Durchbiegung $w(x = \ell)$ ist unbekannt. Die Neigung des Balkens am rechten Rand $w'(x = \ell)$ (gesprochen: we-Strich an der Stelle x gleich ℓ) ist auch unbekannt. In beiden Fällen können wir vermuten, dass Durchbiegung und Neigung maximal sind. Das nützt uns nichts.

Der linke Rand ist ergiebiger. Der linke Rand liegt an der Stelle $x = 0$. Dort wo der Balken „aus der Wand kommt“ steht fest, dass er nicht nach unten oder oben verschoben werden kann. Wir können festhalten $w(x = 0) = 0$. Ferner kann der Balken wegen der dreiwertigen Lagerung dort keinerlei Neigung w' einnehmen, so dass auch festgehalten werden kann $w'(x = 0) = 0$. Die Randbedingungen sind – nebenbei bemerkt – auf dem „Lagerzettel“ aufgeführt, schauen Sie nach.

Wir erkennen wegen der dreiwertigen Lagerung an der Stelle $x = 0$

$$w(x = 0) = 0, \quad w'(x = 0) = 0$$

Diese beiden Randbedingungen sind vom Typ „Doppelnull“. Wie James Bond haben sie die Lizenz zum Töten. Wir werden immer wieder feststellen, dass eine Randbedingung vom Typ Doppelnull eine Integrationskonstante „tötet“, d. h. zu Null macht.

Beim Abarbeiten der Rand- und Übergangsbedingungen werden wir künftig eine strategische Reihenfolge einhalten. Auch wenn das bei diesem Beispiel noch nicht von Bedeutung ist, wird sie dennoch vorgestellt.

Strategische Reihenfolge

- a) Doppelnull mit Strich, Beispiel $w'(x = 0) = 0$
- b) Doppelnull ohne Strich, $w(x = 0) = 0$
- c) Übergangsbedingung mit Strich, Beispiel $w'_I(x = a) = w'_{II}(x = a)$
- d) Übergangsbedingung ohne Strich, $w_I(x = a) = w_{II}(x = a)$
- e) Einfachnull mit Strich, Beispiel $w'(x = \ell) = 0$
- f) Einfachnull ohne Strich, $w(x = \ell) = 0$

Wenn wir nach dieser Reihenfolge vorgehen, wird es der Regelfall sein, dass Schritte übersprungen werden müssen, da entsprechende Bedingungen gar nicht vorhanden sind. Im vorliegenden Fall können wir a) und b) anwenden, den Rest nicht.

Die Übergangsbedingungen wurden noch nicht erläutert. Wir machen das, wenn wir ein Beispiel mit den zwei Bereichen I und II haben. Im Vorfeld versuchen Sie trotzdem nachzuvollziehen, dass bei einer Bereichsgrenze an der Stelle $x = a$ der Balken keinen Knick hat und keinen Sprung macht. Nichts anderes sagen diese Übergangsbedingungen aus. Die Übergangsbedingungen sehen immer gleich aus, bis auf die Bezeichnung a . Da kann etwas Anderes stehen.

Wir fahren fort.

a) Doppelnull mit Strich, $w'(x = 0) = 0$ wird in eine passende Gleichung „mit Strich“ eingesetzt. Folgende Gleichung von oben passt:

$$I_y E w' = F \ell x - F \frac{x^2}{2} + c_1$$

einsetzen

$$I_y E 0 = F \ell 0 - F \frac{0^2}{2} + c_1$$

$$c_1 = 0$$

b) Doppelnulld ohne Strich, $w(x = 0) = 0$ wird in eine passende Gleichung „ohne Strich“ eingesetzt. Folgende Gleichung passt:

$$I_y E w = F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

einsetzen

$$I_y E 0 = F \ell \frac{0^2}{2} - F \frac{0^3}{6} + c_1 0 + c_2$$
$$c_2 = 0$$

M ist mit James zufrieden, Q auch.

7. Konstanten einsetzen, nach w auflösen

Wir benutzen die Gleichung „ohne Strich“.

$$I_y E w = F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

c_1, c_2 einsetzen

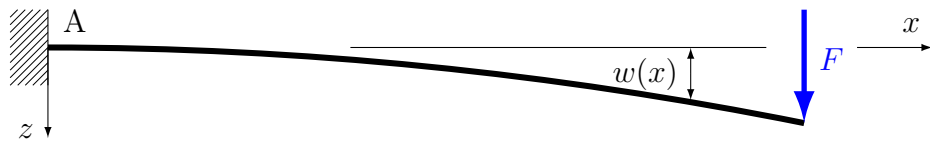
$$I_y E w = F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6}$$

nach w auflösen

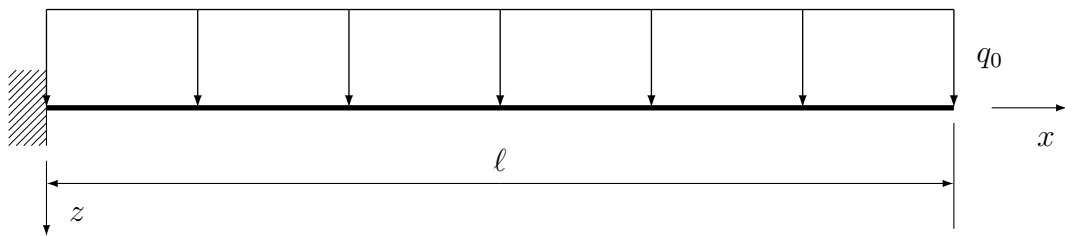
$$w(x) = \frac{F x^2}{I_y E} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{x}{6} \right)$$

Zum Schluss wird darauf hingewiesen, dass w von x abhängig ist. [Aus Faulheitsgründen wurde das \$\(x\)\$ während der Rechnung weggelassen.](#)

Diese Gleichung wird Biegelinie genannt. Auch die sichtbare Verformung des Balkens wird so genannt.



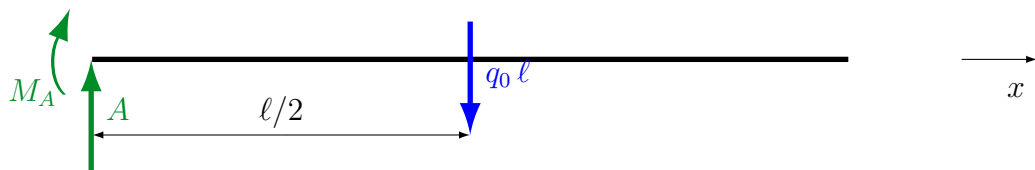
5.4.1 Übungsaufgabe, Streckenlast 3, Biegelinie



Gegeben: ℓ , E , I_y , q_0 , Gesucht: Biegelinie

Zur Behandlung der Streckenlast verwenden wir die Hilfskraftmethode.

1. Lagerreaktionen



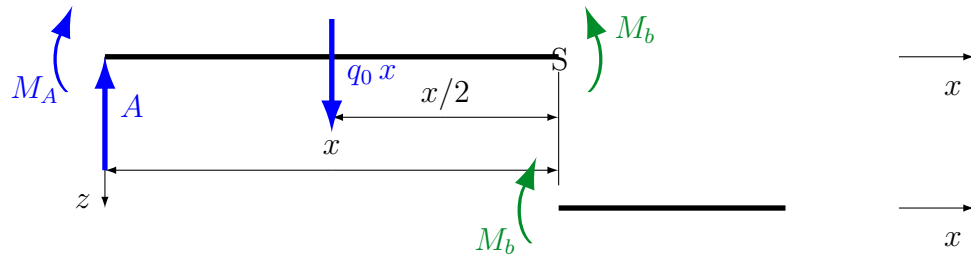
$$\begin{aligned} \sum Z \equiv 0 &= -A + q_0 \ell, & A &= q_0 \ell \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= -M_A - q_0 \frac{\ell^2}{2} & M_A &= -q_0 \frac{\ell^2}{2} \end{aligned}$$

2. Bereichseinteilung

Achtung: Die Ersatzkraft $q_0 \ell$ muss jetzt entfernt werden. Daher nur ein Bereich $0 \leq x \leq \ell$.

3. Schneiden im Bereich an der Stelle x

Da wir nur den Biegemomentenverlauf benötigen, lassen wir, wie schon bei den Lagerreaktionen die Größen weg, die entweder Null sind (N) oder uninteressant sind (Q). Das ist straflos möglich, da wir anschließend Momentengleichgewicht um die Schnittstelle machen. Weggelassene Kräfte haben dort keinen Hebelarm.



4. MG um S hier links

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_b + q_0 x \frac{x}{2} - A x - M_A \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_b + q_0 \frac{x^2}{2} - q_0 \ell x + q_0 \frac{\ell^2}{2} \\ M_b &= -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \ell x - q_0 \frac{\ell^2}{2}\end{aligned}$$

5. DGL der Biegelinie

$$\begin{aligned}I_y E w'' &= -M_b(x) \\ I_y E w'' &= q_0 \left[\frac{x^2}{2} - \ell x + \frac{\ell^2}{2} \right] \\ I_y E w' &= q_0 \left[\frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2} + \frac{\ell^2}{2} x \right] + c_1 \\ I_y E w &= q_0 \left[\frac{x^4}{24} - \ell \frac{x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4} \right] + c_1 x + c_2\end{aligned}$$

6. Rand- und Übergangsbedingungen

Mit einem dreiwertigen Lager bei $x = 0$ gilt

$$w'(x=0) = 0, \quad w(x=0) = 0$$

Diese beiden Randbedingungen vom Typ Doppelnulld führen zu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

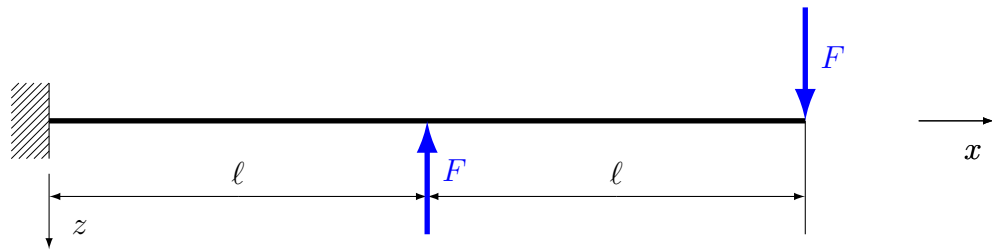
7. Auflösen nach w

$$\begin{aligned}w &= \frac{q_0}{I_y E} \left[\frac{x^4}{24} - \ell \frac{x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4} \right] \\ w(x) &= \frac{q_0 x^2}{24 I_y E} [x^2 - 4 \ell x + 6 \ell^2]\end{aligned}$$

Zum Schluss erinnern wir daran, dass w von x abhängig ist (reine Kosmetik).

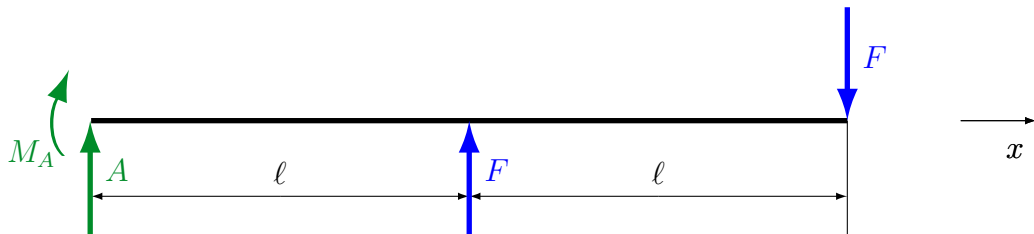
Diese Aufgabe und auch die nächste könnte jetzt noch ergänzt werden, indem Zahlenwerte gegeben werden. I_y könnte verschleiert werden, indem Breite b und Höhe h eines Rechteckquerschnitts angegeben werden. In einer Klausur korrigiert es sich viel besser, wenn nicht nach der Biegelinie gefragt wird, sondern z. B. wie weit senkt sich der Balken bei $x = \ell/2$ ab. Dann muss in der Biegelinie jedes x durch $\ell/2$ ersetzt werden. Wenn der Zahlenwert stimmt, die Einheit dabei steht und der Rechenweg passig erscheint, gibt es volle Punktzahl. Das dauert 15 Sekunden – und nächste Aufgabe. So macht Korrigieren Spaß. ■

5.4.2 Übungsaufgabe, zwei Bereiche, Biegelinie



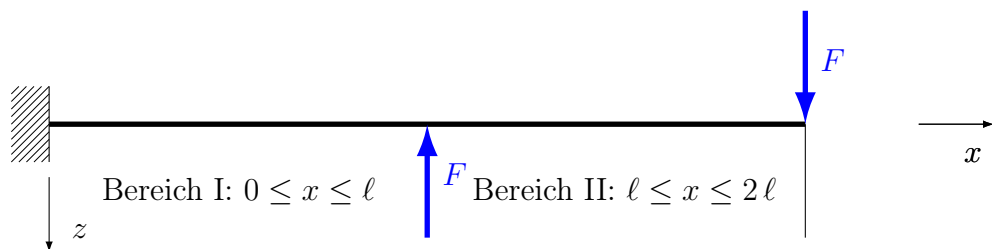
Gegeben: ℓ , E , I_y , F , Gesucht: Biegelinie

1. Lagerreaktionen

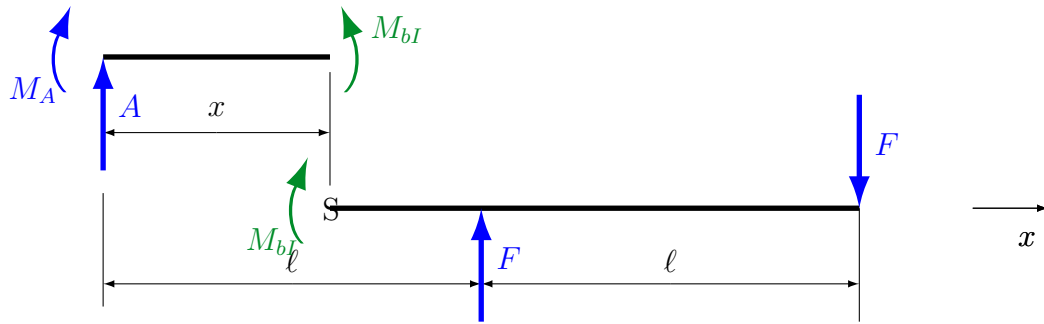


$$\begin{aligned} \sum Z \equiv 0 &= -A - F + F & A &= 0 \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= -M_A + F \ell - F 2\ell & M_A &= -F \ell \end{aligned}$$

2. Bereichseinteilung



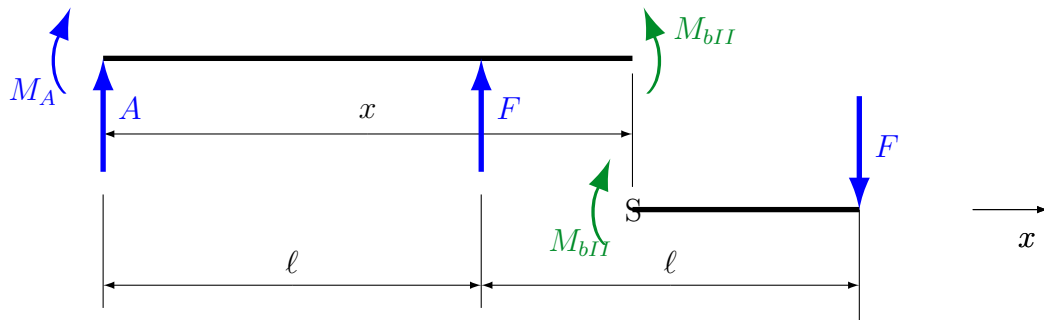
3. a Schneiden im Bereich I an der Stelle x



4. a MG um S, rechtes Balkenteil

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bI} + F(\ell - x) - F(2\ell - x) \\ M_{bI} &= F\ell - Fx - 2F\ell + Fx \\ M_{bI} &= -F\ell\end{aligned}$$

3. b Schneiden im Bereich II an der Stelle x



4. b MG um S, rechtes Balkenteil

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bII} - F(2\ell - x) \\ M_{bII} &= -2F\ell + Fx\end{aligned}$$

Da wir zwei Bereiche haben, haben wir zwei verschiedene Biegemomentenverläufe; also werden wir auch zwei Biegelinien haben. Für den Bereich I w_I und für Bereich II w_{II} . Wir müssen also zweigleisig fortfahren.

