Elektrotechnik Grundlagen

Joachim Venghaus*

8. September 2023

Inhaltsverzeichnis

*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund

Liebe Studierende,

Als grobe Orientierung gilt: Blauer Text kann sein Organisatorisches (wie jetzt) oder Hintergrundinformation oder einfach auch einmal „dumm Teuch“ zur Auflockerung. Schwarzer Text entspricht dem Tafelbild in Vorlesung oder Übung.

Zum Fach ET gehört auch ein Labor als Prüfungsvorleistung. Es gibt vier Versuche. Es gibt ein Skript das nacheinander die Theorie zu allen vier Versuchen beschreibt. Bei den Präsenzlaboren gelten folgende Regeln. Sie müssen sich gemäß Skript vorbereiten, es gibt einen Zugangstest und dann wird der Versuch durchgeführt. Das Protokoll wird handschriftlich während des Labors angefertigt (eines pro Laborgruppe). Nach 90 min sind Sie wieder raus und haben es hinter sich. Wer beim Zugangstest zu große Lücken hat, wird mündlich nachgeprüft. Wenn auch das die Lücken nicht schließt, dann kann der Versuch nicht gefahren werden. Er muss wiederholt werden. Aber es gibt nur einmal die Möglichkeit, zu wiederholen. Wer zweimal durchfällt, hat die Prüfungsvorleistung nicht erbracht und kann die Klausur nicht mitschreiben. Ein Jahr später gilt dann: Neues Spiel, neues Glück.

Damit sind wir bei der Semesterabschlussklausur. Sie wird fünf kurze Fragen aufweisen und drei Rechenaufgaben. Als Hilfsmittel sind erlaubt: Taschenrechner, das Skript „Übungsblock und Hilfsmittel“ komplett und ein Blatt A4 beidseitig beliebig beschriftet. Verboten sind: Laborskript, diese Vorlesungs- und Übungsskripte, Lehrbücher, Handys u.Ä. Sie sollten sich das Skript „Übungsblock und Hilfsmittel“ alsbald ausdrucken und es griffbereit vorhalten, jedoch nicht darin herummalen.

Jetzt fangen wir einfach an.

Elektrotechnik Grundlagen

1 Einleitung

Elektrotechnik ist die Anwendung

- elektrischer Ströme
- elektrischer Felder
- magnetischer Felder

Wir unterteilen in

- elektrische Energietechnik,
  d.h. Erzeugung, Übertragung und Wandelung elektrischer Energie. Darum werden wir uns kümmern.
- elektrische Informationstechnik,
  d.h. elektrische Energie dient als Informationsträger. Das überlassen wir den Bitknipsern.

Wir betrachten die Vorteile der elektrischen Energie

1. leichte Überführbarkeit in andere Energieformen
   - mechanische Arbeit,
   - Wärme,
   - Licht,
   - chemische Reaktionen
2. schnellster Informationsträger. Die Information bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit c[1] durch den Leiter (das Kabel).
3. Energietransport in ruhenden Anlagen. Das ist ein großer Vorteil im Vergleich zur Energieübertragung in mechanischen Systemen (Wellen, Riementriebe, Schubstangengetriebe). Auch chemische Energieübertragung ist mit erheblichen Masseströmen in Pipelines oder Tankschiffen/-lastwagen verbunden. Die Hochspannungsleitungen hingegen hängen einfach ruhig in der Landschaft.

[1] $c \approx 3,0 \cdot 10^8$ m/s

4. Elektrische Größen lassen sich leicht und genau messen. Ein Multimeter für 19,95 € als Aktionsware beim Discounter Ihres Vertrauens ist schon ein ziemlich präzises Instrument und gut angelegtes Geld für alle elektrischen Lebenslagen. Mein erstes Messgerät habe ich mir mit 12 Jahren gekauft, damals noch mit Zeiger. Es hätte mich beinahe umgebracht, da ich beim Messen die Daumen auf den Prüfspitzen hatte. 220 Volt nebenbei, der kleine Joachim hat da einen ziemlichen Satz gemacht. Warum ich überlebt habe, kommt gleich.

Nachteile der elektrischen Energie

1. Schlechte Speicherfähigkeit. Die elektrische Energie, die dem Stromnetz entnommen wird, muss zeitgleich bereitgestellt werden. Wenn Sie das Licht anmachen, muss ein Kraftwerke diesen zusätzlichen Bedarf sofort ausgleichen. Allenfalls Pumpspeicherkraftwerke (s. Wikipedia) können nennenswerte Mengen elektrischer Energie speichern. Akkus sind keine wirkliche Alternative. In einer vollgeladenen Autobatterie (54 Ah, 12 V) steckt so viel Energie, wie in 50 g Benzin.

2. Physiologische Wirkung, z.T. gefährlich. Es gibt drei Gefahren, wenn elektrischer Strom durch den menschlichen Körper fließt.

   a) Ein Strom von lediglich 30 mA auf einem Pfad durch das Herz kann dazu führen, dass das Herz nicht mehr normal schlägt und ins Kammerflimmern übergeht. Während eines kurzen Zeitfensters zwischen zwei Herzschlägen besteht diese Gefahr. Klassisch ist der beidhändige Stromunfall. Sofortiges Reanimieren mit AED ist erforderlich. Ich hatte also großes Glück.

   b) Unkontrollierte Muskelkontraktion. Manchmal führt das dazu, dass der zuckende Körper von der Spannungsquelle getrennt wird (gut), so war das bei mir. Sekundärunfälle in engen Räumen sind möglich (schlecht). Manchmal kann die verunfallte Person das spannungsführende Teil nicht mehr loslassen.

   c) Verbrennungen auf dem Strompfad. Bei Hochstromunfällen ohne Kammerflimmern oder mit überlebtem Kammerflimmern entstehen im Körperinneren entlang des Strompfads Verbrennungen insbesondere in den betroffenen Armen und Beinen. Da die Verbrennungsprodukte toxisch sind, muss bei starken Verbrennungen amputiert werden. Sichtbar sind nur flächig begrenzte Hautverbrennungen am Ein- und Austritt, die den Ernst der Lage nicht vermuten lassen.

   Kleinspannungen (DC unter 60 V) gelten als ungefährlich. Merke: Der Strom tötet aber die Spannung am Menschen (und der Hautwiderstand) bestimmen, wie groß der Strom durch den Körper sein wird.

2 Elektrischer Strom

ist eine gerichtete Bewegung von Ladungsträgern. Es gibt nur zwei Sorten von Ladungsträgern:

- Elektronen mit negativer Elementarladung,
- Protonen mit positiver Elementarladung.

Elementarladung

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As} = 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Elektrische Ladung hat demzufolge die Einheit As (Ampere[2]-Sekunde), es gilt
1 As = 1 C (Coulomb[3]), gesprochen kuloo.

Erstmals erleben wir eine furchtbare Unsitte der Elektrotechnik. Es kommen mit Ampere und Sekunde zwei SI-Basiseinheiten zusammen und schon wird aus dem elektrotechnischen Adelskalender eine geeignete Persönlichkeit ausgesucht, die stattdessen verwendet und geehrt wird. In der Mechanik passierte das nur zwei mal: Newton und Watt. In der Elektrotechnik passiert das ständig: Coulomb, Volt(a), Farad(ay), Henry, Tesla (nicht das Auto), Ohm, Siemens, Weber, Hertz. Um hier den Überblick zu bewahren, möchte ich Werbung für das Skript „Übungsblock und Hilfsmittel“ machen. Alle auftauchenden Formelzeichen und ihre Einheiten werden aufgelistet in der Reihenfolge des Erscheinens.

Elektrischer Strom in metallischen Leitern

Der Leiter, nicht die Leiter. Es handelt sich dabei um eine gerichtete Bewegung freier, nicht an den Atomkern gebundener Elektronen, wobei keine stoffliche Veränderung im metallischen Leiter erfolgt.

Metallatomkerne sind nicht sonderlich treu zu ihren äußeren Elektronen. Sie lassen sie ziehen und hoffen – zurecht, dass andere vorbeikommen, um die Lücken zu füllen. Nichtmetalle hingegen achten sorgfältig darauf, dass ihre Elektronen nicht fremdgehen. Daraus kann man dann Isolatoren herstellen: Kunststoffe, Glas, Keramik, Gummi.

[2] André-Marie Ampère, 1775 - 1836

[3] Charles Augustin de Coulomb, 1736 - 1806, auch in der Mechanik bekannt: Coulomb'sche oder trockene Reibung, $R = \mu N$

Elektrischer Strom in Elektrolyten

(Hier von untergeordneter Bedeutung) Elektrolyte sind Flüssigkeiten wie Säuren, Basen, Salzlösungen oder Salzschmelzen. Solche Flüssigkeiten dissoziieren, sie bilden positive und negative Ionen. Diese Ionen können sich bewegen. Bei Strom durch leitende Flüssigkeiten findet daher ein Materialtransport statt. Dies wird beim elektrochemischen Beschichten verwendet (Verchromen, Vernickeln, Vergolden . . .). Destilliertes Wasser ist hingegen nicht leitend.

Elektrischer Strom durch Gase

(Hier von untergeordneter Bedeutung) Gase sind nichtleitend. Unter bestimmten Bedingungen können sie leitend werden. Stoßionisation ist der dazugehörige Vorgang. Durch hohe Temperaturen oder durch starke elektrische Felder können Gasmoleküle ionisiert werden bzw. Elektronen können von ihren Atomkernen getrennt werden. Die nun beweglichen Ladungsträger ermöglichen den Stromfluss durch Gase.

Ein Gewitterblitz ist ein solches Phänomen. Gelegentlich entsteht durch statische Aufladung eine sehr große Spannung, die ein elektrisches Feld zur Folge hat. Bei trockenem Wetter und geeigneter Materialpaarung Fußboden-Schuhsohle bekommt man in Supermärkten an den Metallregalen elektrische Schläge. Wenn Sie das nächste mal so etwas erleben, machen Sie folgendes Experiment: Schlurfen Sie durch die Gänge, fassen den Einkaufswagen am Metallkorb an und nähern Sie sich einem Metallregal. Sie sehen dann – schmerzfrei übrigens – zwischen Einkaufswagen und Regal einen blauen Funken überspringen. Das ist Stromfluss durch Luft mittels Stoßionisation. Faustformel: 1 000 Volt durchschlagen 1 mm Luft. Was Sie auch ausprobieren können: Im Dunklen einen Fleece-Pullover ausziehen, indem am Kragen gezogen wird. Dabei die Augen offenhalten. Bei trockenem Wetter und frisch gewaschenen aber trockenen Haaren sieht man ein Feuerwerk im Pullover. Wer beim Aussteigen aus dem Auto regelmäßig einen gewischt bekommt, kann folgenden Trick anwenden: Vor dem Aussteigen den Türrahmen der offenen Tür anfassen und beim Aussteigen festhalten, so entsteht keine Aufladung. Wer geladen ist und den Funken zwischen zwei Metallteilen überspringen lässt, verspürt beim Entladen keinen Schmerz (das Auto mit einem Schlüssel antippen).

Positive Stromrichtung

Es gilt folgende Definition: Positive Ladungsträger laufen außerhalb der Spannungsquelle vom Plus- zum Minuspol. Das wird Technische Stromrichtung genannt.

Jetzt könnte folgende falsche Schlussfolgerung gezogen werden: Positive Ladungsträger laufen durch einen Draht mit Lichtgeschwindigkeit vom Plus- zum Minuspol einer Batterie – doppelt falsch.

Im metallischen Leiter sind ausschließlich Elektronen unterwegs, sie sind negativ geladen und wandern daher vom Minus- zum Pluspol, genau anders herum. Sie wandern auch nicht mit Lichtgeschwindigkeit, Einstein würde das nicht zulassen. Sie sind gerade mal mit Autobahntempo unterwegs. Und nun?

Beide Probleme lösen wir mit einem Streich. Stellen Sie sich eine Reihe von Leuten vor, die sich nebeneinander aufgestellt haben. Soldaten üben das häufig. Am linken Ende (Pluspol) bekommt die erste Person ein Signal, woraufhin sie einen Schritt nach links macht und sich dabei langsam bewegt. Die Person direkt rechts daneben bemerkt die neue Lücke und rückt auch nach links auf. So geht es weiter. Die Personen bewegen sich langsam, die Lücke jedoch kann sich schnell bewegen, denn ihre Geschwindigkeit hängt von der Reaktionsfähigkeit der Personen ab. So ist alles in bester Ordnung. Die Elektronen bewegen sich langsam gegen die technische Stromrichtung, die Lücke jedoch, die Information, wandert mit Lichtgeschwindigkeit in technischer Stromrichtung.

Stromstärke

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n\,e}{t} \tag{1}$$

Formeln mit Nummern sind in der Formelsammlung in „Übungsblock und Hilfsmittel“ aufgelistet.

Der Strom mit Formelzeichen I und der Einheit A (Ampere) ist also Ladung Q pro Zeit t. Wobei die Ladung Q immer ein ganzzahliges Vielfaches n der Elementarladung e ist.

2.0.1 Übungsaufgabe

Durch ein einadriges Kabel fließt ein Strom von 200 A. Wieviele freie Elektronen durchqueren in 5 Sekunden einen beliebigen Kabelquerschnitt?

Das ist ein durchaus realistisches Problem beim Anlassen eines Autos im Winter.

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n\,e}{t}$$

$$I = \frac{n\,e}{t}$$

$$n\,e = I\,t$$

$$n = \frac{I\,t}{e}$$

$$n = \frac{200 \cdot 5}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} \qquad \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{A\,s}} = 1$$

$$n = 6{,}2 \cdot 10^{21} \text{ Elektronen}$$

Bei einem Startvorgang, bei dem Sie fünf Sekunden orgeln müssen, setzen Sie eine unglaublich große Anzahl von Elektronen in Bewegung, 6,2 Trilliarden oder im englischen Sprachgebrauch 6,2 Sextillionen. Hier erkennen wir ein weiteres Drama der Elektrotechnik. Wir werden es mit extremen Zahlenwerten zu tun haben. In der Mechanik würden wir bei einem solchen Ergebnis zu recht vermuten, dass wir einen gewaltigen Bock geschossen haben. Hier müssen wir uns an solche Ergebnisse gewöhnen.