5. a DGL der Biegelinie Bereich I

$$\begin{aligned}I_y E w_I'' &= -M_{bI}(x) \\ I_y E w_I'' &= F\ell \\ I_y E w_I' &= F\ell x + c_1 \quad (1) \\ I_y E w_I &= F\ell \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (2)\end{aligned}$$

5. b DGL der Biegelinie Bereich II

$$\begin{aligned}
I_y E w''_{II} &= -M_{bII}(x) \\
I_y E w''_{II} &= 2 F \ell - F x \\
I_y E w'_{II} &= 2 F \ell x - F \frac{x^2}{2} + c_3 \quad (3) \\
I_y E w_{II} &= 2 F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_3 x + c_4 \\
I_y E w_{II} &= F \ell x^2 - F \frac{x^3}{6} + c_3 x + c_4 \quad (4)
\end{aligned}$$

6. Rand- und Übergangsbedingungen

Wir haben ein dreiwertiges Lager an der Stelle $x = 0$ und (erstmalig) eine Bereichsgrenze an der Stelle $x = \ell$.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad w'_I(x=0) &= 0 \\
\text{b)} \quad w_I(x=0) &= 0 \\
\text{c)} \quad w'_I(x=\ell) &= w'_{II}(x=\ell) \\
\text{d)} \quad w_I(x=\ell) &= w_{II}(x=\ell)
\end{aligned}$$

Wir kontrollieren: Vier Konstanten benötigen vier Rand- und Übergangsbedingungen, passt.

Die Bedingungen a) und b) sind uns wohl bekannt, sie sind vom Typ Doppelnul und sorgen dafür dass zwei Konstanten zu Null werden.

Die Übergangsbedingungen c) und d) sind neu für uns. Sie gelten so an jeder Bereichsgrenze. In dieser Aufgabe liegt sie bei $x = \ell$. Daher sehen wir an vier verschiedenen Stellen ein und den selben Ausdruck ($x = \ell$).

Betrachten wir Bedingung c): Die Neigung unserer Biegelinie (w') an der Stelle der Bereichsgrenze ($x = \ell$) ist von beiden Seiten (Bereich I, Bereich II) betrachtet gleich groß. Wir wissen nicht, wie groß die Neigung dort ist. Wir wissen nur, dass der Balken an der Bereichsgrenze keinen Knick hat.

Betrachten wir Bedingung d): Die Durchbiegung (w -ohne Strich) an der Stelle der Bereichsgrenze ($x = \ell$) ist von beiden Seiten (Bereich I, Bereich II) betrachtet gleich groß. Wir wissen nicht, wie groß die Durchbiegung dort ist. Wir wissen nur, dass der Balken an der Bereichsgrenze keinen Sprung hat, keine Stufe hat.

Wir vergewissern uns, dass die Reihenfolge der Bedingungen strategisch richtig ist. Erst Doppelnul, dann Übergang, dann Einfachnul (haben wir zum Glück nicht) und immer mit Strich zuerst, passt.

7. Konstanten bestimmen

Bedingung a) in Gleichung (1) einsetzen liefert $c_1 = 0$.

Bedingung b) in Gleichung (2) einsetzen liefert $c_2 = 0$.

Wir werden jetzt für die Bedingung c) die Gleichungen (1) und (3) verwenden. Wir sollen $w'_I(x = \ell)$ mit $w'_{II}(x = \ell)$ gleichsetzen. Schlau wie wir sind, werden wir $I_y E w'_I(x = \ell)$ mit $I_y E w'_{II}(x = \ell)$ gleichsetzen. Wir nehmen also die rechten Seiten von Gleichung (1) und (3), ersetzen x durch ℓ und setzen diese beiden rechten Seiten gleich. Unsere Kenntnis über c_1 wenden wir natürlich an.

Bedingung c) mit den Gleichungen (1) und (3)

$$F \ell^2 = 2 F \ell^2 - F \frac{\ell^2}{2} + c_3$$

$$c_3 = -F \frac{\ell^2}{2}$$

Ganz entsprechend gehen wir mit Bedingung d) und den Gleichungen (2) und (4) um. Unsere Kenntnisse über c_1, c_2, c_3 wenden wir an.

$$F \frac{\ell^3}{2} = F \ell^3 - F \frac{\ell^3}{6} - F \frac{\ell^3}{2} + c_4$$

$$c_4 = F \frac{\ell^3}{6}$$

8. Nach w_I, w_{II} auflösen

Gleichung (2) liefert

$$w_I(x) = \frac{F \ell x^2}{2 I_y E}$$

Gleichung (4) liefert

$$w_{II}(x) = \frac{F}{I_y E} \left[\ell x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^2 x}{2} + \frac{\ell^3}{6} \right]$$

$$w_{II}(x) = \frac{F}{6 I_y E} [6 \ell x^2 - x^3 - 3 \ell^2 x + \ell^3]$$

Die letzte Vereinfachung ist nicht wirklich nötig. Es gibt keinen Punktabzug, wenn noch etwas ausgeklammert werden könnte. Es ist sogar taktisch klug, in der Klausur das mit dem Ausklammern nicht zu übertreiben. Fehler dabei wären sehr ärgerlich (genau: Kurz vorm locus ...).

5.5 Spannungen am Balken

Nach der Bestimmung der Biegelinie wollen wir uns dem entscheidenden Aspekt zuwenden: Welche Spannungen treten am Biegebalken auf und wie groß sind sie? Wir werden feststellen, dieses Thema ist viel angenehmer als die DGL der Balkenbiegung.

Wir greifen einige Aspekte der BERNOULLISchen Annahmen wieder auf. Zudem wollen wir den begonnen Trick zu Ende bringen. In Kapitel 5.1 auf Seite 126 berechneten wir die Beanspruchungsgrößen N , Q , M_b und noch einige mehr mit Hilfe von Spannungen. Wir können die Beanspruchungsgrößen schon seit langem 'von außen' berechnen und werden so auf die Spannungen kommen.

Es gilt Gleichung (II.41). Das dort angegebene M_{by} ist unser altbekanntes M_b , da wir ausschließlich um die y -Achse biegen und unser Biegemoment daher eines um y ist.

$$M_b = c \int_A z^2 dA.$$

Das Integral ist unser Flächenträgheitsmoment I_y , so dass die bisher unbekannte BERNOULLI-Konstante c nunmehr bekannt ist.

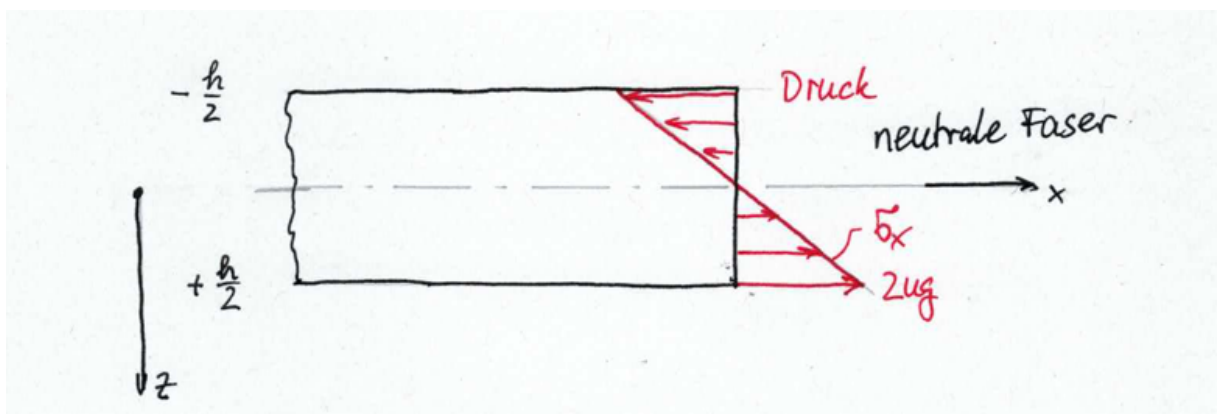
$$c = \frac{M_b}{I_y}.$$

Mit der BERNOULLISchen Annahme (II.40)

$$\sigma_x = c z$$

folgt

$$(II.46) \quad \sigma_x = \frac{M_b}{I_y} z$$



Gleichung (II.46) ist die entscheidende Gleichung bei der Spannungsrechnung. Wir können damit an jeder Stelle des Balkens die Spannung σ_x ausrechnen. Uns interessiert

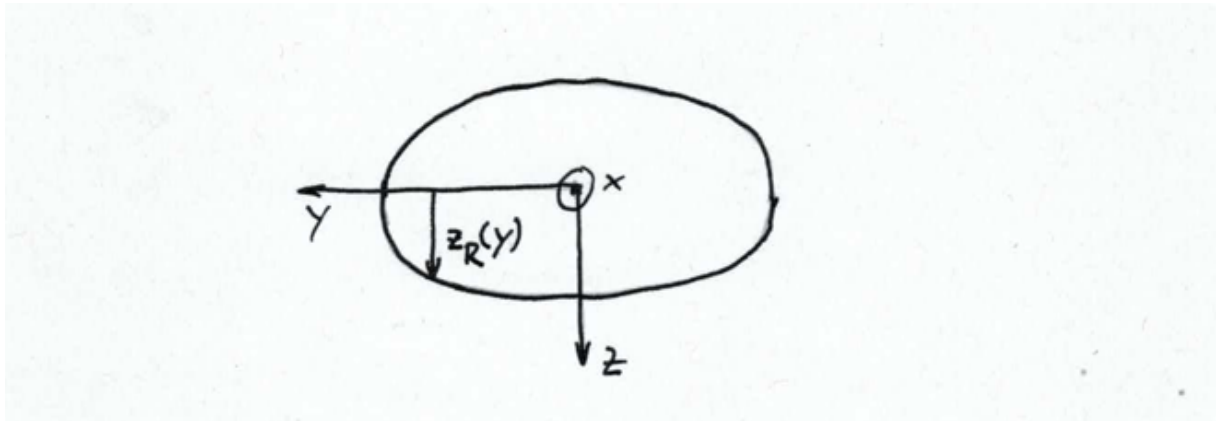
später dann die maximale Spannung überhaupt am Balken. Das heben wir uns noch ein wenig auf, das kommt noch. Es sei schon jetzt verraten, dass σ_x die Spannung ist, die – wenn zu groß – den Balken zerstören kann.

Es gibt noch eine weitere Spannung am Biegebalken, die ist aus zwei Gründen ziemlich unbedeutend. Erstens: Ihr Betrag ist sehr viel kleiner als der von σ_x . Zweitens: Dort wo σ_x am größten wird (an den Außengurten des Balkens) wird diese weitere Spannung Null sein. Schauen wir uns diese unbedeutende weitere Spannung an. Die Herleitung wäre etwas umständlich, weshalb wir sie einfach verkünden.

Ohne Herleitung gilt für die einzige am Balken auftretende Schubspannung

$$(II.47) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} (z_R^2(y) - z^2).$$

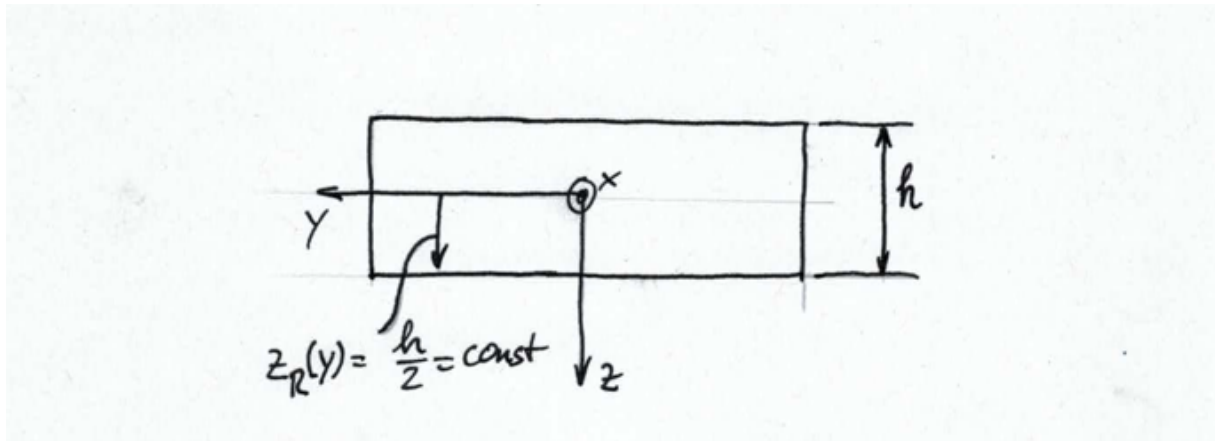
Mit $z_R(y)$: Randkurve des beliebigen Balkenquerschnitts und Q : Querkraft.



Für (üblicherweise vorhandene) Rechteckquerschnitte gilt

$$z_R(y) = \pm \frac{h}{2} = \text{const}$$

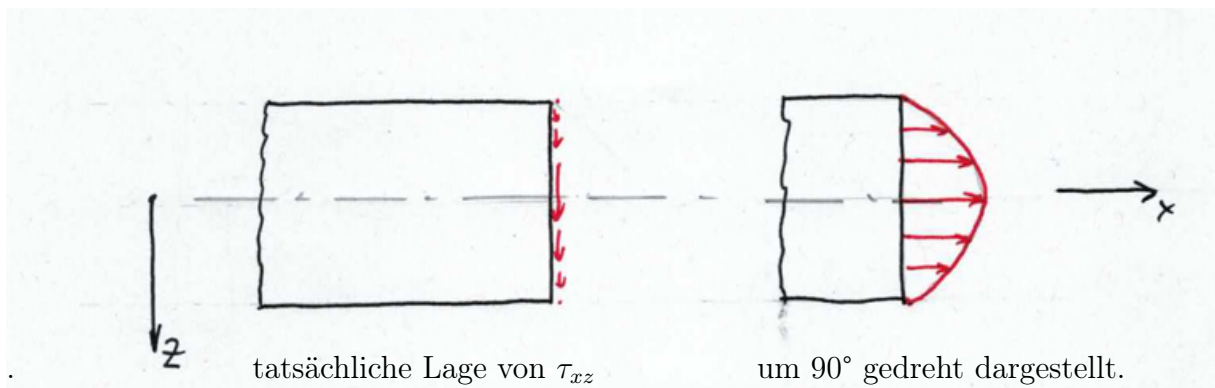
Dabei ist es herzlich egal ob plus oder minus, es wird ohnehin quadriert.



Also gilt in den meisten Fällen

$$(II.48) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Der Verlauf dieser Schubspannung ist parabolisch. Bei der neutralen Faser wird das Maximum erreicht, an den Rändern sind die Schubspannungen Null.



Dort wo die Normalspannung σ_x maximal wird, am Außenrand (Außengurt des Balkens), ist die Schubspannung τ_{xz} Null. Das ist eine wirklich gute Nachricht. Wenn wir einen Balken dimensionieren, betrachten wir nur den Außengurt und dort herrscht einachsiger Spannungszustand. Hurra, den Aufwand mit den Vergleichsspannungshypothesen können wir uns sparen. σ_x wird mit dem Werkstoffkennwert verglichen und gut ist.

Jetzt müssen wir nur noch herausbekommen, wo am Balken die Maximale Normalspannung auftritt, dann sind wir fertig.

5.6 Maximale Normalspannung am deformierten Balken

$$(II.49) \quad |\sigma_{x \max}| = \frac{|M_{b \max}|}{I_y} |z_{\max}|.$$

Da I_y und $z_{\max}$ nur von der Balkengeometrie abhängen, können beide Parameter zusammengefasst werden.

Mit dem – neuer Begriff – Widerstandsmoment gegen Biegung

$$(II.50) \quad W_{by} = \frac{I_y}{|z_{\max}|}$$

gilt

$$(II.51) \quad |\sigma_{x \max}| = \frac{|M_{b \max}|}{W_{by}}.$$

Ich persönlich bin kein Fan des Widerstandsmoments W_{by} ; schon allein wegen der irreführenden Einheit mm^3 . Ich ziehe die Gleichung (II.49) der Gleichung (II.51) vor. Sie sollten trotzdem vom Widerstandsmoment gehört haben, denn draußen schwirren genug Leute herum, die kennen nur „Emmbe durch Webe“. In Tafelwerken finden Sie an den Stellen, an denen Sie Flächenträgheitsmomente finden auch Widerstandsmomente.

5.7 Zusammenfassung der Spannungsberechnung

Bei der Dimensionierung eines Balkens wird folgende Vorgehensweise empfohlen:

1. Lagerreaktionen
2. Bereichseinteilung
3. Scheiden im Bereich an der Stelle x für jeden Bereich
4. KG und MG um die Schnittstelle für jeden Bereich

Bei der Berechnung der Balkenbiegung mittels DGL gehen wir bis hier den gleichen Weg. Jetzt beginnt ein neuer Weg für die Spannungsberechnung

5. $|M_{b \max}|$ suchen mittels graphischer Darstellung der Beanspruchungsgröße M_b .
6. $|z_{\max}|$ festlegen (in der Regel die halbe Balkenhöhe)
7. Gleichung (II.49) anwenden

$$|\sigma_{x \max}| = \frac{|M_{b \max}|}{I_y} |z_{\max}|.$$

8. Vergleich mit dem Werkstoffkennwert

$$\sigma_{x \max} < \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

bei einer Auslegung gegen plastisches Fließen.