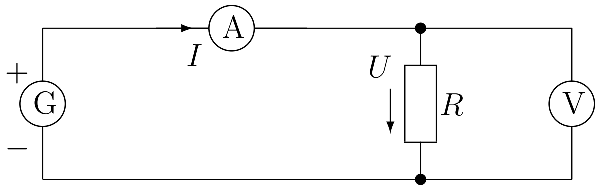
Sie gewöhnen sich bitte an die Eingabe von Zehnerexponenten in Taschenrechner mit Hilfe der Taste mittig in der untersten Tastenzeile $\boxed{\text{EXP}}$ oder $\boxed{\text{x}10^x}$. Wenn Sie Rechenergebnisse in Zehnerexponetendarstellung haben wollen, drücken Sie die Taste $\boxed{\text{ENG}}$. Sie liefert einen Zehnerexponenten, der durch drei teilbar ist.

Ende Übungsaufgabe

3 Elektrischer Gleichstromkreis

3.1 Spannung und Widerstand, Ohmsches Gesetz

Gegeben sei eine Gleichstromquelle G, ein Widerstand R sowie ein Strommessgerät A und ein Spannungsmessgerät V.



Wir sehen, der Strom fließt außerhalb der Spannungsquelle vom Plus- zum Minuspol. Dargestellt wird dies durch einen Pfeil auf der Leitung mit der Angabe I. Spannungen werden hingegen durch einen Pfeil neben einem Bauelement (hier R) angegeben. Das Formelzeichen für die Spannung lautet U. Bei einem Verbraucher zeigt der Spannungspfeil in Stromrichtung.

Der Strom ist abhängig vom Widerstand R und von der Spannung U.

$$R = \frac{U}{I} \qquad \text{OHMsches Gesetz} \tag{2}$$

Widerstände R haben die Einheit Ω (Ohm[4]), Spannungen U haben die Einheit V (Volt[5]).

Eines können Sie sich schon einmal merken. Egal wie die Frage in der Elektrotechnik lautet, die Antwort ist immer OHMsches Gesetz :-). Wie Sie dieses Gesetz in die richtige Form bringen, überlasse ich Ihnen. Etwas ehrenrührig aber praktikabel ist folgendes:

Sie schreiben die jeweils drei Größen in Dreiecksform an, Spitze oben

$$\frac{U}{R \quad I} \quad \text{Unsere Insel Rügen} \qquad \text{und später} \quad \frac{P}{U \quad I} \quad \text{P(F)UI}$$

Die gesuchte Größe wird durchgestrichen und mit einem Ist-gleich-Zeichen (=) davorgeschrieben.

[4]Georg Simon Ohm 1789 bis 1854
[5]Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta 1745 bis 1827

Das funktioniert auch hervorragend beim Berechnen von Fahrzeiten t, Geschwindigkeiten v oder Strecken s:

$$\frac{s}{t \quad v}$$ Der Satellitenempfänger (s) steht auf dem Fernseher (tv)

Das ist jetzt wirklich wie in der Klippschule.

Wovon hängt der Widerstand eines Bauteils oder Drahtes ab?

- Werkstoff
- Geometrie
- Temperatur
- Konzentration (bei Elektrolyten)

Für drahtförmige Leiter gilt

$$R = \varrho \frac{\ell}{A}. \tag{3}$$

mit

ϱ: (klein rho) Spezifischer elektrischer Widerstand in $\Omega \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \Omega\,\mathrm{m}$,

ℓ: Draghtlänge in m,

A: Drahtquerschnittsfläche in m^2.

Wichtig: Jedes Material hat noch ein anderes ϱ, die Dichte. Nicht verwechseln.

Einige Beispiele, alle Angaben in Ωm:

Silber	ϱ_{Ag}	$= 1,59 \cdot 10^{-8}$
Kupfer	ϱ_{Cu}	$= 1,79 \cdot 10^{-8}$
Gold	ϱ_{Au}	$= 2.21 \cdot 10^{-8}$
Aluminium	ϱ_{Al}	$= 2,86 \cdot 10^{-8}$
Eisen/Stahl	ϱ_{Fe}	$= 15,3 \cdot 10^{-8}$
Blei	ϱ_{Pb}	$= 20,8 \cdot 10^{-8}$
Edelstahl	ϱ_{V2A}	$= 72,0 \cdot 10^{-8}$

Kupfer hat das beste Preis-Leistungsverhältnis. Aluminium wird hingegen bei Hochspannungsleitungen verwendet. Die von den Masten zu tragenden Massen sind erheblich kleiner, die Materialkosten auch. Für sonstige Kabel ist Aluminium nicht zu empfehlen, da es unter Krafteinwirkung kriecht. Geklemmte Adern lockern sich mit der Zeit, wodurch der Übergangswiderstand an der Klemmstelle steigt. In der DDR waren aus Devisengründen Al-Kabel weit verbreitet. Viele Häuser sind wegen lockerer Kabel abgebrannt.

Leitwert

Wir werden feststellen, dass es sinnvoll sein kann, Kehrwerte von Widerständen einzuführen. Kundige ahnen schon, bei Parallelschaltungen von Widerständen kann das hilfreich sein. Wenn wir Wechselstromkreise berechnen, werden wir das auch machen.

Die Kehrwerte von Widerständen R werden Leitwerte G genannt.

$$G = \frac{1}{R}, \qquad \frac{1}{\Omega} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{S}\ (\text{Siemens}^{6})$$

Die Einheit Siemens fühlt sich an, wie ein genialer Marketingtrick. Stellen Sie sich vor, die Kapazität von Festplatten würde in Tera-Gates oder Tera-Apple angegeben (ich wäre dann für Tera-Linus). Im amerikansichen Sprachgebrauch wird Siemens meist nicht verwendet. Es wird auch nicht durch General Electric ersetzt; dort ist für den Leitwert G die Einheit „Mho“ und das Einheitensymbol ℧ gebräuchlich. Das wiederum ist schon wieder witzig.