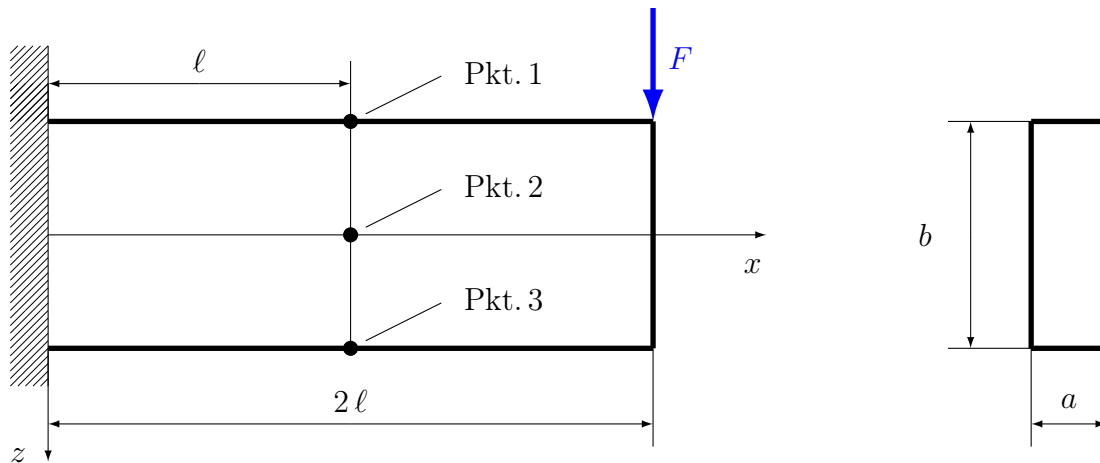
9. Nur wenn ausdrücklich gefordert, Schubspannungen berechnen, hierzu Gleichung (II.48) anwenden.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

An dieser Stelle verrate ich Ihnen einen häufigen Fehler in der Klausur. Weil der Anfang der beiden Balkenprobleme (entweder Frage nach Durchbiegung oder Frage nach Spannung) gleich ist (Punkte 1 bis 4) rasten manche Klausurteilnehmer in ein naheliegendes Kochrezept ein und nehmen zwischen dem Punkt 4 und dem Punkt 5 die falsche Abzweigung. Wenn nach Spannungen gefragt ist und Sie fälschlicherweise Durchbiegungen berechnen, schießen Sie sich gewaltig ins Knie. Alles, was Sie ausrechnen ist wertlos, zudem ist Balkenbiegung sehr umfangreich, Sie verlieren viel Zeit für nichts.

5.7.1 Übungsaufgabe, MOHRsche Kreise am Biegebalken

Gegeben ist ein langer schlanker Balken, auch wenn er nicht so aussieht.



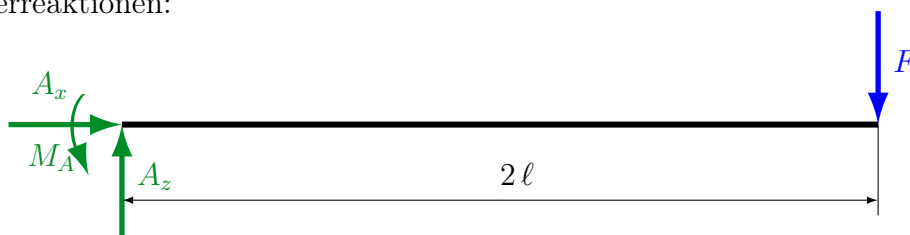
Gegeben: $F = 150 \text{ N}$, $a = 10 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$, $\ell = 1 \text{ m}$.

Gesucht: MOHRsche Kreise für die Punkte 1, 2, 3.

Lösung

Durch die Frage nach MOHRsche Kreisen liegt hier eindeutig eine Frage nach Spannungen vor.

1. Lagerreaktionen:



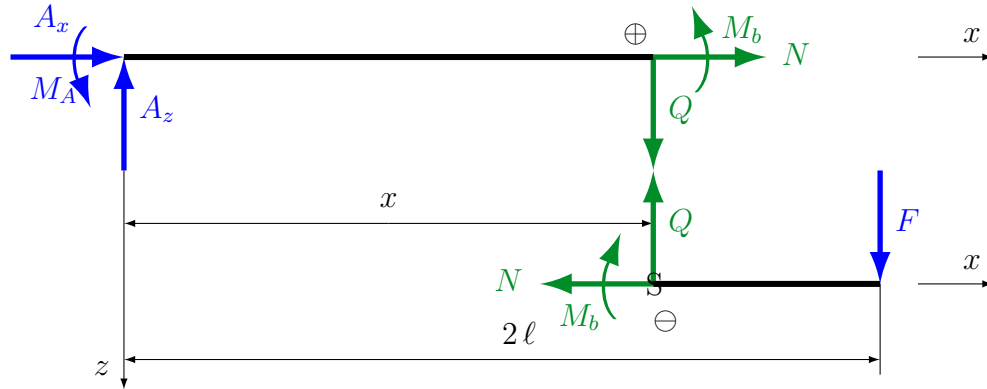
$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A - F 2\ell$$

$$A_x = 0; \quad A_z = F; \quad M_A = 2F\ell$$

2. Bereichseinteilung: Nur ein Bereich, $0 \leq x \leq 2\ell$.
3. Schneiden im Bereich an der Stelle x :



4. KG und MG um S, hier rechts.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = -N \\ \sum Z &\equiv 0 = -Q + F \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_b - F(2\ell - x) \\ N = 0; \quad Q &= F; \quad M_b = -F(2\ell - x)\end{aligned}$$

5. Suche nach Spannungen an der Stelle $x = \ell$

Ginge es um eine Balkenauslegung, würden wir unter 5. nach dem maximalen Biegemoment suchen. Hier sollen wir Spannungen an bestimmten Punkten herausbekommen.

$$N(x = \ell) = 0; \quad Q(x = \ell) = F; \quad M_b(x = \ell) = -F\ell$$

6. z -Position der Punkte 1, 2, 3 festlegen

Ginge es um eine Balkenauslegung, würden wir unter 6. nach $|z_{\max}|$ suchen

$$\text{Punkt 1: } z = -\frac{b}{2}, \quad \text{Punkt 2: } z = 0, \quad \text{Punkt 3: } z = +\frac{b}{2}$$

7. Spannungsberechnung

Für MOHRsche Kreise müssen wir auch die Schubspannungen berechnen.

$$\sigma_x = \frac{M_b(x)}{I_y} z$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2 I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Ferner gilt

$$I_y = \frac{b h^3}{12}$$

Hier finden Sie eine meiner Gemeinheiten, die Sie auch in der Klausur erwarten dürfen. Wir hätten gerne Balken mit den Querschnittsabmaßen Breite b und Höhe h . Unser Balken hat die Breite a und die Höhe b . Das ist sehr verwirrend.

Mit den hier verwendeten Maßen gilt

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2 I_y} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right)$$

$$I_y = \frac{a b^3}{12}$$

Punkt 1: $z = -\frac{b}{2}$

$$\sigma_x = \frac{-F \ell \cdot 12}{a b^3} \left(-\frac{b}{2} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{6 F \ell}{a b^2}, \quad \sigma_x = +225 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2 I_y} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Punkt 2: $z = 0$

$$\sigma_x = \frac{-F \ell \cdot 12}{a b^3} \cdot 0$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{F \cdot 12}{2 a b^3} \left(\frac{b^2}{4} - 0 \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{3 F}{2 a b}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 1,125 \text{ MPa}$$

Punkt 3: $z = +\frac{b}{2}$

$$\sigma_x = -\frac{6 F \ell}{a b^2}, \quad \sigma_x = -225 \text{ MPa}$$

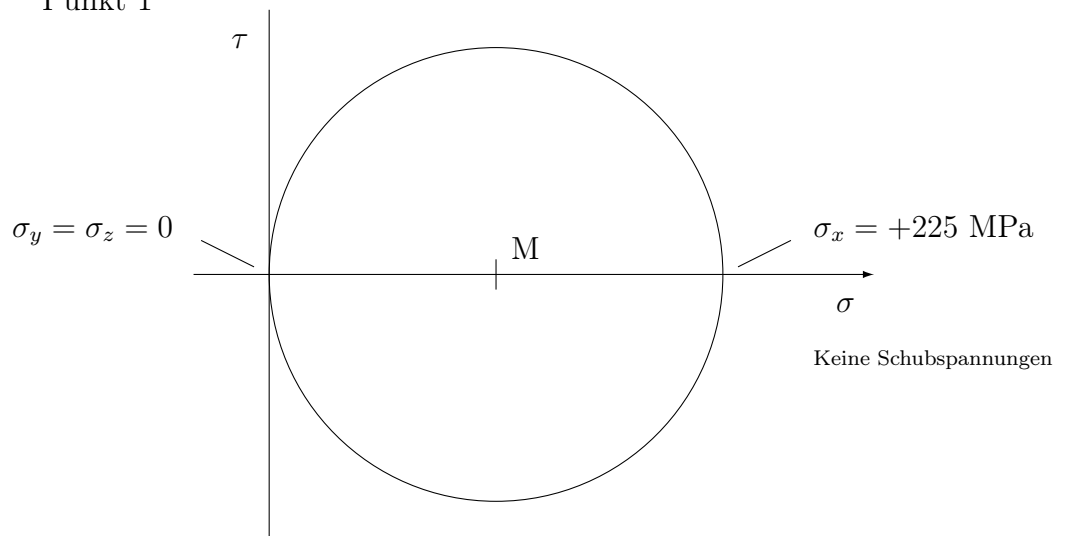
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Was sagen uns diese Ergebnisse? Am oberen Balkengurt haben wir eine positive Normalspannung, also Zug, am unteren demzufolge Druck. Diese Vorzeichenlagen sind verlässlich, da wir von Anfang an den Stunt mit dem positiven und negativen Schnittufer machen. Erwartungsgemäß sind die Schubspannungen an den Außengurten Null.

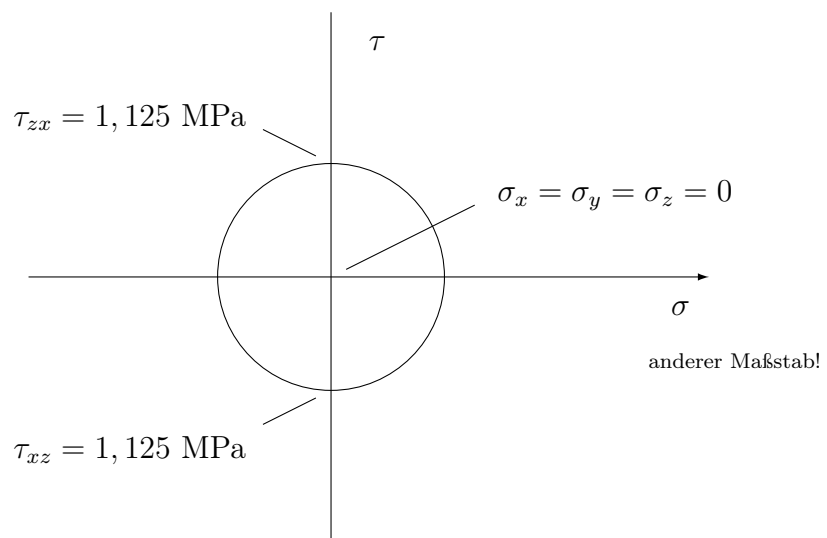
An der neutralen Faser (= x -Achse) ist die Normalspannung Null (deshalb heißt sie so, die neutrale Faser), die einzigen Schubspannungen am Biegebalken haben an dieser Stelle das 'imposante' Maximum von $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 1,125 \text{ MPa}$. Es steht also 1:225. Schubspannungen haben noch nie einen Balken bei reiner Biegung zerstört.

8. MOHRsche Kreise

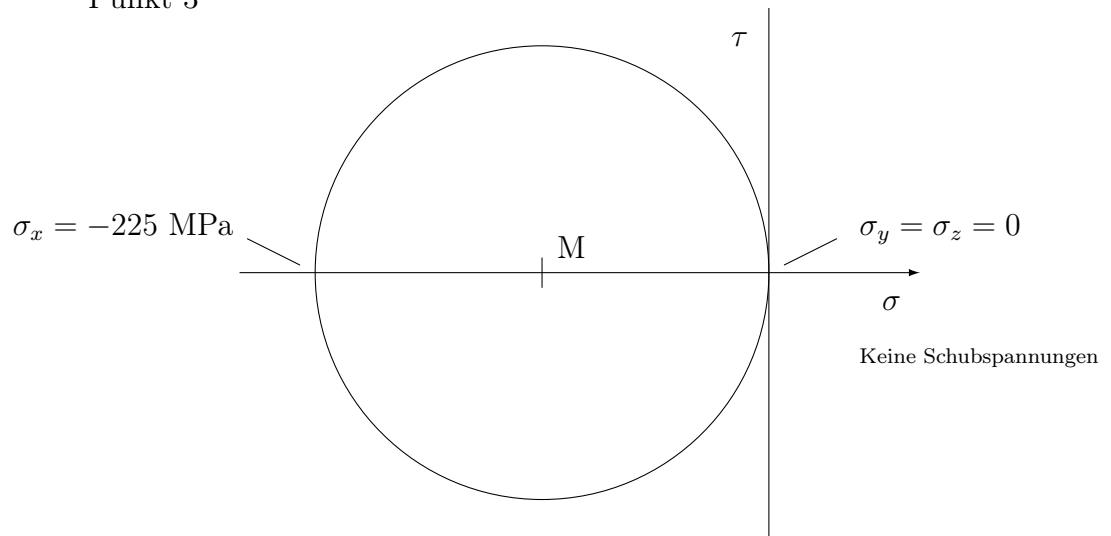
Punkt 1



Punkt 2



Punkt 3



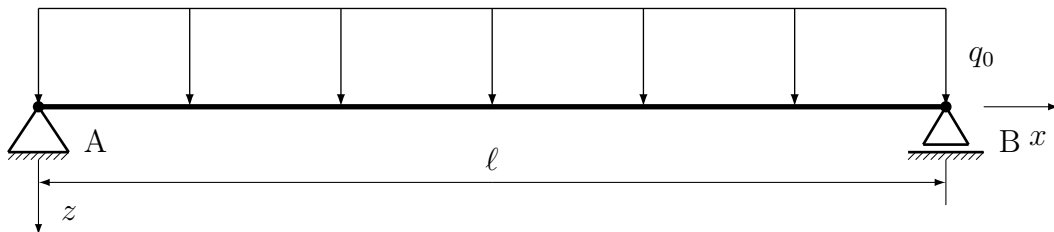
5.7.2 Übungsaufgabe, Streckenlast 2, 1, Sicherheit gegen Fließen

Wir betrachten einen Balken, der alle Schwierigkeiten zu bieten hat. Dies sind

- Streckenlast
- Biegelinie
- Spannungsberechnung mit Überprüfung, wie groß die Sicherheit gegen Fließen ist.

In der Klausur würde hingegen entweder nach der Biegelinie oder nach Spannungen gefragt werden.

Gegeben ist ein langer schlanker Balken.



Gegeben: $\ell = 1,2 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $q_0 = 1\,000 \text{ N/m}$, Balkenbreite $b = 10 \text{ mm}$, Balkenhöhe $a = 30 \text{ mm}$, Fließgrenze $\sigma_F = 250 \text{ MPa}$.

Gesucht:

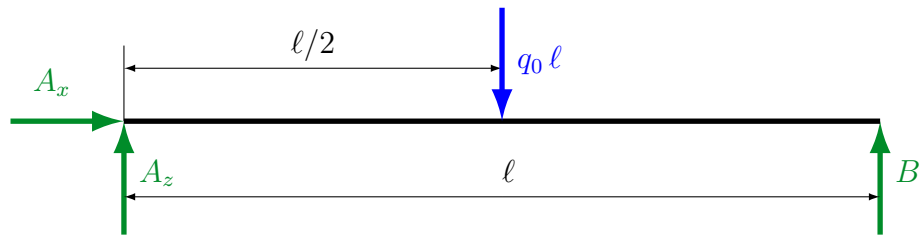
- Durchbiegung an der Stelle $x = \ell/2$,
- Sicherheit gegen Fließen

Lösung

Der Beginn der Berechnung ist für beide Aufgabenteile zunächst gleich. Wir benötigen den Verlauf des Biegemoments.