[6] Ernst Werner Siemens, ab 1888 von Siemens, 1816 bis 1892

3.1.1 Übungsaufgabe

Welchen Gesamtwiderstand hat ein zweiadriges Verlängerungskabel von 50 m Länge und einem Aderquerschnitt von 1,5 mm^2 (Material Cu).

$$R = \varrho \frac{\ell}{A}$$

$$\varrho_{Cu} = 1,79 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$\ell = 2 \cdot 50\,\mathrm{m}$$

$$A = 1,5\,\mathrm{mm}^2 = 1,5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$R = \frac{1,79 \cdot 10^{-8} \cdot 100}{1,5 \cdot 10^{-6}} \qquad \frac{\Omega\,\mathrm{m}\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}^2}$$

$$R = 1,19\,\Omega$$

3.1.2 Übungsaufgabe

Um welchen Faktor k muss der Durchmesser eines Al - Kabels größer gewählt werden, damit sich der gleiche Ohm'sche Widerstand wie bei einem gleich langen Cu - Kabel einstellt?

$$\varrho_{Cu} = 1,79 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$\varrho_{Al} = 2,86 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$R = \varrho \frac{\ell}{A} = \varrho \frac{4\,\ell}{\pi d^2}$$

Die rechte Seite wird einmal für Al und einmal für Cu angeschrieben. Da beide Kabel den gleichen Widerstand haben soll, werden die rechten Seite gleichgesetzt.

$$\varrho_{Al}\,\frac{4\,\ell}{\pi d_{Al}^2} = \varrho_{Cu}\,\frac{4\,\ell}{\pi d_{Cu}^2}$$
$$\frac{\varrho_{Al}}{d_{Al}^2} = \frac{\varrho_{Cu}}{d_{Cu}^2}$$

Für k gilt

$$k = \frac{d_{Al}}{d_{Cu}}$$
$$k = \sqrt{\frac{\varrho_{Al}}{\varrho_{Cu}}}$$
$$k = \sqrt{\frac{2,86}{1,79}}$$
$$k = 1,26$$

Der Durchmesser des Aluminiumleisters muss um den Faktor 1,3 größer sein.

Ende Übungsaufgaben

3.2 Elektrische Arbeit und Leistung

Fließt ein Strom I durch einen Widerstand R verrichtet elektrische Energie Arbeit W. Der Widerstand wird dabei warm.

$$W = U\,I\,t \tag{4}$$

Wenn $U,\ I = \text{const.}$ gilt für die Leistung P

$$P = U\,I \tag{5}$$

Mit Hilfe des OHMschen Gesetz kann ergänzt werden

$$P = I^2\,R = \frac{I^2}{G} = \frac{U^2}{R} = U^2\,G$$

Die Einheit der Leistung P ist VA = W (Watt[7])

Die Einheit der Arbeit W ist V A s = Ws = J = Nm

Die Arbeit ist die frei konvertierbare Währung zwischen den Physik-Disziplinen Elektrotechnik (Ws, Watt-Sekunde), Thermodynamik (J, Joule) und Mechanik (Nm, Newton-Meter). Es gilt 1 Ws = 1 J = 1 Nm. Arbeit und Energie sind äquivalente Größen. Energie ist die Möglichkeit Arbeit zu verrichten.

Da 1 Ws eine sehr kleine Portion von Arbeit oder Energie darstellt, sind in der Elektrotechnik andere Einheiten gebräuchlich.

$$1\,\text{kWh} = 1\,000\,\text{Wh} = 3,6 \cdot 10^6\,\text{Ws}$$

Auf der Stromrechnung können Sie erkennen dass Ihnen Kilowattstunden (kWh) verkauft werden. Häufig finden Sie dort auch den sog. Arbeitspreis, z.B. 0,27 €/kWh. Das ist vollkommen korrekt, denn Sie kaufen Arbeit ein. Um ein Gefühl für die Arbeit zu entwickeln folgende Hausnummern: Ein Waschgang mit der Waschmaschine: 1 kWh, einmal Spülmaschine laufen lassen, auch 1 kWh. Einen RaspberryPi ein Jahr im Dauerbetrieb laufen lassen 10 kWh. Für eine Kilowattstunde stößt ein Steinkohlekraftwerk bis zu 1 100 g CO_2 aus. Meine Frau und ich verbrauchen in unserem Haus 2 000 kWh elektrische Energie im Jahr.

[7] James Watt, 1736 bis 1819

3.2.1 Übungsaufgabe

Ein Ölradiator mit einer Heizleistung von 2 kW wird an einer konstanten Spannung von 230 V betrieben.

Ges.:

a) Welcher Strom stellt sich ein?

b) Wie groß ist der Ohm'sche Widerstand?

a)

$$P = U\,I \qquad I = \frac{P}{U}$$

$$I = \frac{2\,000}{230} \quad \frac{\mathrm{V\,A}}{\mathrm{V}}$$

$$I = 8,7 \text{ A}$$

b)

$$P = U\,I, \qquad I = \frac{U}{R}$$

$$P = \frac{U^2}{R}, \qquad R = \frac{U^2}{P}$$

$$R = \frac{230^2}{2\,000} \quad \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V\,A}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$$

$$R = 26,45\ \Omega$$

3.2.2 Übungsaufgabe

Welchen Widerstand hat eine 55 W H4 - Lampe, die an 12 V betrieben wird unter Betriebsbedingung.

$$P = U\,I, \qquad I = \frac{U}{R}$$

$$P = \frac{U^2}{R}, \qquad R = \frac{U^2}{P}$$

$$R = \frac{12^2}{55} \quad \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V\,A}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$$

$$R = 2,62\ \Omega$$

Der Begriff H4-Lampe ist nicht jedem geläufig. Es handelt sich um die Zweifaden-Scheinwerferlampe eines Autos. Ein Glühfaden ist für das Abblendlicht, der andere für das Fernlich zuständig. H4 ist die Bezeichnung des Sockels. Übrigens: Vermeiden Sie den Begriff Glühbirne. Es gibt zwei Gründe. 1.) Es gibt kein elektrisches Obst. 2.) Glühlampen (so der korrekte Begriff) sind im Haushalt inzwischen verboten.

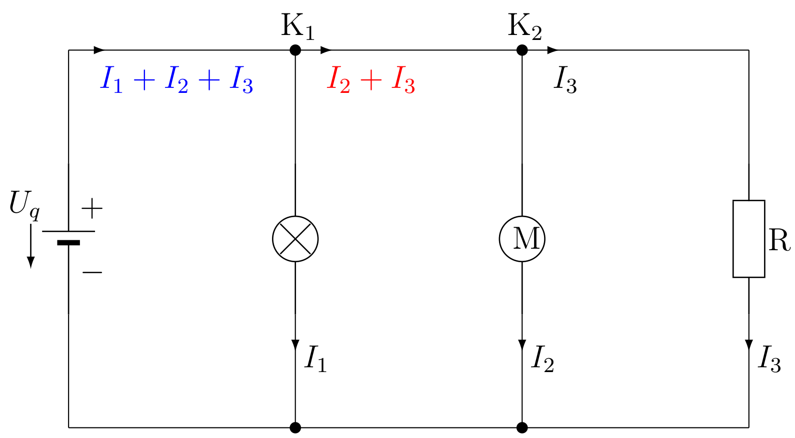
3.3 KIRCHHOFFsche Regeln

In der Mechanik kennen wir als Fundamentalansatz die Kräfte- und Momentengleichgewichte. In der Elektrotechnik entspricht dies den KIRCHHOFF[8]schen Regeln.

Wir sehen erneut die Unsitte mit den Eigennamen. Während wir in der Mechanik großen Einfluss auf das Aussehen der drei Gleichungen ($\sum X \equiv 0$, $\sum Y \equiv 0$, $\sum M_{[\mathrm{P}]} \equiv 0$) hatten, indem wir günstige Momentenbezugspunkte P wählten, sehen die Gleichungssysteme in der Elektrotechnik fast immer ungünstig aus. Wir werden die KIRCHHOFFschen Regeln kennenlernen, später aber, da wir Nebenfächler sind, Tricks kennenlernen, um die unhandlichen Gleichungssysteme zu umgehen. Ich gebe zu, das ist eine Vorgehensweise, vor der ich Sie in Mechanik immer gewarnt habe. Aber was interessiert mich mein Geschwätz von gestern.

Knotenregel

In einem Schaltplan sind Knoten Leitungsverzweigungen



Die Schaltelemente seien hier von links nach rechts erläutert:

1. Spannungsquelle, hier eine Zelle oder mehrere davon, man spricht dann von einer Batterie. Der längere Strich ist immer der Pluspol. Die bereitgestellte Spannung ist U_q (Quellenspannung).
2. Glühlampe
3. Elektromotor
4. allgemein ein Widerstand R

[8] Gustav Robert Kirchhoff 1824 bis 1887

Ströme werden als Pfeil auf der Leitung notiert, Spannungen als extra Pfeil neben dem Schaltelement

$$\sum I_{zu} = \sum I_{ab} \tag{6}$$

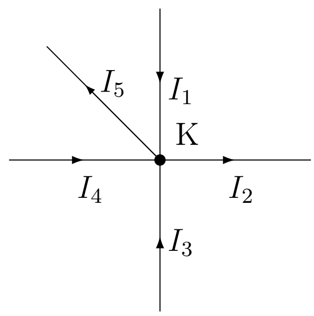
Die Summe der einem Knoten zufließenden Ströme ist gleich der Summe der aus einem Knoten abfließenden Ströme.

Wir wenden an auf den Knoten

$$\mathrm{K}_1: \qquad I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\mathrm{K}_2: \qquad I_2 + I_3 = I_2 + I_3$$

Nur durch die Wahl der farblich hervorgehobenen Strombezeichnungen sind die beiden Knotengleichungen recht banal. Hier soll das einfache Prinzip hervorgehoben werden.



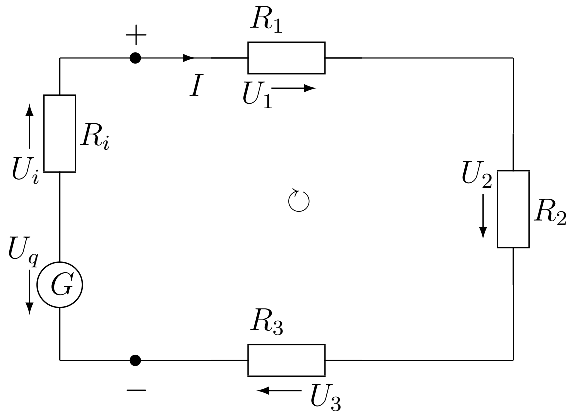
$$K: \qquad I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$$

Maschenregel

In einem Schaltplan werden an jedem Verbraucher (Widerstand) die an ihm abfallende Spannung angegeben. Hierbei ist eine Richtungskonvention zu beachten.

Verbraucher: Spannungspfeil zeigt in Stromrichtung

Quelle: (Batterie, Generator) Spannungspfeil zeigt gegen die Stromrichtung



$$\sum U = 0 \tag{7}$$

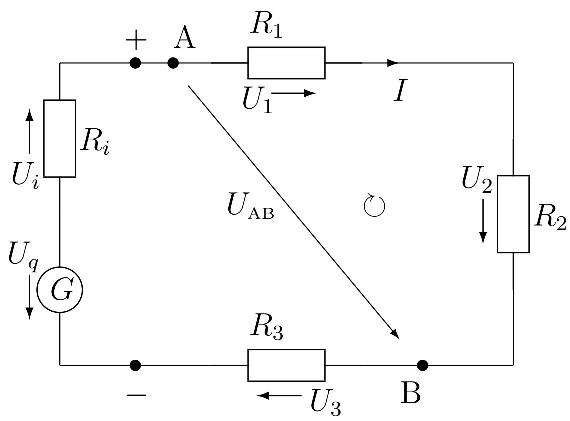
Vorgehensweise: Wahl eines beliebigen Umlaufsinnes (↻ oder ↺). Spannungen in Umlaufsinn addieren, Spannungen gegen den Umlaufsinn subtrahieren. Hier:

$$↻ \quad U_1 + U_2 + U_3 - U_q + U_i + = 0$$

Als Start-Ziel-Punkt sollte immer ein markanter aber natürlich beliebiger Punkt gewählt werden, so dass nichts vergessen und nichts doppelt berücksichtigt wird. Hier ist es der I-Pfeil.

Die Kennzeichnung von Plus- und Minuspol ist möglicherweise verwirrend. Reale Spannungsquellen haben in der Regel einen Innenwiderstand. Stellen Sie sich eine Autobatterie vor. Sie besteht aus einer idealen Spannungsquelle (Symbol G) und dem Innenwiderstand R_i. Beide zusammen bilden die Batterie. Die abgesetzten Punkte + und − sollen die Anschlüsse der Autobatterie darstellen.

Die Maschenregel ist auch für beliebige Teilspannungen anwendbar: Welche Spannung ligt zwischen den Punkten A und B?



$$U_2 - U_{\mathrm{AB}} + U_1 = 0, \qquad U_{\mathrm{AB}} = U_1 + U_2$$

Knoten- und Maschenregeln sind die Grundlage zur Berechnung von Strömen und Spannungen in elektrischen Stromkreisen. Strom- und Spannungspfeile müssen korrekt angetragen werden.

3.3.1 Übungsaufgabe

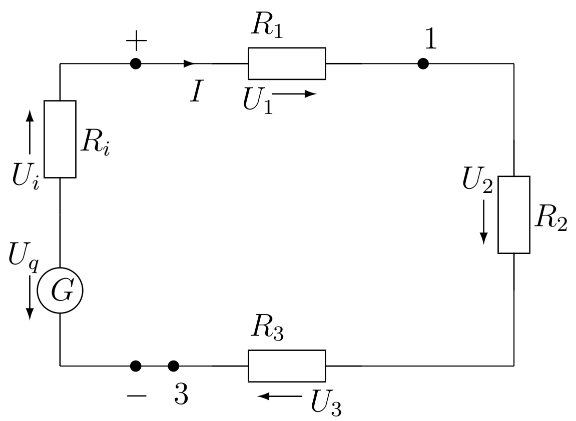
Gegeben ist ein Stromkreis mit $U_q = 12$ V, $U_i = 0,2$ V, $U_1 = 3$ V, $U_3 = 7$ V, $R_i = 0,5\ \Omega$.