1. Lagerreaktionen:



$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + q_0 \ell - B$$

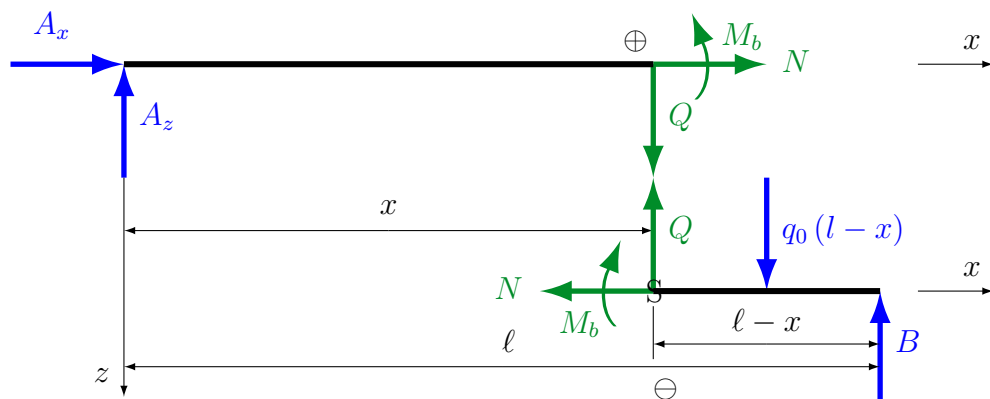
$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = -q_0 \ell \frac{\ell}{2} + B \ell$$

$$A_x = 0; \quad A_z = \frac{q_0 \ell}{2}; \quad B = \frac{q_0 \ell}{2}$$

2. Bereichseinteilung: **Vorsicht, Hilfskraft $q_0 \ell$ entfernen!**

Nur ein Bereich, $0 \leq x \leq \ell$.

3. Schneiden im Bereich an der Stelle x :



4. KG und MG um S, hier rechts.

$$\begin{aligned}
\sum X &\equiv 0 = -N \\
\sum Z &\equiv 0 = -Q + q_0(l - x) - B \\
\sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_b - q_0 \frac{(l - x)^2}{2} + B(l - x) \\
N &= 0; \quad Q = q_0 \left(\frac{\ell}{2} - x \right); \quad M_b = \frac{q_0 x}{2} (\ell - x)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle müssen wir entscheiden, wie es weiter geht. Im Aufgabenteil a) werden wir nach einer Durchbiegung gefragt. Demzufolge müssen wir die DGL der Biegelinie lösen

Lösung a)

5. DGL der Biegelinie

$$\begin{aligned}
I_y E w'' &= -M_b(x), \\
I_y E w'' &= -\frac{q_0 x}{2} (\ell - x), \\
I_y E w'' &= \frac{q_0 x^2}{2} - \frac{q_0 \ell x}{2}, \\
I_y E w' &= \frac{q_0 x^3}{6} - \frac{q_0 \ell x^2}{4} + c_1, \\
I_y E w &= \frac{q_0 x^4}{24} - \frac{q_0 \ell x^3}{12} + c_1 x + c_2.
\end{aligned}$$

6. Rand und Übergangsbedingungen

Da wir keine Bereichsgrenze haben bleibt es bei Randbedingungen

$$(i) \quad w(x = 0) = 0, \quad (ii) \quad w(x = \ell) = 0.$$

Die Bedingung (i) ist sehr angenehm, sie ist vom Typ Doppelnul und setzt die

Konstante c_2 auf Null. Die Bedingung (ii) ist vom Typ Einfachnull.

$$0 = \frac{q_0 \ell^4}{24} - \frac{q_0 \ell^4}{12} + c_1 \ell,$$

$$0 = \frac{q_0 \ell^3}{24} - \frac{2 q_0 \ell^3}{24} + c_1$$

$$c_1 = \frac{q_0 \ell^3}{24}, \quad c_2 = 0$$

daraus folgt

$$I_y E w = \frac{q_0 x^4}{24} - \frac{q_0 \ell x^3}{12} + \frac{q_0 \ell^3 x}{24}.$$

$$I_y E w = \frac{q_0 x}{24} [x^3 - 2 \ell x^2 + \ell^3].$$

Somit ist die Biegelinie berechnet. Gefragt ist nach der Durchbiegung an der Stelle $x = \ell/2$.

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0 \ell}{48 I_y E} \left[\frac{\ell^3}{8} - \frac{\ell^3}{2} + \ell^3 \right],$$

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0 \ell}{48 I_y E} \left[\frac{\ell^3}{8} - \frac{4 \ell^3}{8} + \frac{8 \ell^3}{8} \right],$$

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0 \ell}{48 I_y E} \left[\frac{5 \ell^3}{8} \right],$$

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{5 q_0 \ell^4}{384 I_y E},$$

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{12 \cdot 5 q_0 \ell^4}{384 b a^3 E},$$

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{5 q_0 \ell^4}{32 b a^3 E},$$

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = 5,71 \text{ mm}$$

Jetzt springen wir zurück zu Punkt 4 und kümmern uns um die Spannungsberechnung

Lösung b)

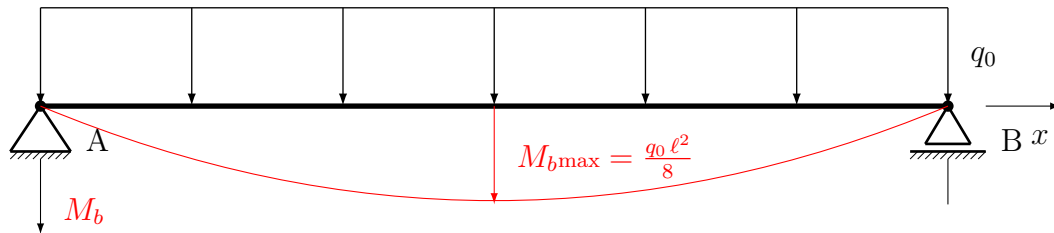
4. lieferte

$$N = 0; \quad Q = q_0 \left(\frac{\ell}{2} - x \right); \quad M_b = \frac{q_0 x}{2} (\ell - x)$$

5. Suche nach der maximalen Spannung

Wir stellen fest, dass das Biegemoment parabolisch ist, da in M_b sich ein x^2 versteckt. Wir berechnen $M_b(x = \ell/2)$. Wir hatten diesen Fall schon in einer früheren Übung, weshalb ich etwas abkürze.

$$M_b(x = \ell/2) = \frac{q_0 \ell^2}{8}$$



$$M_{b\max} = \frac{q_0 \ell^2}{8}$$

6. Suche nach $|z_{\max}|$

$$|z_{\max}| = \frac{a}{2}$$

7. Spannungsberechnung

$$\sigma_{x\max} = \frac{|M_{b\max}|}{I_y} |z_{\max}|$$

Ferner gilt

$$I_y = \frac{b a^3}{12}$$

Mit den hier verwendeten Maßen gilt

$$\sigma_{x\max} = \frac{12 q_0 \ell^2}{8 b a^3} \frac{a}{2}$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{3 q_0 \ell^2}{4 b a^2}$$

$$\sigma_{x\max} = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\max} < \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

$$s_F < \frac{\sigma_F}{\sigma_{x\max}}$$

$$s_F < \frac{250}{120}$$

$$s_F < 2,1$$

Das soll es zur Balkenbiegung gewesen sein. Zwei Kapitel müssen wir noch schaffen. Torsion und Stabknickung.

6 Torsion einer Welle mit Kreis(ring)querschnitt

Sie werden sehen, dass Torsion viel einfacher als Biegung ist. Die Gründe sind:

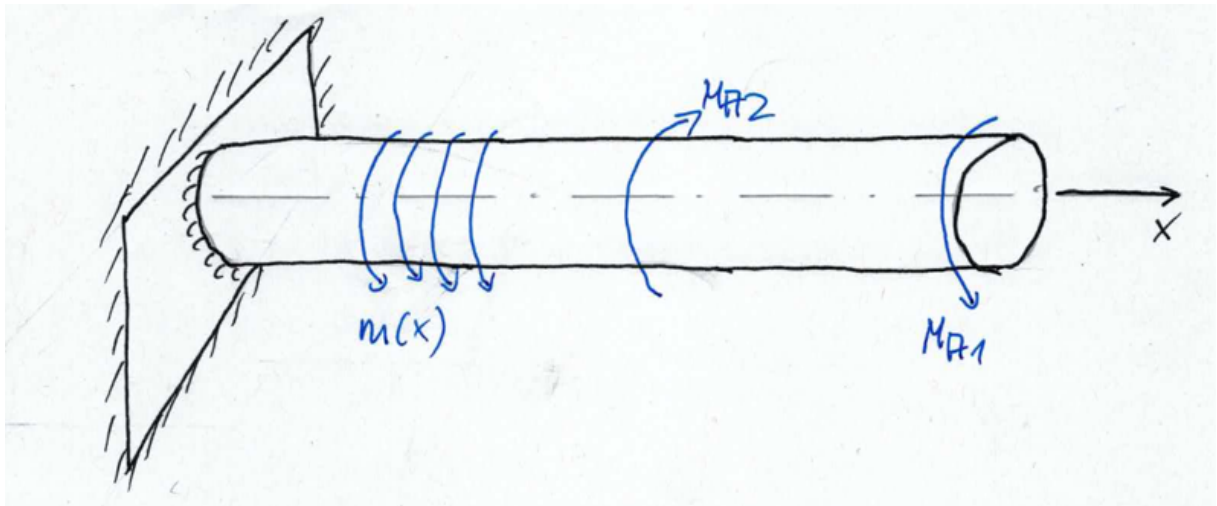
- nur eine Beanspruchungsgröße: Torsionsmoment M_t ,
- nur eine Spannung: Schubspannung τ ,
- es gibt wieder Verformung: Drillwinkel ϑ (theta),
- ja, es gibt hierfür wieder eine DGL, sie ist jedoch von erster Ordnung, daher nur eine Konstante.

Eine Welle (Eigengewicht vernachlässigbar oder durch Lager aufgefangen) sei beliebig durch äußere Torsionsmomente M_{Ai} ($i = 1 \cdots N$) belastet. Auch Momentenverteilungen sind denkbar

$$m(x) = \frac{dM_A}{dx}, \quad \text{analog zu} \quad q(x) = \frac{dF}{dx}$$

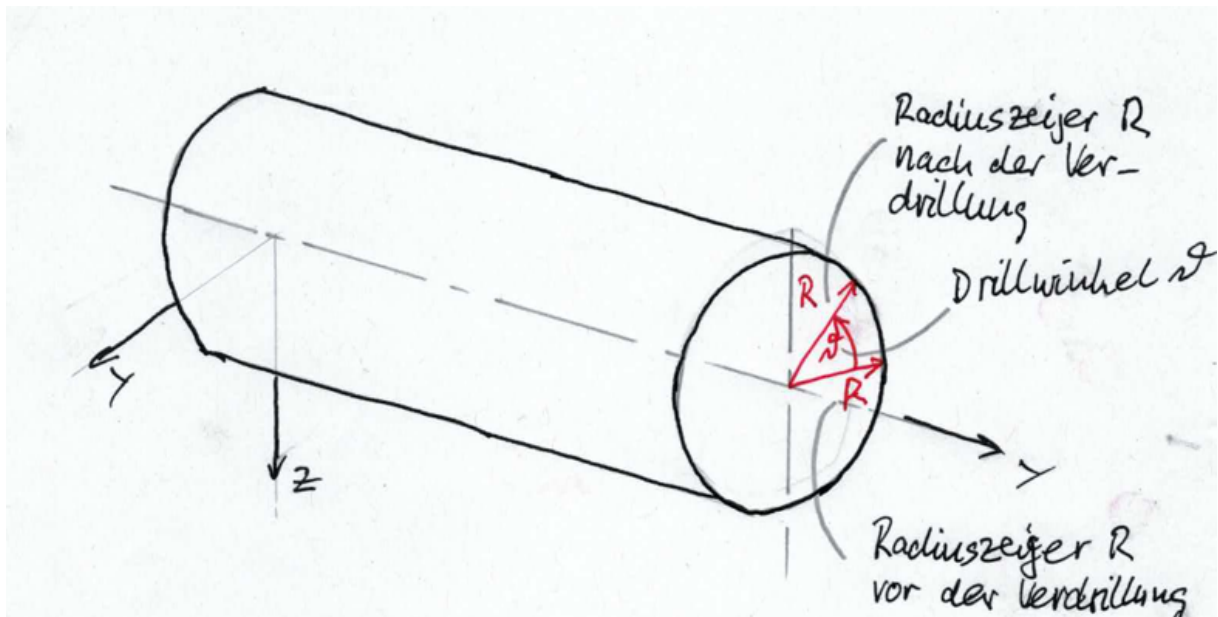
Momentenverteilungen $m(x)$ (Einheit Nm/m = N) – im Gegensatz zu Streckenlasten $q(x)$ – sind sehr selten. Der einzig sinnvolle Fall liegt bei einem Bohrgestänge vor, welches tief in der Erde steckt und über eine gewisse Länge bei der Drehung am Gestein reibt. Wir werden darauf verzichten.

Die zugehörigen Momentenvektoren haben die Richtung der Wellenachse



Künftig werden wir statt der gekrümmten Pfeile Doppelpfeile in oder gegen x -Richtung verwenden. Nur dieses eine mal möchte ich Ihnen eine Momentenverteilung zeigen, was mit Doppelpfeilen nicht recht geht.

Es gibt an jeder Stelle x der Welle einen Schnittmomentenvektor $M_t(x)$, der natürlich auch parallel zur Wellenachse = x -Achse liegt. Die Welle wird daraufhin verdreht.



Den Drillwinkel ϑ können wir sehen, wenn wir auf der Stirnfläche der Welle eine Markierung anbringen, z.B. einen Radiuszeiger. Dann lassen wir die äußeren Torsionsmomente M_A wirken, woraufhin der Radiuszeiger in eine andere Richtung zeigt. Der eingeschlossene Winkel ist der Drillwinkel. Wir müssen grundsätzlich in Bogenmaß rechnen.

Wie groß kann ϑ werden? Da ist alles denkbar. Verschwindend kleine Bogenmaße, also Bruchteile eines Grads sind denkbar. In der Tiefbohrtechnik gibt es hingegen Fälle, in denen auf dem Bohrtisch der Bohrantrieb zehn volle Umdrehungen macht, bevor 1000 m tiefer der Bohrmeißel sich in Bewegung setzt. Das macht das Tiefbohrgeschäft so gefährlich. Wenn die Koppelung zwischen Antrieb und Gestänge nachgibt, entladen sich diese zehn Umdrehungen. Das Bohrgestänge, das im ungünstigen Fall bis hoch in den Bohrturm reicht, schlägt dabei alles kurz und klein.

Auf Grund der Verformung treten Spannungen auf. Bei Kreis(ring)querschnitten sind dies ausschließlich die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} . Da Schubspannungen immer paarweise auftreten, gibt es demzufolge auch τ_{yx} und τ_{zx} .

Das deckt sich nun nicht gerade mit meinen Versprechungen zu Beginn (nur eine Spannung). Abwarten – was nicht ist, kann noch werden.

Es gilt das Gleichgewicht am differentiellen Volumenelement nach Gleichung (II.5).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X^* = 0.$$

Bei Torsion entfällt die Normalspannung σ_x , außerdem verzichten wir auf die Volumenkraft X^* , da wir die Eigengewichtskraft vernachlässigen. Somit verbleibt unter Berücksichtigung der zugeordneten Schubspannungen

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Dies ist erfüllbar durch

$$\tau_{xz} = -\text{const} \cdot y; \quad \tau_{xy} = +\text{const} \cdot z$$

Mit Hilfe der HOOKEschen Gesetze kann folgendes hergeleitet werden

$$(II.52) \quad M_t = G \frac{d\vartheta}{dx} \int_A (z^2 + y^2) dA.$$

Das Integral kennen wir als Polares Flächenträgheitsmoment

$$I_p = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z$$

Wir formen um und fassen zusammen

$$(II.53) \quad G I_p \frac{d\vartheta}{dx} = +M_t(x)$$

oder

$$G I_p \vartheta' = +M_t(x)$$

Das ist die DGL erster Ordnung, die wir für die Berechnung des Drillwinkels ϑ lösen müssen.

Mit

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G : Schubmodul, E : Elastizitätsmodul, ν : Querkontraktionszahl.