Ges.:

a) U_2

b) Spannung zwischen den Punkten 1 und 3 (U_{13})

c) Welcher Strom I stellt sich ein



a) Maschengleichung

$$\sum U = 0$$

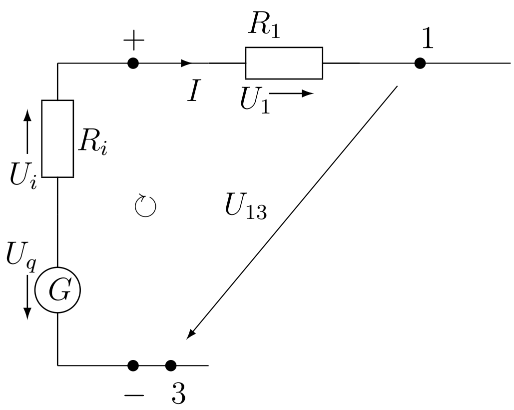
$$-U_q + U_i + U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

$$U_2 = U_q - U_i - U_1 - U_3$$

$$U_2 = (12 - 0,2 - 3 - 7)\ \text{V}$$

$$U_2 = 1,8\ \text{V}$$

b) Beliebig ausgewählte Masche (zwei Möglichkeiten) Aus taktischen gründen wird die linke Masche gewählt, so muss die selbst berechnete und damit fehleranfällige Spannung U_2 nicht verwendet werden.



$$-U_q + U_i + U_1 + U_{13} = 0$$

$$U_{13} = U_q - U_i - U_1$$

$$U_{13} = (12 - 0{,}2 - 3)\ \mathrm{V}$$

$$U_{13} = 8{,}8\ \mathrm{V}$$

c) Ohmsche Gesetz

Nur für U_i wird uns genannt, wie groß die Spannung und der Widerstand ist. Deshalb haben wir keine andere Wahl, als für dieses Element das Ohmsche Gesetz aufzustellen.

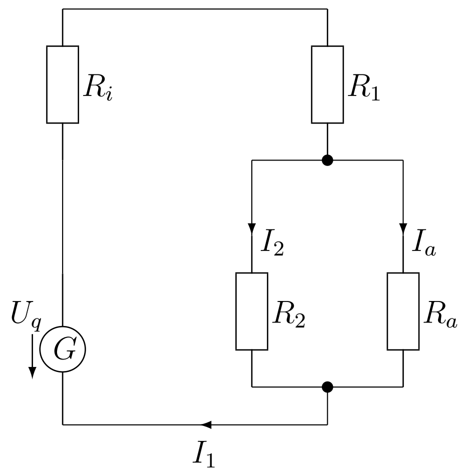
$$I = \frac{U}{R}; \qquad I = \frac{U_i}{R_i}$$

$$I = \frac{0{,}2\ \mathrm{V}}{0{,}5\ \Omega} \qquad \frac{\mathrm{V\,A}}{\mathrm{V}}$$

$$I = 0{,}4\ \mathrm{A} = 400\ \mathrm{mA}$$

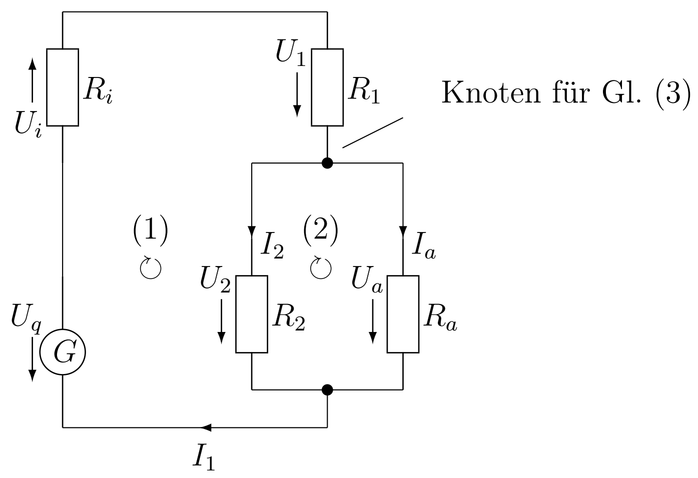
3.3.2 Übungsaufgabe

Geg.: $U_q = 12$ V, $R_i = 0,1\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_a = 15\ \Omega$.



Ges.: Wie groß ist I_a?

Dies ist ein Beispiel dafür, wie unangenehm die Gleichungssysteme aus den Kirchhoffschen Regeln werden. Nach der „orthodoxen“ Methode werden wir eine etwas handlichere Methode kennenlernen und diese Aufgabe ein zweites mal berechnen. Für uns Nebenfächler sei das gestattet. Zunächst die harte Tour. Wir bringen Spannungspfeile an und definieren die Maschen und Umlaufsinne, ferner suchen wir uns einen Knoten aus. Merke: Die Zahl der Knoten ist immer geradzahlig (Verzweigung und Vereinigung). Ein Knoten genügt bei einem solchen Pärchen.



Wir identifizieren zwei Maschen, definieren die Umlaufsinne und vermerken, dass diese Maschen die Gleichungen (1) und (2) erzeugen werden. Der obere Knoten liefert uns Gleichung (3).

$$-U_q + U_i + U_1 + U_2 = 0 \tag{1}$$

$$U_a - U_2 = 0 \tag{2}$$

$$I_1 = I_2 + I_a \tag{3}$$

Wir sehen zwei Gleichungen für Spannungen und eine für Ströme. Jetzt müssen wir uns entscheiden, wohin wir wollen. Die Aufgabe fragt nach I_a, also einem Strom. Daher werden wir mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes möglichst alle Spannungen U durch $I\,R$ ersetzen. Bei U_q gelingt uns dies nicht. Das macht nichts, da wir die Quellenspannung kennen (12 V).

$$-U_q + I_1\,R_i + I_1\,R_1 + I_2\,R_2 = 0 \tag{1}$$

$$I_a\,R_a - I_2\,R_2 = 0 \tag{2}$$

$$I_1 = I_2 + I_a \tag{3}$$

Wir markieren die unbekannten Größen. Das farbliche „unterkringeln“ wie an der Tafel gelingt mir hier nicht, weshalb die unbekannten Größen rot gefärbt werden

$$-U_q + {\color{red}I_1}\,R_i + {\color{red}I_1}\,R_1 + {\color{red}I_2}\,R_2 = 0 \tag{1}$$

$${\color{red}I_a}\,R_a - {\color{red}I_2}\,R_2 = 0 \tag{2}$$

$${\color{red}I_1} = {\color{red}I_2} + {\color{red}I_a} \tag{3}$$

Wie schön war doch die Mechanik. Beim Momentengleichgewicht hatten wir es in der Hand, häufig gab es dort nur eine Unbekannte. Hier haben wir uns die Höchststrafe eingehandelt.