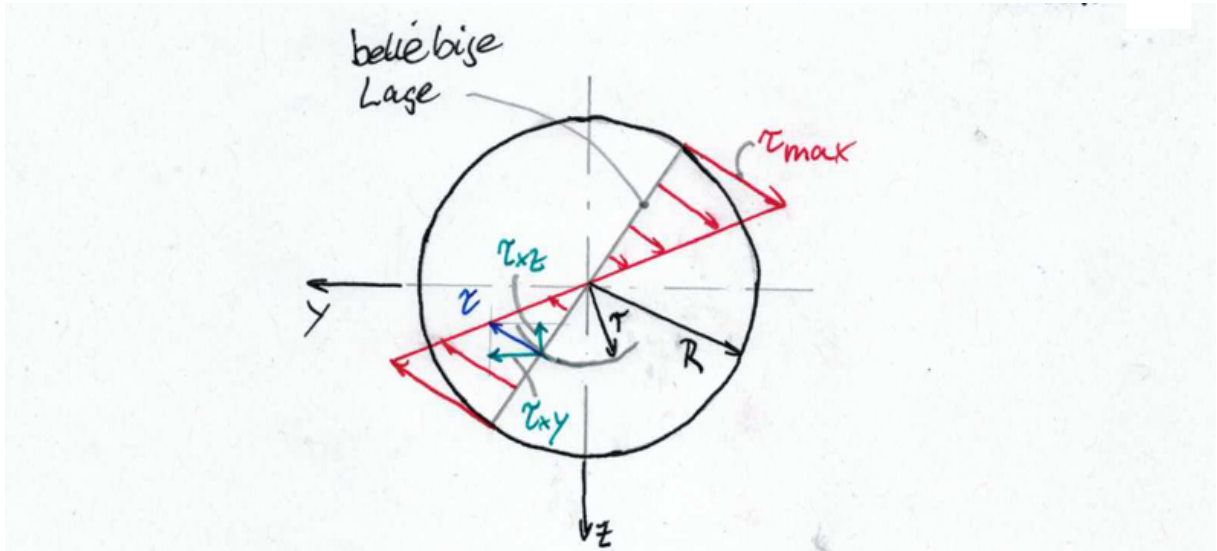
Für die resultierende der beiden Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} gilt

$$\tau_{x\varphi} = \tau = \sqrt{(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

Die Bezeichnung $\tau_{x\varphi}$ bedeutet, die Schubspannung liegt in der Ebene mit Normalenvektor in x -Richtung (erster Index) und zeigt in irgend eine Richtung in dieser y - z -Ebene. Wir werden diese Bezeichnung nicht weiter verfolgen und mit τ abkürzen.

Es gilt

$$(II.54) \quad \tau = \frac{M_t(x)}{I_p} r \quad \text{mit} \quad \tau \perp r$$



Die maximale Schubspannung an der tordierten Welle finden wir am größtmöglichen Radius R , sie berechnet sich zu

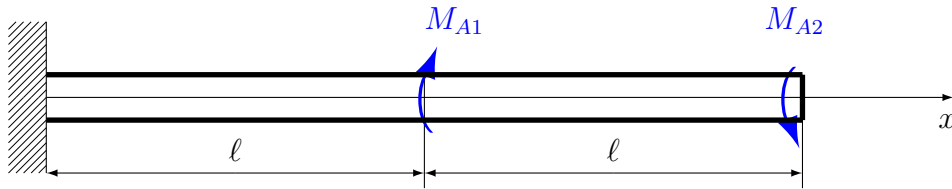
$$(II.55) \quad |\tau_{\max}| = \frac{|M_{t\max}|}{I_p} R$$

6.1 Analogie Torsion – Biegung

Balkenbiegung	Torsion
$I_y E w'' = -M_b(x)$	$I_p G \vartheta' = +M_t(x)$
$\sigma_x = \frac{M_b(x)}{I_y} z$	$\tau_{x\varphi} = \tau = \frac{M_t(x)}{I_p} r$
$ \sigma_{x\max} = \frac{ M_{b\max} }{I_y} z_{\max} $	$ \tau_{\max} = \frac{ M_{t\max} }{I_p} R$
$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2 I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$	keine weitere Spannung

6.2 Beispiel zur Torsion

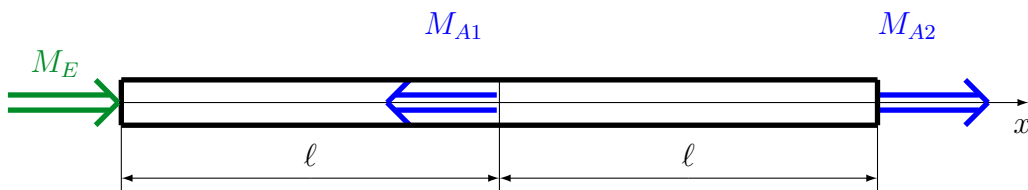
Zum Thema Torsion beginnen wir im Rahmen der Vorlesung mit einem Beispiel.



Gegeben: ℓ , I_p , G , M_{A1} , M_{A2} . Gesucht: Verlauf des Drillwinkels ϑ .

Es erscheinen doch noch einmal gekrümmte Pfeile als Symbol für äußere Torsionsmomente. Wir werden sie gleich durch Doppelpfeile ersetzen.

1. Lagerreaktionen

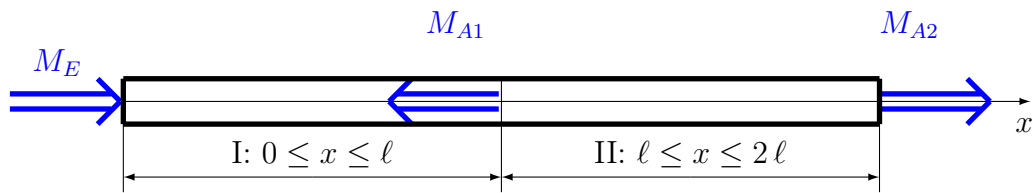


$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = M_E - M_{A1} + M_{A2}$$

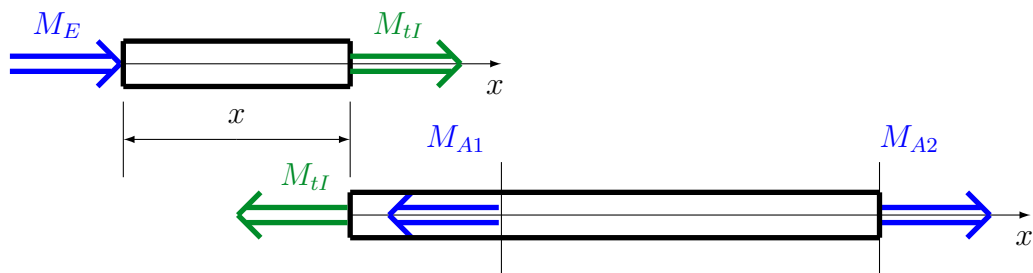
$$M_E = M_{A1} - M_{A2}$$

M_E wie Einspannmoment

2. Bereichsteilung



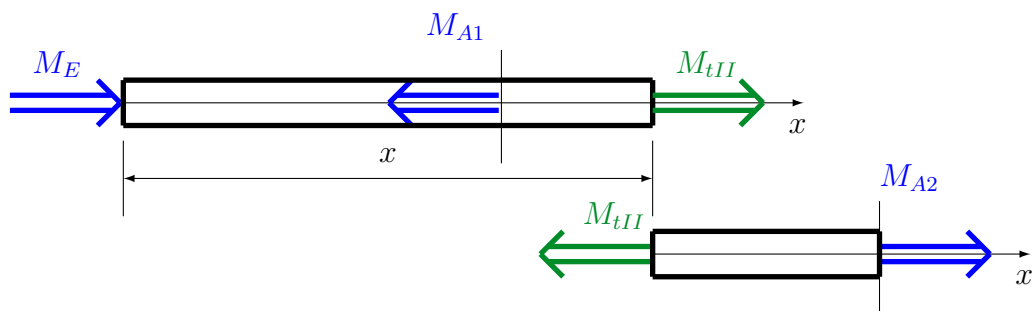
3. a) Schneiden im Bereich I

4. a) MG um x hier rechts

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M_{tI} - M_{A1} + M_{A2}$$

$$M_{tI} = M_{A2} - M_{A1}$$

3. b) Schneiden im Bereich II



4. b) MG um x hier rechts

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M_{tII} + M_{A2}$$

$$M_{tII} = M_{A2}$$

5. DGL der Torsion

$$\begin{array}{ll} G I_p \vartheta'_I = M_{tI} & G I_p \vartheta'_{II} = M_{tII} \\ G I_p \vartheta'_I = M_{A2} - M_{A1} & G I_p \vartheta'_{II} = M_{A2} \\ G I_p \vartheta_I = M_{A2} x - M_{A1} x + c_1 & G I_p \vartheta_{II} = M_{A2} x + c_2 \end{array}$$

6. Rand- und Übergangsbedingungen

Links außen bei $x = 0$ haben wir eine feste Einspannung. An der Bereichsgrenze bei $x = \ell$ haben wir einen stetigen Übergang von Bereich I zu Bereich II. Wir stellen fest:

$$(1) \quad \vartheta_I(x = 0) = 0, \quad (2) \quad \vartheta_I(x = \ell) = \vartheta_{II}(x = \ell)$$

Die Bedingung (1) ist vom Typ Doppelnulld und liefert

$$c_1 = 0$$

Die Bedingung (2) wird in die integrierten Gleichungen eingesetzt. Dabei setzen wir $G I_p \vartheta_I(x = \ell)$ mit $G I_p \vartheta_{II}(x = \ell)$ gleich. Wir nehmen also die rechten Seiten und ersetzen x durch ℓ

$$\begin{array}{l} M_{A2} \ell - M_{A1} \ell = M_{A2} \ell + c_2 \\ c_2 = -M_{A1} \ell \end{array}$$

7. Anschreiben der Drillwinkelverläufe

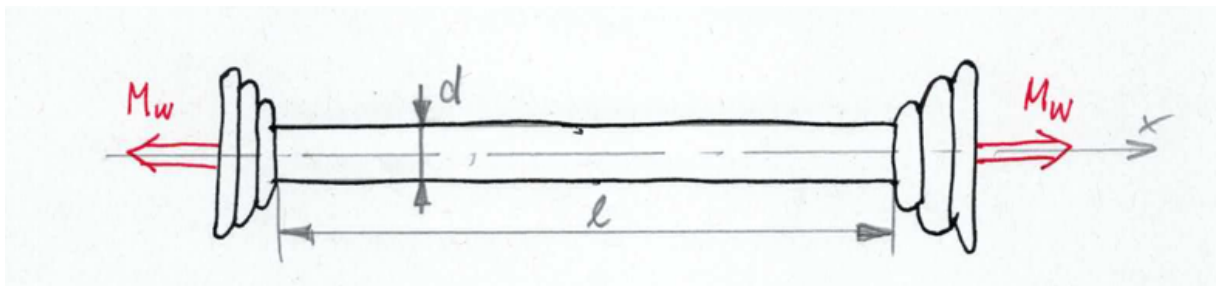
$$\begin{array}{l} \vartheta_I = \frac{1}{G I_p} [M_{A2} x - M_{A1} x] \\ \vartheta_{II} = \frac{1}{G I_p} [M_{A2} x - M_{A1} \ell] \end{array}$$

Wir sehen, Torsion ist erheblich einfacher. Vergleichen Sie das mit der Berechnung eines Biegebalkens mit zwei Bereichen.

6.2.1 Übungsaufgabe, Gelenkwelle eines Autos

Ein Pkw wird im 1. Gang rasant angefahren. Der Motor entwickelt sein Maximalmoment $M_M = 160 \text{ Nm}$. Berechnen Sie unter Berücksichtigung

- aller Übersetzungsverhältnisse
 - des Vorhandenseins eines Differentialgetriebes
- a) das in einer Gelenkwelle wirkende Torsionsmoment M_W ,
 - b) den maximalen Drillwinkel ϑ ,
 - c) die maximal auftretende Schubspannung τ
 - d) Zugfestigkeit bei 1,2-facher Sicherheit gegen Bruch nach TRESCA



Gegeben $i_{1. \text{ Gang}} = 3,65$, $i_{\text{Achsantrieb}} = 3,89$, $\ell = 400 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $d = 25 \text{ mm}$, $\nu = 0,3$, $M_M = 160 \text{ Nm}$

Die Zahlenwerte sind realistisch, wenn auch nicht mehr aktuell. Sie entstammen meinem ersten selbst bezahlten Auto, einem Golf II von 1986 mit 66 kW (90 PS).

Betrachten wir kurz den Antriebsstrang eines Autos und die Wirkung von Zahnradgetrieben. Der Motor erzeugt ein Drehmoment. In unserem Sinne ist es ein Torsionsmoment an der Kurbelwelle. Ob sich eine Welle dreht oder sie festgehalten wird, ist uns herzlich egal, aus TM-Sicht macht das keinen Unterschied. Die Kupplung stellt das anliegende Motormoment unverändert ans Getriebe durch. Im Getriebe ist der 1. Gang gewählt mit einem Übersetzungsverhältnis $i = 3,65$. Das bedeutet, dass die Drehzahl um den Faktor 3,65 kleiner wird und das Torsionsmoment um den gleichen Faktor größer wird (über Verluste wollen wir nicht streiten, sie sind bei Stirnradgetrieben sehr gering).

Die Getriebeausgangswelle treibt den Achsantrieb an. Bei einem klassischen Nord-Süd-Auto (Motor vorn, Kardanwelle, Hinterachsantrieb) ist der Achsantrieb als Kegelradsatz im Differentialgetriebe untergebracht. Bei meinem Golf mit Quermotor und Vorderradantrieb war das ein weiteres Stirnradpaar. Es hat das Übersetzungsverhältnis $i = 3,89$.

Das Differentialgetriebe verteilt das Eingangsmoment gerecht auf die beiden Gelenkwellen, die die Räder antreiben. Bei Geradeausfahrt wird das Eingangsmoment hälftig aufgeteilt. Jetzt wissen wir bescheid.

a) Das Torsionsmoment in einer Gelenkwelle berechnet sich zu

$$M_W = M_M \cdot i_{1. \text{ Gang}} \cdot i_{\text{Achsantrieb}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$M_W = 1\,136 \text{ Nm}$$

b) Maximaler Drillwinkel ϑ

Zunächst bestimmen wir einige Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \text{Schubmodul} \quad G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ G &= 8,08 \cdot 10^4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

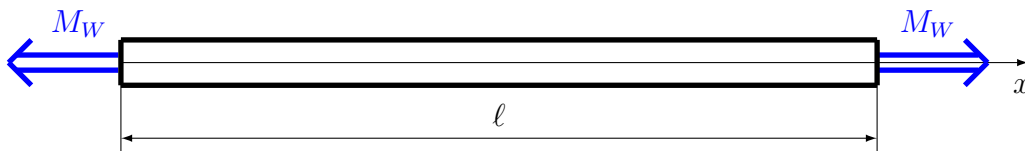
$$\begin{aligned} \text{polares Flächenträgheitsmoment} \quad I_p &= \frac{\pi d^4}{32} \\ I_p &= 3,83 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Die polaren Flächenträgheitsmomente für Voll- und Hohlwellen gehören auf Ihren legalen Pfuschezettel (I_y , die axialen FTMe, natürlich auch)!

Nun beginnt die Berechnung der Drillwinkel:

1. Lagerreaktionen.

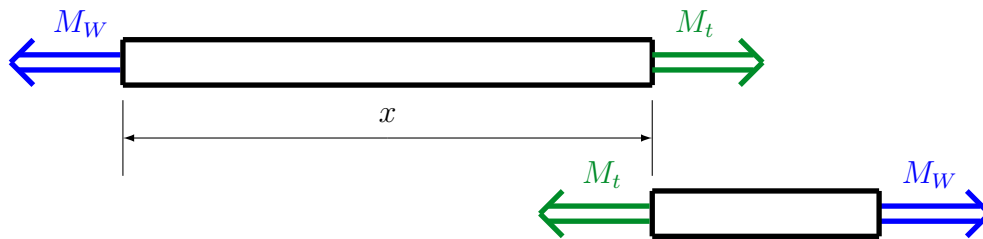
Wir haben doch gar keine feste Einspannung. Egal die Welle hat an beiden Enden das gleiche aber entgegengesetzte Torsionsmoment M_W .



2. Bereichseinteilung

Nur ein Bereich $0 \leq x \leq \ell$.

3. Schneiden im Bereich

4. MG um x hier links

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = M_t - M_W$$

$$M_t = M_W$$

5. DGL der Torsion

$$G I_p \vartheta' = M_t$$

$$G I_p \vartheta' = M_W$$

$$G I_p \vartheta = M_W x + c_1$$

6. Rand- und Übergangsbedingungen

Da wir eine umlaufende Welle haben, fällt es uns zunächst schwer, an den Rändern Aussagen zu treffen. Die Lösung ist ganz einfach. Wir nehmen einen Rand, der uns gefällt und definieren einfach, dass die Verdrillung dort Null ist. Da wir nicht blöd sind, nehmen wir natürlich den Rand an der Stelle $x = 0$.