Strategie:

i) Gleichung (2) nach I_2 auflösen.

ii) I_2 in Gleichung (1) einsetzen, nach I_1 auflösen.

iii) I_1 und I_2 in Gleichung (3) einsetzen und nach I_a auflösen, fertig.

i)

$$I_2 = I_a \frac{R_a}{R_2}$$

ii)

$$-U_q + I_1\,R_i + I_1\,R_1 + I_a\,\frac{R_a}{R_2}\,R_2 = 0$$

$$-U_q + I_1\,(R_i + R_1) + I_a\,R_a = 0$$

nach I_1 auflösen

$$I_1\,(R_i + R_1) = U_q - I_a\,R_a$$

$$I_1 = \frac{U_q - I_a\,R_a}{R_i + R_1}$$

iii)

$$\frac{U_q - I_a\,R_a}{R_i + R_1} = I_a\,\frac{R_a}{R_2} + I_a$$

alles mit I_a auf die linke Seite

$$I_a \left(1 + \frac{R_a}{R_2} + \frac{R_a}{R_i + R_1}\right) = \frac{U_q}{R_i + R_1}$$

$$I_a = \frac{U_q}{(R_i + R_1)\left(1 + \frac{R_a}{R_2} + \frac{R_a}{R_i+R_1}\right)}$$

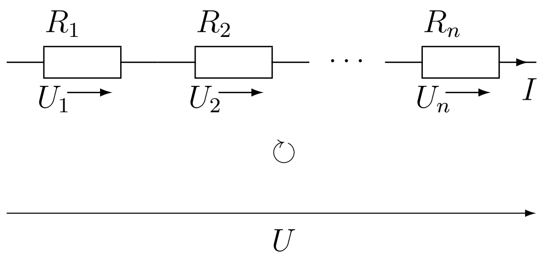
$$I_a = 0{,}37\ \mathrm{A} = 370\ \mathrm{mA}$$

In der Vorlesung wollen wir jetzt Reihen- und Parallelschaltungen von Widerständen kennenlernen. Mit dieser Kenntnis kümmern wir uns erneut um diese Aufgabe und werden feststellen, dass das erheblich einfacher angegangen werden kann.

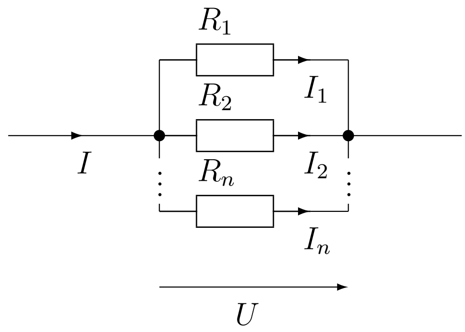
3.4 Widerstandsschaltungen

Unser Ziel ist die Reduktion von Widerstandsschaltungen auf äquivalente Ersatzwiderstände. Wir erkennen zwei Muster.

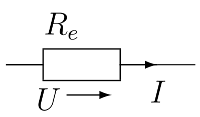
Reihenschaltung



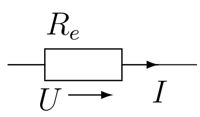
Parallelschaltung



Zu ersetzen durch



Merkmal: Alle Widerstände werden vom gleichen Strom durchflossen.



Merkmal: Alle Widerstände liegen an der selben Spannung an.

Maschenregel

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$U_1 = I\,R_1; \quad U_2 = I\,R_2; \quad U_n = I\,R_n.$$

$$U = I\,(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$$

$$U = I\,R_e$$

$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{8}$$

Knotenregel

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}; \quad I_n = \frac{U}{R_n}.$$

$$I = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)$$

$$I = \frac{U}{R_e}$$

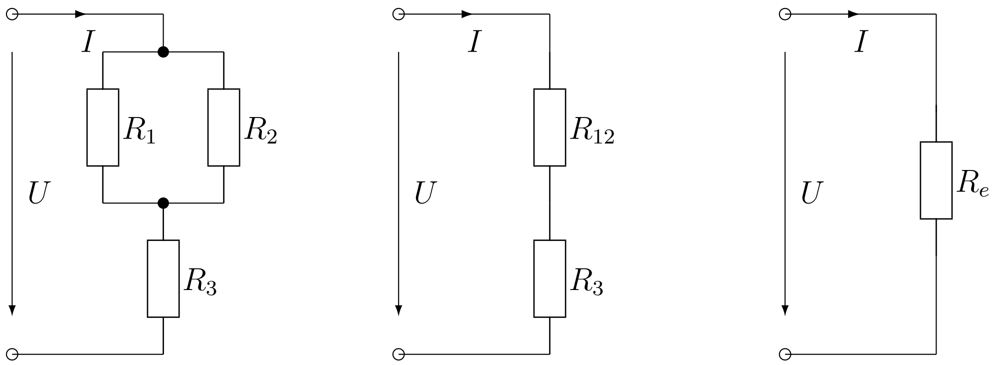
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{9}$$

oder mit Leitwerten

$$G_e = \sum_{i=1}^{n} G_i, \qquad G = \frac{1}{R}$$

Zusammengesetzte Schaltungen

Die Berechnung des Ersatzwiderstands kann durch die Kombination von Reihen- und Parallelschaltungen erfolgen.



Übrigens

1. Der Ersatzwiderstand R_e einer Parallelschaltung aus zwei Widerständen $R_1,\ R_2$ lässt sich sehr elegant wie folgt berechnen:

$$R_e = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} \tag{10}$$

2. Der Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung ist immer kleiner als der kleinste der beteiligten Widerstände.

Symbolische Schreibweise

Eine symbolische Schreibweise bietet sich für die Beschreibung zusammengesetzter Schaltungen an. Das Symbol „+“ beschreibt eine Reihenschaltung, das Symbol „ $||$ “ eine Parallelschaltung. Voriges Beispiel könnte durch folgende symbolische Gleichung beschrieben werden:

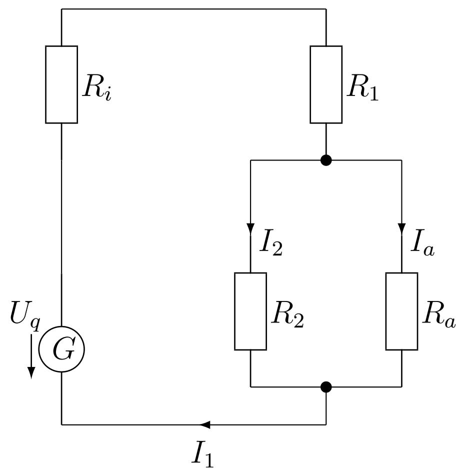
$$R_e = (R_1 \,||\, R_2) + R_3$$

Die Parallelschaltung $R_1 \,||\, R_2$ steht in Klammern, da sie zunächst berechnet werden muss. Jedes Symbol „ $||$ “ wird jeweils durch Gleichung (10) ersetzt. Demzufolge gilt für die vorige Schaltung die algebraische Gleichung

$$R_e = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} + R_3.$$

3.3.2 Gleiche Übungsaufgabe, zweite Variante

Geg.: $U_q = 12$ V, $R_i = 0,1\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_a = 15\ \Omega$.



Ges.: Wie groß ist I_a?