Es gilt willkürlich

$$\vartheta(x = 0) = 0, \quad c_1 = 0$$

7. Anschreiben des Drillwinkelverlaufs und Angabe des maximalen Drillwinkels.

Am linken Rand haben wir die Verdrillung willkürlich aber geschickt auf Null gesetzt. Den maximalen Drillwinkel finden wir demzufolge am rechten Rand bei $x = \ell$.

$$\vartheta = \frac{M_W x}{G I_p}$$

$$\vartheta_{\max} = \vartheta(x = \ell) = \frac{M_W \ell}{G I_p}$$

$$\vartheta_{\max} = 0,147$$

Drillwinkel ergeben sich immer im Bogenmaß. 0,147 entsprechen $8,42^\circ$

c) Maximale Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{I_p} r_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1\,136 \cdot 10^3}{3,83 \cdot 10^4} 12,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = 371 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Es ist ganz typisch, dass das Torsionsmoment in einer Welle einen konstanten Verlauf hat. Die Suche nach dem Maximum ist also müßig. Nur bei Momentenverteilungen gibt es eine Abhängigkeit von x . Wie können – anders als beim Balken – nicht vorhersagen wo eine Welle zerstört wird, wenn sie überlastet wird.

d) Dimensionierung nach TRESCA gegen Bruch

Hier taucht die einzige Erschwernis bei Torsion gegenüber Biegung auf. Wir haben zwar nur eine Spannung τ , wir dürfen sie aber auf gar keinen Fall mit Werkstoffkennwerten vergleichen. Das dürfen wir nur bei einachsigem Zug oder Druck. Wir haben hingegen Torsion und werden gleich unser blaues Wunder erleben.

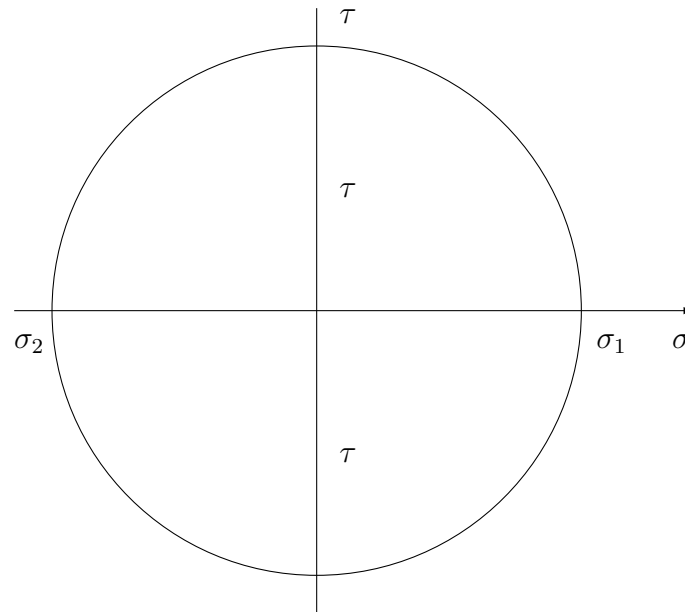
Vergleichsspannungshypothese nach TRESCA

$$\sigma_v = \max \left[|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_1 - \sigma_3| \right]$$

Bestimmung der Hauptspannungen σ_{123} z. B. mit Hilfe des MOHRschen Kreises. Hierbei gilt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Es gibt lediglich eine Schubspannung $\tau = 371 \text{ MPa}$.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es herrscht also ein ebener Spannungszustand.



$$\sigma_1 = +371 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_2 = -371 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_v = \max \left[742; 371; 371 \right] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\sigma_v = 742 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\sigma_B > s_B \sigma_v$$

$$\sigma_B > 1,2 \cdot 742 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_B > 890,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

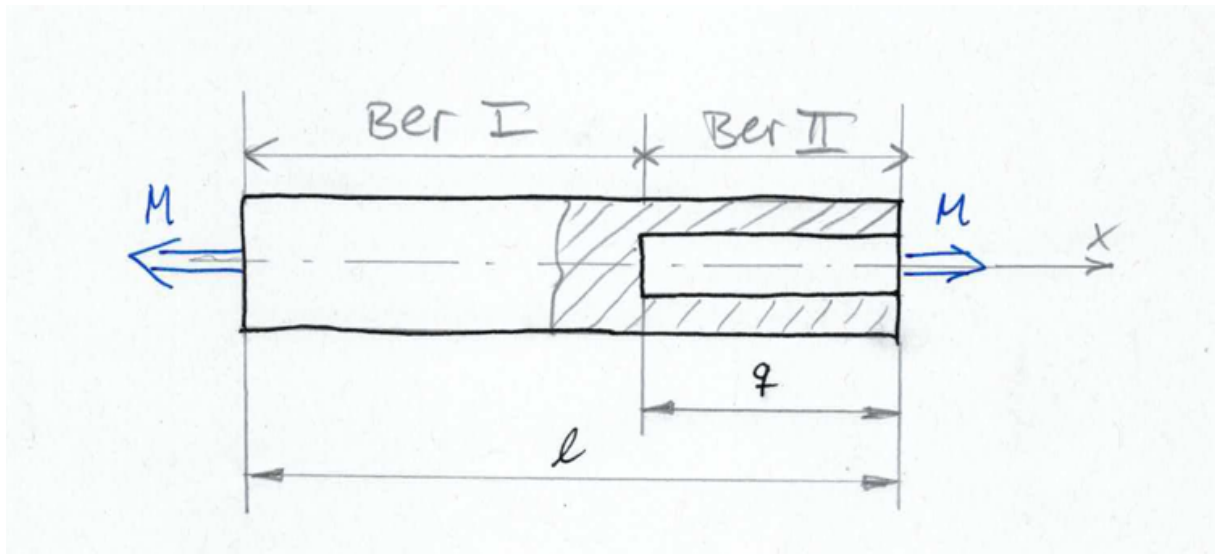
Wir benötigen demzufolge einen Werkstoff mit einer Zugfestigkeit von über 890 MPa. Tatsächlich sind die Gelenkwellen sehr hoch beanspruchte Bauteile. Es kommt durchaus vor, dass ein Krawallstart zu plastischen Verformungen in der Welle führt. Mal ganz ehrlich, nur Idioten posen und lassen die Reifen quietschen.

Erinnern Sie sich noch an unsere erste Vorlesung, als ich morsche Hölzer zerbrochen habe? Biegung und Torsion fordern das Material. Bei reiner Torsion ist es immer so, dass die doppelte Schubspannung mit Werkstoffkennwerten verglichen werden muss.

■

6.2.2 Übungsaufgabe, hohlgebohrte Messwelle

Ein Stahlstab soll zur Momentenmessung verwendet werden. Das Moment M soll eine Torsion (= Drillwinkel) α erzeugen.



Auf welcher Länge q muss der Stab ausgebohrt werden, um dies zu erreichen?

Gegeben: $G_{St} = 8 \cdot 10^4$ MPa, $\ell = 1250$ mm, $I_{pI} = 61 \cdot 10^4$ mm⁴, $I_{pII} = 36 \cdot 10^4$ mm⁴, $M = 1,2 \cdot 10^3$ Nm, $\alpha = 2,5^\circ$.

Gesucht: q .

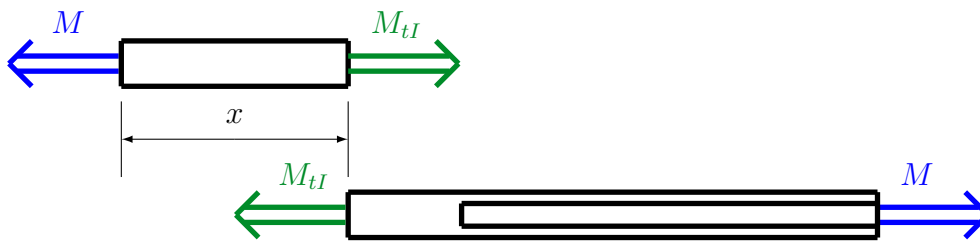
In dieser Aufgabe sind ein paar Gemeinheiten versteckt. Der Winkel α ist in Grad angegeben. Wenn wir ihn verwenden wollen, müssen wir ihn vorher in Bogenmaß umrechnen. Nach unseren bisherigen Erkenntnissen würden wir behaupten, dass unsere Torsionswelle nur aus einem Bereich besteht. Es kommt ein weiterer Grund für eine Bereichsgrenze hinzu: Wenn sich das Flächenträgheitsmoment sprunghaft ändert muss ebenfalls eine Bereichsgrenze eingerichtet werden. Immerhin wird das in der Aufgabenstellung schon angedeutet. Wir gehen wie gewohnt vor.

1. Lagerreaktionen, kein Handlungsbedarf, schon bekannt.

2. Bereichseinteilung ohne neue Skizze.

Bereich I: $0 \leq x \leq (\ell - q)$, Bereich II: $(\ell - q) \leq x \leq \ell$.

3. a) Schneiden im Bereich I

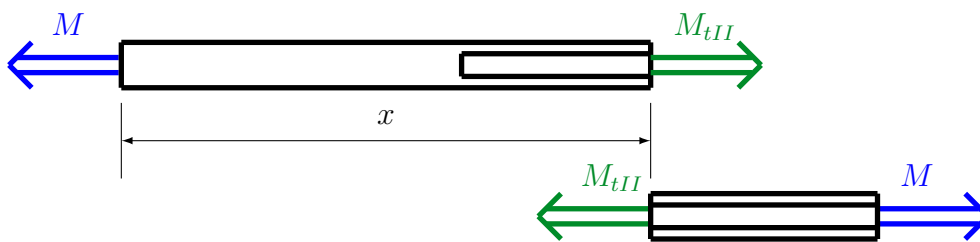


4. a) KG um x hier links

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M + M_{tI}$$

$$M_{tI} = M$$

3. b) Schneiden im Bereich II



4. b) KG um x hier links

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M + M_{tII}$$

$$M_{tII} = M$$

5. DGL der Torsion

$$G I_{pI} \vartheta'_I = M_{tI}$$

$$G I_{pI} \vartheta'_I = M$$

$$G I_{pI} \vartheta_I = M x + c_1$$

$$G I_{pII} \vartheta'_{II} = M_{tII}$$

$$G I_{pII} \vartheta'_{II} = M$$

$$G I_{pII} \vartheta_{II} = M x + c_2$$

6. Rand- und Übergangsbedingungen

Willkürlich legen wir bei $x = 0$ fest, dass der Drillwinkel ϑ Null ist. Bei $x = (\ell - q)$ haben wir einen Übergang von Bereich I zu Bereich II. Neu hinzu kommt, dass am rechten Ende der Welle bei $x = \ell$ der Drillwinkel bekannt ist. Er soll den Wert α annehmen. Dort befinden wir uns im Bereich II.

Wir stellen fest:

$$(1) \quad \vartheta_I(x = 0) = 0, \quad (2) \quad \vartheta_I(x = \ell - q) = \vartheta_{II}(x = \ell - q), \quad (3) \quad \vartheta_{II}(x = \ell) = \alpha$$

Die Bedingung (1) ist vom Typ Doppelnul und liefert

$$c_1 = 0$$

Die Bedingung (2) wird in die integrierten Gleichungen eingesetzt. Diesmal dürfen wir nicht einfach die rechten Seiten betrachten, denn der Unterschied in beiden Bereichen liegt beim polaren Flächenträgheitsmoment. Wir müssen tatsächlich zu den Drillwinkeln auflösen.

$$\begin{aligned} \vartheta_I(x = \ell - q) &= \frac{M(l - q)}{G I_{pI}} \\ \vartheta_{II}(x = \ell - q) &= \frac{M(l - q) + c_2}{G I_{pII}} \end{aligned}$$

Nun können wir die rechten Seiten gleichsetzen.

$$\begin{aligned} \frac{M(l - q)}{G I_{pI}} &= \frac{M(l - q) + c_2}{G I_{pII}} \quad | \cdot G \\ \frac{M(l - q)}{I_{pI}} &= \frac{M(l - q) + c_2}{I_{pII}} \end{aligned}$$

Hauptnenner ist $I_{pI} I_{pII}$

$$\frac{I_{pII} M(l - q)}{I_{pI} I_{pII}} = \frac{I_{pI} [M(l - q) + c_2]}{I_{pI} I_{pII}}$$

Hauptnenner entfällt

$$I_{pII} M(l - q) = I_{pI} [M(l - q) + c_2]$$

auflösen nach c_2

$$I_{pI} c_2 = I_{pII} M(l - q) - I_{pI} M(l - q)$$

$$I_{pI} c_2 = (I_{pII} - I_{pI}) M(l - q)$$

$$c_2 = \frac{I_{pII} - I_{pI}}{I_{pI}} M(l - q)$$

7. Verwendung der Bedingung (3)

$$\vartheta_{II}(x = \ell) = \alpha = 2,5^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 0,044$$

$$G I_{pII} \alpha = M \ell + c_2$$

$$G I_{pII} \alpha = M \ell + \frac{I_{pII} - I_{pI}}{I_{pI}} M (l - q)$$

nach q auflösen

$$\frac{I_{pII} - I_{pI}}{I_{pI}} M (l - q) = G I_{pII} \alpha - M \ell$$

$$l - q = \frac{I_{pI} I_{pII}}{I_{pII} - I_{pI}} \frac{G \alpha}{M} - \frac{I_{pI}}{I_{pII} - I_{pI}} \ell \quad | \cdot (-1)$$

$$-l + q = -\frac{I_{pI} I_{pII}}{I_{pII} - I_{pI}} \frac{G \alpha}{M} + \frac{I_{pI}}{I_{pII} - I_{pI}} \ell$$

$$q = \ell + \frac{I_{pI}}{I_{pII} - I_{pI}} \ell - \frac{I_{pI} I_{pII}}{I_{pII} - I_{pI}} \frac{G \alpha}{M}$$

$$q = \left[1250 + 1250 \frac{61}{36 - 61} - \frac{61 \cdot 36 \cdot 10^4}{36 - 61} \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 0,044}{1,2 \cdot 10^6} \right] \text{ mm}$$

$$q = 777 \text{ mm}$$

Zugegeben, diese Aufgabe ist etwas teuflisch, genug mit Torsion.

7 Axialbelastung von Stäben, elastische Stabknickung

Nun biegen wir auf die Zielgerade ein. Wir werden ein letztes, recht einfaches aber auch interessantes Thema kennenlernen: EULERSche Stabknickung. Stäbe, die axial auf Druck beansprucht werden, knicken ab einer bestimmten Last seitlich aus und versagen schlagartig. Mit einem Kunststofflineal kann das (auf eigene Gefahr) gut erforscht werden. Stellen Sie es senkrecht hin und drücken Sie mit der flachen Hand von oben darauf. Erhöhen Sie vorsichtig die Kraft und seien Sie bereit, sofort nachzulassen, wenn das Lineal ausknickt (Vorsicht Verletzungsgefahr). Wir wollen wissen, ab welcher Kraft knickt ein Stab aus.

Schlanke Stäbe neigen bei axialem Druck dazu, senkrecht zur Belastungsrichtung seitlich auszuknicken.

Diese Instabilität (häufig katastrophal) erfolgt, wenn die Axiallast einen kritischen Wert P_{krit} erreicht hat. Genannt EULERSche Knicklast. P_{krit} ist abhängig von

- Stabgeometrie
- Material
- Lagerung

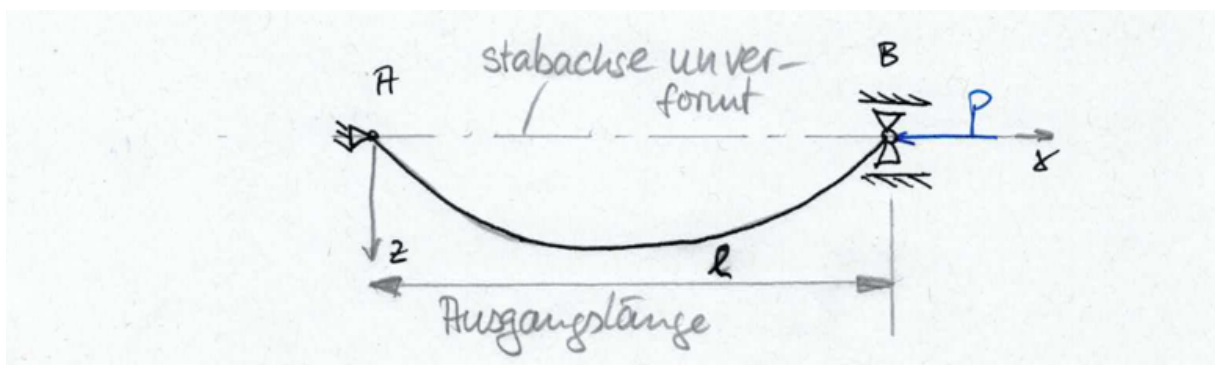
7.1 Theoretische Betrachtung zur Ermittlung von P_{krit}

Annahmen:

- $\ell \gg$ Querabmessung (schlank),
- $I E w'' = -M_b(x)$ gilt weiterhin.

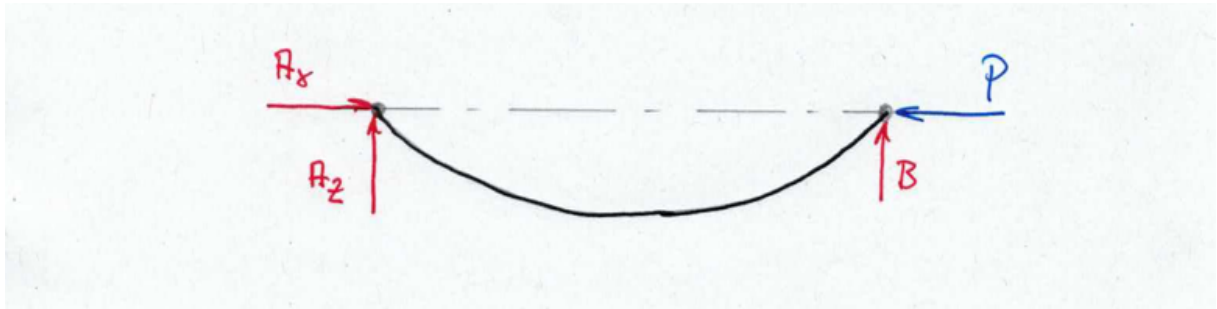
Die Folge ist, dass $M_b(x)$ am deformierten Stab ermittelt werden muss, denn andernfalls wäre $M_b(x) = 0$.

Beispiel



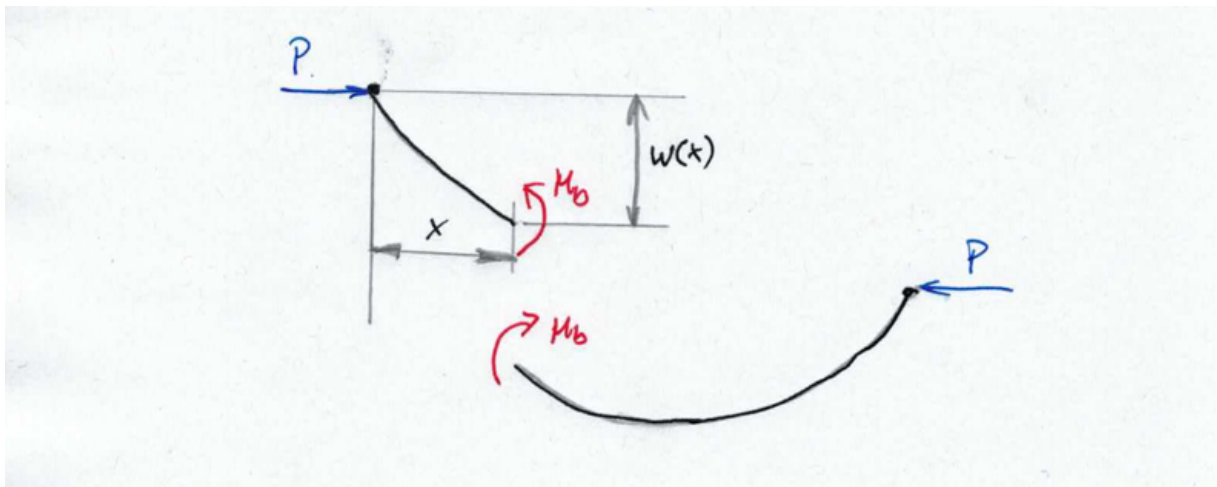
Das Maß ℓ beschreibt die Länge des unverformten Stabes. Insofern ist obige Skizze missverständlich. Der Hinweis 'Ausgangslänge' weist darauf hin.

Lagerreaktionen



$$\begin{aligned}\sum X \equiv 0 &= A_x - P & A_x &= P \\ \sum Z \equiv 0 &= -A_z - B & A_z &= 0 \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= B \ell & B &= 0\end{aligned}$$

Schneiden im Bereich an der Stelle x



MG um die Schnittstelle, hier links

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} \equiv 0 &= M_b - P w(x) \\ M_b &= P w(x)\end{aligned}$$

Biegelinie

$$I E w'' = -M_b(x)$$

$$I E w'' = -P w$$

$$I E w'' + P w = 0$$

Diese DGL unterscheidet sich grundlegend von den bisher bekannten. Wir finden die Durchbiegung sowohl als Größe w als auch als Größe w'' . Ein gewohntes Ausrechnen der DGL ist so nicht möglich. Hier muss eine andere, etwas unbefriedigende Vorgehensweise eingeschlagen werden. Wir müssen für w einen Ansatz tätigen (d.h. das Ergebnis raten), diesen Ansatz zweimal ableiten und statt w und w'' in die DGL einsetzen.

Eine solche DGL werden wir im Fach Maschinendynamik auch finden. Dort beschreibt sie die harmonische Bewegung eines schwingungsfähigen Systems.

Wir kürzen etwas ab. Wir bringen die DGL in eine bestimmte Form, so dass w'' keinen Faktor mehr hat und benennen die verbliebenen Faktoren vor w um, in einer Art, in der man gut die Wurzel ziehen kann.

$$(II.56) \quad w'' + \frac{P}{I E} w = 0$$

Analogie zur Schwingungslehre

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

im vorliegenden Fall

$$(II.57) \quad w'' + \kappa^2 w = 0$$

κ ist der griechische Buchstabe kappa

Möglicherweise haben Sie von der Bewegungsgleichung für Schwingungen noch nie etwas gehört. Dann ist die Analogie nutzlos. Trotzdem sei kurz erklärt, worum es geht: Eine Masse m hängt an einer Feder mit Federsteifigkeit c und schwingt. Die Masse macht also eine Bewegung, beschrieben durch die Koordinate x . Dabei ist $\ddot{x}$ die Beschleunigung der Masse. $\ddot{x}$ ist die zweifache Ableitung von x nach der Zeit. Die DGL hat die Lösung

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t).$$

Die Masse führt demzufolge eine Sinus/Cosinus-Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 (omega-null) aus. Wer dies zum ersten mal liest, fragt sich, wo zum Teufel kommt der Sinus und der Cosinus her? Nun, den muss man vorher geraten und als Ansatz eingesetzt haben. Keiner hat behauptet, dass Mathematik immer einfach ist.

Die DGL (II.57) hat die allgemeine Lösung

$$w(x) = c_1 \cos(\kappa x) + c_2 \sin(\kappa x)$$

c_1 und c_2 sind Integrationskonstanten, die wie üblich gelöst werden.

$$w(x=0) = 0$$

$$w(x=\ell) = 0.$$

Da gilt $\sin(0) = 0$, liefert die Randbedingung vom Typ Doppelnul ein gewohntes Ergebnis

$$c_1 = 0$$

Die Lösung der DGL reduziert sich dadurch zu

$$w(x) = c_2 \sin(\kappa x)$$

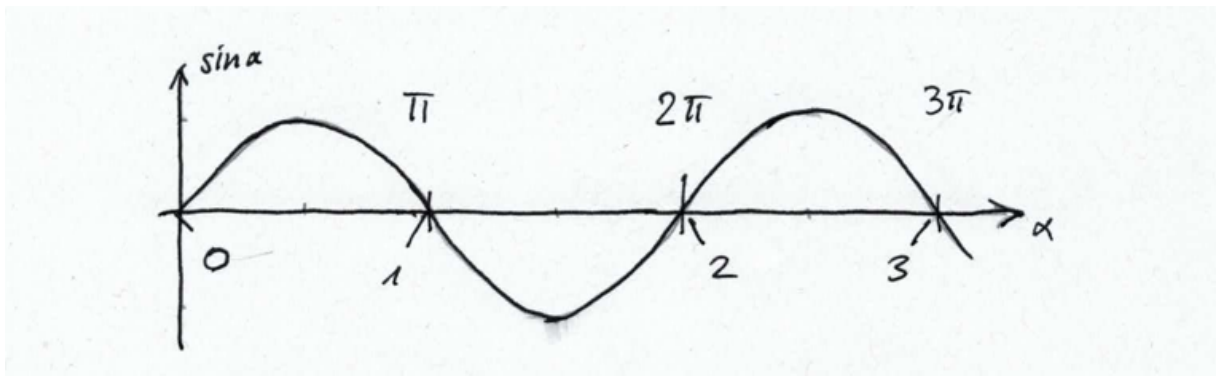
Die verbliebene Randbedingung $w(x=\ell) = 0$ liefert

$$0 = c_2 \sin(\kappa \ell)$$

c_2 ist nicht eindeutig lösbar. Es muss vielmehr gelten

$$\sin(\kappa \ell) = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa^2 = \frac{P}{I E}$$

Für welche κ ist diese Bedingung erfüllt? Hierzu schauen wir uns den Sinus eines beliebigen Winkels α an. Wir stellen fest, es gibt viele Stellen, an denen der Sinus Null wird. Die Stellen sind durchnummeriert. Wir schauen sie uns der Reihe nach an.



Lösung 0: $\kappa_0 = 0$

Lösung 1: $\kappa_1 = \frac{\pi}{\ell}$

Lösung 2: $\kappa_2 = \frac{2\pi}{\ell}$

Lösung n: $\kappa_n = \frac{n\pi}{\ell}$

Lösung 0 entfällt, da κ nicht Null werden kann. Betrachten wir die n -te Lösung

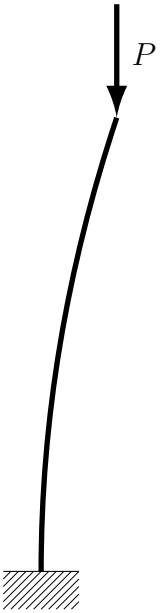
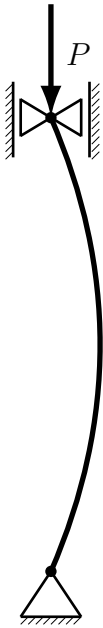
$$\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} = \frac{P_n}{I E} \quad \text{oder} \quad P_n = n^2 \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

Bei der kleinsten der möglichen Lasten P_n wird der Stab ausknicken und zerstört werden, so dass gilt

$$(II.58) \quad P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2} = P_1$$

Gleichung (II.58) beschreibt die Knicklast für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab.

7.2 Ergebnisse für andere Lagerungsfälle

EULER Fall	1	2	3	4
Stab- länge immer ℓ				
P_{krit}	$= \frac{\pi^2 E \check{I}}{4 \ell^2}$	$= \frac{\pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$	$\approx \frac{2 \pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$	$= \frac{4 \pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$

Beachte bei nichttrunden Stäben: Wirksam ist das kleinste auftretende Flächenträgheitsmoment, weshalb bei der Berechnung der Knicklast $\check{I}$ angegeben ist.

Ferner gilt

$$(II.59) \quad \sigma_k = \frac{P_{\text{krit}}}{A} < \sigma_p$$

Mit A : Querschnittsfläche des Stabs, σ_p Proportionalitätsgrenze des Werkstoffs.

Falls Bedingung (II.59) nicht eingehalten wird ($\sigma_k > \sigma_p$) wird ein kurzer, dicker Stab betrachtet. Weiterführende Informationen sind unter dem Stichwort „nichtelastisches Ausknicken nach TETMAJER“ zu finden.

Das Thema 'EULERSche Stabknickung' ist viel einfacher, als die Herleitung der Zusammenhänge erwarten ließ. Nachdem erkannt wurde, dass ein Stab axial auf Druck beansprucht wird, muss lediglich identifiziert werden, wie dieser Stab gelagert ist. Alle sinnvollen Vorkommnisse sind als EULER Fall eins bis vier katalogisiert.

Es gehört zu den Pflichtaufgaben einer Ingenieurin, eines Ingenieurs, einen Entwurf auf Stabknickung zu überprüfen und sicherzustellen, dass eine genügende Sicherheit gegen Knicken besteht. Hier sind reichliche Sicherheitsfaktoren angebracht. Wenn zu knapp kalkuliert wird, würde es genügen im ersten Stock eines Stahlskelett-Hochhauses mit dem Fuß aufzustampfen und das ganze Haus stürzt ein.

Ein furchtbarer Fall der EULERSchen Stabknickung fand am 11. September 2001 statt. Flugzeuge schlugen in die Twin-Towers ein. Zunächst hielt die Struktur. Das Gebäude ertrug die Zusatzlast eines ganzen Flugzeugs. Der Kerosinbrand erhitze die Stahlskelettstruktur. Die Spritzbetonummantelung des Stahls verzögerte den Vorgang ein wenig. Bei hohen Temperaturen wird der E -Modul des Stahls deutlich herabgesetzt. P_{krit} ist proportional zum E -Modul. Nach einer gewissen Zeit versagten die senkrecht stehenden Stahlprofile in dem Geschoss, in dem die Temperatur am höchsten war. Der obere Gebäudeteil fiel auf den Fußboden des kollabierten Geschosses. Zur statischen Last kamen dynamische Kraftüberhöhungen in erheblichem Ausmaß hinzu, so dass, Geschoss für Geschoss, das Gebäude in sich zusammensackte.

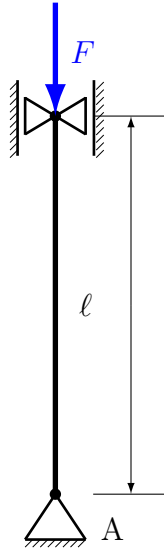
Mit dieser Geschichte endet die Vorlesungsreihe TM II. Ab jetzt gibt es nur noch ein paar Übungen zum Thema EULERSche Stabknickung. Daher wird es Zeit, Ihnen mitzuteilen, wie die Klausur aussehen wird. Es wird drei Rechenaufgaben geben.

1. Balkenbiegung, entweder Spannungsberechnung (gern mit MOHRschem Kreis) oder Verformungsrechnung,
2. Torsion, entweder Spannungsberechnung (gern mit MOHRschem Kreis) oder Verformungsrechnung,
3. EULERSche Stabknickung.

Hilfsmittel ist wieder ein legaler Pfuschzettel und ein Taschenrechner. Bringen Sie nach Möglichkeit eigenes Papier, Lineal und Zirkel mit.

7.2.1 Übungsaufgabe, einfache Stabknickung

Ein Stab wird gemäß Skizze durch die Kraft F beansprucht. Welchen Durchmesser d muss der Stab bei zweifacher Sicherheit gegen Knicken mindestens haben?



Gegeben $\ell = 2 \text{ m}$, $F = 10,3 \text{ kN}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $I = \frac{\pi d^4}{64}$.

Zusatzfrage: Welcher Durchmesser ist nötig bei einer Lagerung nach EULER Fall vier?

Lösung

$$\begin{aligned}
 \text{EULER Fall zwei} \quad P_{\text{krit}} &= \frac{\pi^2 E I}{\ell^2} \\
 \text{zweifache Sicherheit} \quad P_{\text{krit}} &> 2 F \\
 I \text{ eingesetzt} \quad \frac{\pi^3 E d^4}{64 \ell^2} &> 2 F \\
 \text{auflösen nach } d \quad d^4 &> \frac{128 F \ell^2}{\pi^3 E} \\
 \text{Wurzel ziehen} \quad d &> \sqrt[4]{\frac{128 F \ell^2}{\pi^3 E}} \\
 \text{Zahlenwerte} \quad d &> \sqrt[4]{\frac{128 \cdot 10,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6}{\pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} \text{ mm} \\
 d &> 30 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Zustatzfrage

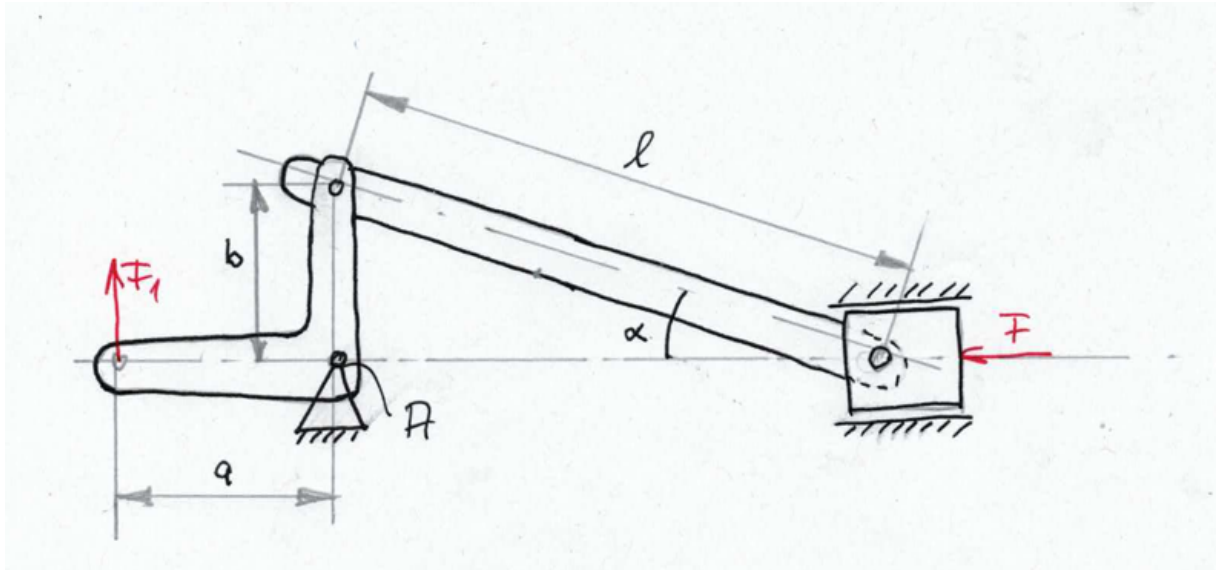
$$\begin{array}{ll}
\text{EULER fall vier} & P_{\text{krit}} = \frac{4 \pi^2 E I}{\ell^2} \\
\text{Wurzel ziehen} & d > \sqrt[4]{\frac{128 F \ell^2}{4 \pi^3 E}} \\
\text{Zahlenwerte} & d > \sqrt[4]{\frac{128 \cdot 10,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6}{4 \cdot \pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} \text{ mm} \\
& d > 21,2 \text{ mm}
\end{array}$$

Wir sehen, die Eulersche Stabknickung selbst ist sehr einfach. Üblicherweise wird das Umfeld künstlich erschwert. Rechnen Sie mit folgenden Gemeinheiten:

- Die Stablänge ist nicht direkt angegeben, sondern über ein rechtwinkliges Dreieck zu bestimmen.
- Es gibt zwei Stäbe und nur einer wird auf Druck beansprucht.
- Es gibt zwei Stäbe, beide sind auf Druck beansprucht, einer versagt eher als der andere, weil er eine größere Axialkraft hat oder weil er länger ist.
- Die Kraft im Stab ist nicht bekannt, sondern muss mittels KG und MG bestimmt werden.

7.2.2 Übungsaufgabe, Knickung eines Bremsgestänges

Wie groß darf die Kraft F_1 maximal werden, wenn für das skizzierte Bremsgestänge eine 10-fache Sicherheit gegen Knicken gefordert ist.

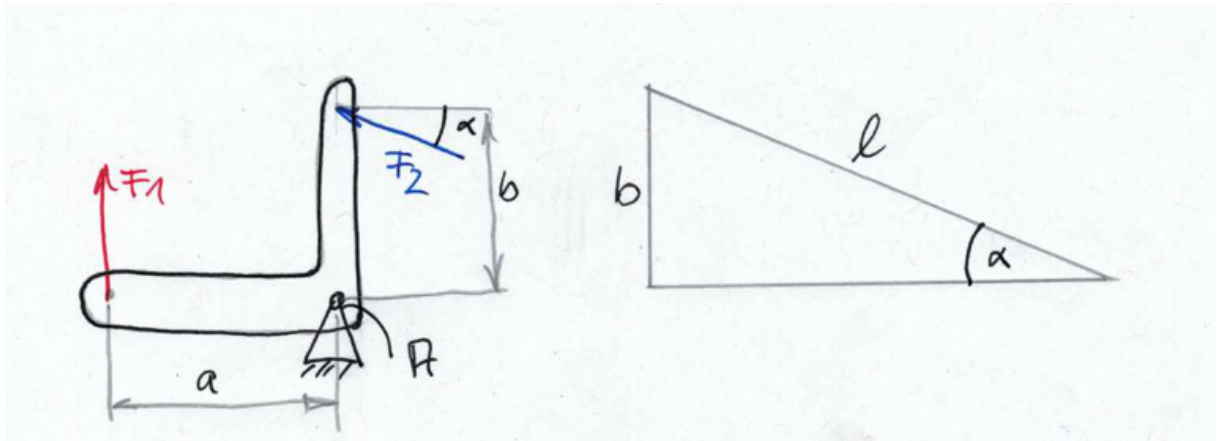


Gegeben: $\check{I} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $a = 150 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $\ell = 550 \text{ mm}$.

Lösung

Die tatsächliche Stabkraft sei F_2 genannt.

$$\begin{array}{ll} \text{EULER Fall zwei} & P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E \check{I}}{\ell^2} \\ \text{zehnfache Sicherheit} & P_{\text{krit}} > 10 F_2 \\ \text{Auflösen nach } F_2 & F_2 < \frac{\pi^2 E \check{I}}{10 \ell^2} \end{array}$$

Bestimmung von F_1 

Der Umlenkhebel braucht nicht vollständig freigeschnitten zu werden, wenn nur MG um A angesetzt wird. Dies ist zulässig, da die Lagerreaktionen in A nicht von Interesse sind.

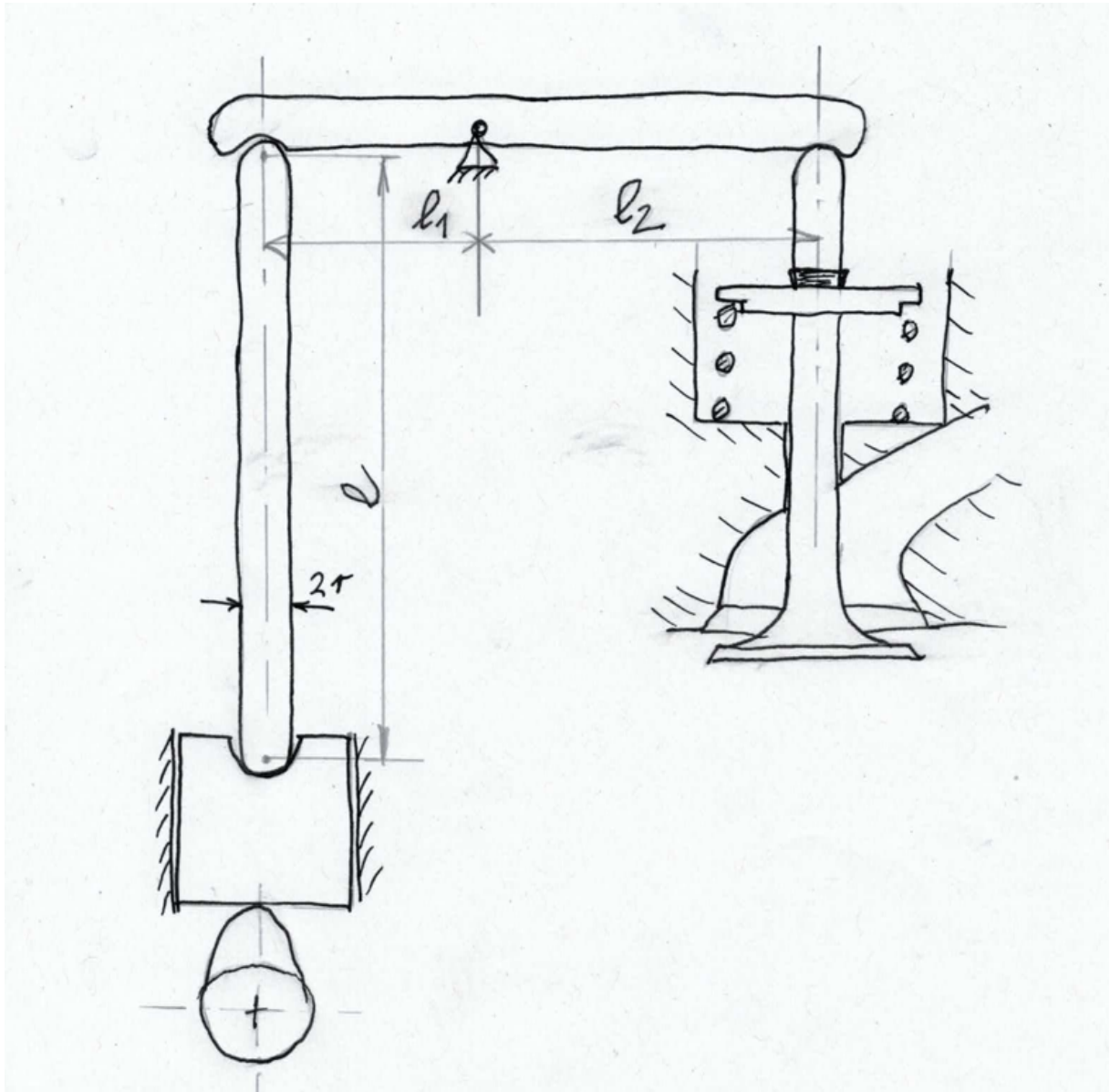
$$\begin{aligned}
 \text{MG um A} \quad \sum M_{[A]} &\equiv 0 = -F_1 a + F_2 \cos \alpha b \\
 \text{auflösen nach } F_1 \quad F_1 a &= F_2 \cos \alpha b \\
 F_1 &= F_2 \frac{b}{a} \cos \alpha \\
 \alpha \text{ bestimmen} \quad \alpha &= \arcsin \frac{b}{\ell} \\
 F_1 &= F_2 \frac{b}{a} \cos \left(\arcsin \frac{b}{\ell} \right) \\
 F_2 \text{ einsetzen} \quad F_1 &< \frac{\pi^2 E \check{I} b}{10 \ell^2 a} \cos \left(\arcsin \frac{b}{\ell} \right) \\
 F_1 &< 10,78 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Die unbekannte Kraft F am Hauptbremskolben interessiert niemanden, weshalb wir uns nicht die Mühe gemacht haben, sie auszurechnen. Den Mut muss man erstmal haben. Einige wären versucht gewesen, die Kraft F als Stabkraft zu benutzen. Das wäre falsch. Die Stabkraft (bei uns F_2) muss wirklich mit dem Stab fluchten.

Ein Bremsgestänge, das „wegeulert“ ist der Alptraum einer Ingenieurin, eines Autofahrers, einer Lokführerin, eines Entgegenkommers (unvollständig und ungerecht gegendert).

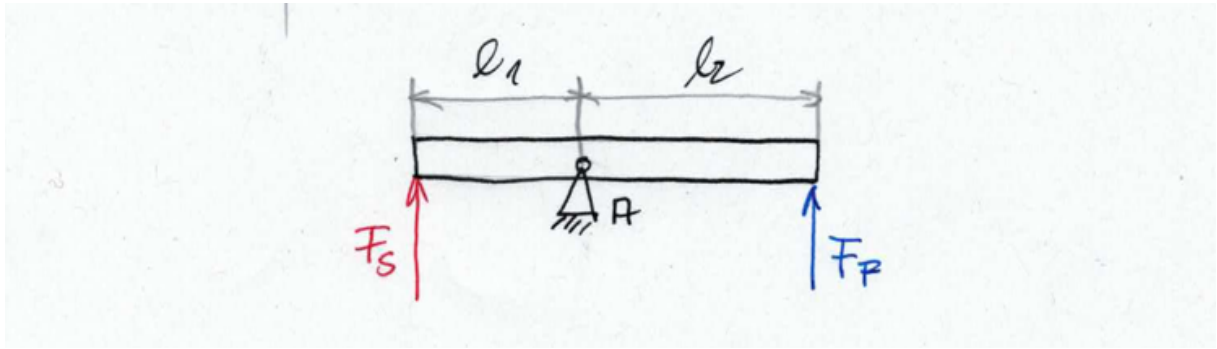
7.2.3 Übungsaufgabe, Knickung einer Stößelstange

Eine wievielfache Sicherheit gegen Knicken hat die skizzierte Stößelstange?



Gegeben: Maximale Federkraft = 1800 N, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\ell_1 = 30$ mm, $\ell_2 = 42$ mm, $\ell = 420$ mm, $r = 6$ mm.

Die maximale Federkraft sei F_F , die Kraft in der Stößelstange sei F_S



$$\text{MG um A} \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 = -F_S \ell_1 + F_F \ell_2$$

$$\text{Stabkraft} \quad F_S = F_F \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

$$\text{EULER Fall zwei} \quad P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

$$\text{Sicherheit gegen Knicken } s < \frac{P_{\text{krit}}}{F_S}$$

$$\text{Flächenträgheitsmoment} \quad I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (2r)^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$$

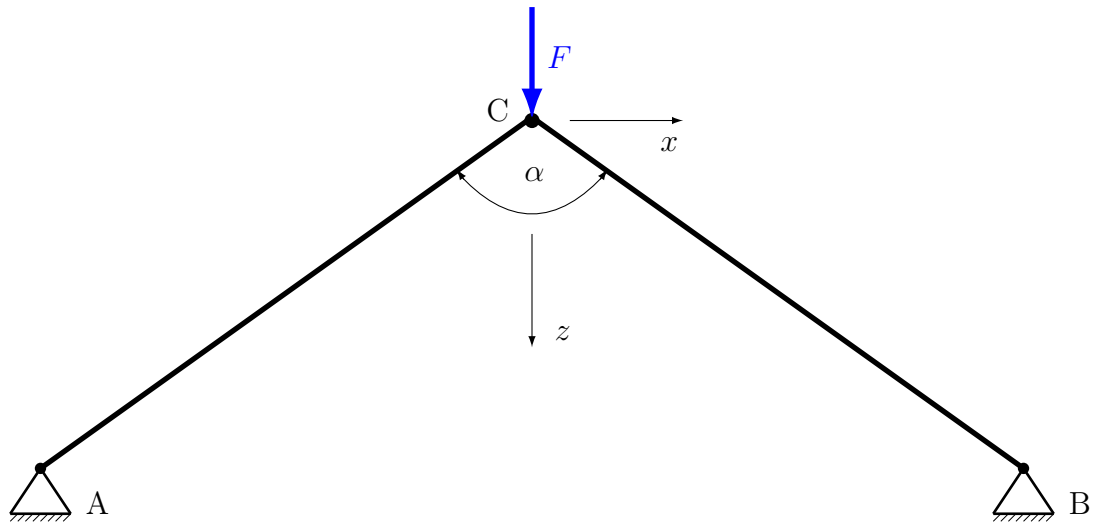
$$\text{alles einsetzen, nach } s \text{ auflösen} \quad s < \frac{\pi^3 E r^4 \ell_1}{4 \ell^2 F_F \ell_2}$$

$$\text{Zahlenwerte} \quad s < \frac{\pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6^4 \cdot 30}{4 \cdot 420^2 \cdot 1800 \cdot 42}$$

$$s < 4,75$$

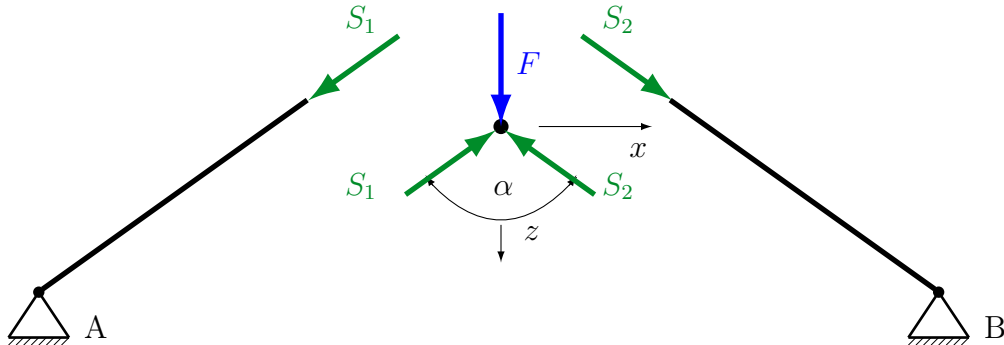
7.2.4 Übungsaufgabe, Knickung eines Dreigelenks

Gegeben ist das skizzierte, an drei Punkten gelenkig zusammengefügte, symmetrische Stabwerk (Pendelstützen!). Wie groß ist die Sicherheit gegen EULERSche Stabknickung? Beachten Sie, dass beide Stäbe die Länge ℓ haben.



Gegeben: $F = 1\,000\text{ N}$, $\alpha = 140^\circ$, $\ell = 2\text{ m}$, $\check{I} = 7\,700\text{ mm}^4$, $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$.

Um die Stabkräfte zu bestimmen, müssen wir uns an die Anfänge des ersten Semester erinnern. Wir haben ein zentrales Kräftesystem.



$$\begin{aligned} \text{Kräftegleichgewichte} \quad \sum X \equiv 0 &= S_1 \sin \frac{\alpha}{2} - S_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sum Z \equiv 0 &= F - S_1 \cos \frac{\alpha}{2} - S_2 \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\text{aus KG in } x\text{-Richtung folgt} \quad S_1 = S_2$$

$$\text{aus KG in } z\text{-Richtung folgt} \quad F = 2 S_1 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{bzw.} \quad S_1 = \frac{F}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Kontrolle mit Zahlenwerten} \quad S_1 = S_2 = 1\,462 \text{ N}$$

$$\text{EULER Fall zwei} \quad P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$$

$$\text{Kontrolle mit Zahlenwerten} \quad P_{\text{krit}} = 3\,990 \text{ N}$$

$$\text{Sicherheit gegen Knicken} \quad s_k < \frac{P_{\text{krit}}}{S_1} = \frac{2 \pi^2 E \check{I} \cos \frac{\alpha}{2}}{\ell^2 F}$$

$$\text{Zahlenwerte} \quad s_k < \frac{2 \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 7\,700 \cdot \cos 70^\circ}{2\,000^2 \cdot 1\,000}$$

$$\text{Sicherheit gegen Knicken} \quad s_k < 2,73$$

Diese Aufgabe war einmal Klausuraufgabe, sie war etwas zu leicht. Rechnen Sie damit, dass die Stäbe nicht gleich lang sind und dass nicht beide Stäbe auf Druck beansprucht werden. ■