Zunächst berechnen wir den Strom I_1, indem wir alle Widerstände zu einem Gesamtwiderstand R_{ges} zusammenfassen.

$$I_1 = \frac{U_q}{R_{\text{ges}}}$$

$$R_{\text{ges}} = R_i + R_1 + (R_2 \,||\, R_a)$$

$$I_1 = \frac{U_q}{R_i + R_1 + \frac{R_2\,R_a}{R_2+R_a}}$$

$$I_1 = 0,64 \text{ A}$$

Um I_a zu bestimmen, brauchen wir die Spannung, die an R_a anliegt, nennen wir sie U_{2a}. Warum dieser komische Name? Es ist die Spannung, an der nicht nur R_a sondern auch R_2 anliegt (Parallelschaltung). Hierzu benötigen wir den Ersatzwiderstand R_{2a} der Parallelschaltung

$$R_{2a} = R_2 \,||\, R_a$$

$$R_{2a} = \frac{R_2\, R_a}{R_2 + R_a}$$

Durch den Ersatzwiderstand R_{2a} fließt der schon bekannte Strom I_1, so dass gilt:

$$U_{2a} = I_1\, R_{2a} = I_1\, \frac{R_2\, R_a}{R_2 + R_a}$$

$$U_{2a} = 5,51 \text{ V}$$

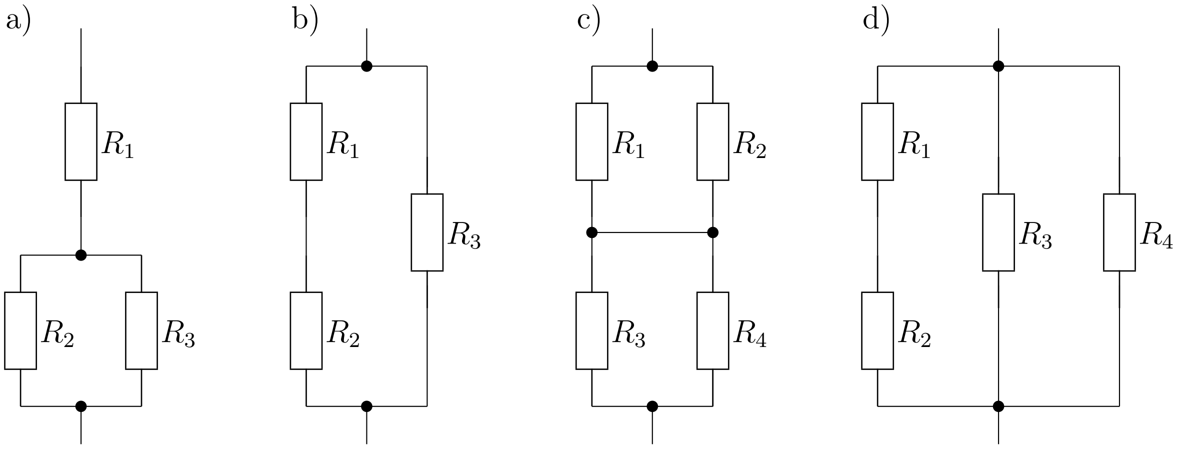
$$I_a = \frac{U_{2a}}{R_a}$$

$$I_a = 0,37 \text{ A}.$$

Diese Vorgehensweise sollten Sie ausführlich üben. Sie kommt in der Klausur dran.

3.4.1 Übungsaufgabe

Berechnen Sie die Gesamtwiderstände der nachfolgenden Schaltungen:
$R_1 = 56\ \Omega$, $R_2 = 33\ \Omega$, $R_3 = 68\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$,



a)

$$R_{\text{ges}} = R_1 + (R_2 \,||\, R_3)$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{\text{ges}} = 78,22\ \Omega$$

b)

$$R_{\text{ges}} = (R_1 + R_2) \,||\, R_3$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{(R_1 + R_2)\,R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{\text{ges}} = 38,55\ \Omega$$

c)

$$R_{\text{ges}} = (R_1 \,||\, R_2) + (R_3 \,||\, R_4)$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3\,R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{\text{ges}} = 61,24\ \Omega$$

d)

$$R_{\text{ges}} = (R_1 + R_2) \,||\, R_3 \,||\, R_4$$

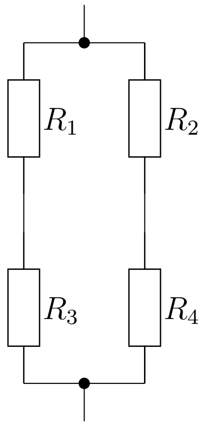
Berechnung mittels Leitwert G

$$G_{\text{ges}} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$G_{\text{ges}} = 3,59 \cdot 10^{-2}\ \text{S}$$

$$R_{\text{ges}} = 27,82\ \Omega$$

Zusatzaufgabe: c) ohne Querverbindung



$$R_{\text{ges}} = (R_1 + R_3) \,||\, (R_2 + R_4)$$

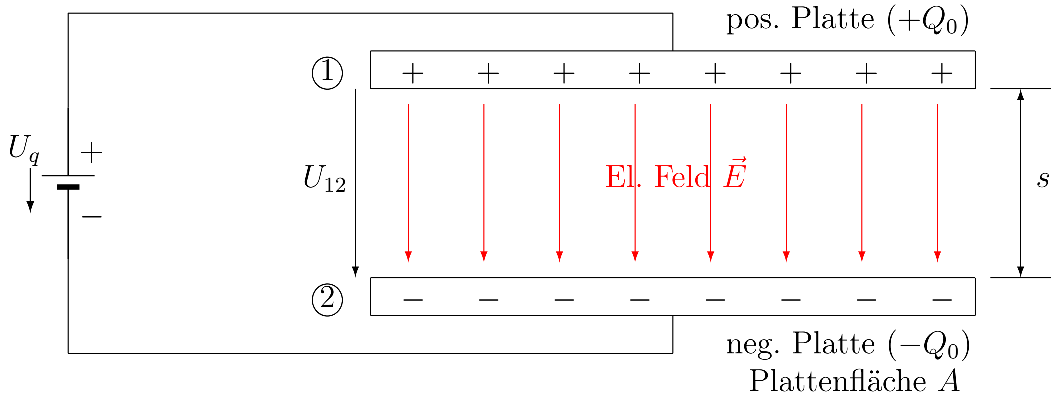
$$R_{\text{ges}} = \frac{(R_1 + R_3)\,(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_2 + R_4}$$

$$R_{\text{ges}} = 64,17\ \Omega$$

In der Klausur wird eine Kombination der Aufgaben 3.3.2 und 3.4.1 erscheinen. Spannungsquelle und Innenwiderstand aus 3.3.2 bleiben links unverändert, auf der rechten Seite erscheint dann aus 3.4.1 Schaltung a), b), c) oder d). Gesucht ist der Gesamtstrom und ein Strom durch einen der Widerstände. Beispiel: Fall c) Strom I_{ges} und I_4 berechnen. Bitte üben Sie diese Varianten. Das müssen Ihre sicheren 5 Punkte werden.

4 Das elektrische Feld

4.1 Der Kondensator



Zwischen den Kondensatorplatten aus elektrisch leitendem Material, an die eine Spannungsquelle angeschlossen ist, entsteht das elektrische Feld, beschrieben durch den Feldvektor $\vec{E}$. Anders als ein Kraftvektor hat ein Feldvektor keinen festen Angriffspunkt. Innerhalb eines bestimmten Raums, hier zwischen den beiden Kondensatorplatten ist die Feldwirkung überall. Die roten Pfeile sind daher nur ein Symbol dafür, dass eine Feldwirkung vorliegt.

Stellen wir uns ein Feld vor, das wir spüren können, das Gravitationsfeld. Die Feldwirkung spüren wir, da wir eine physikalische Eigenschaft haben, die mit der Feldwirkung interagiert, wir haben eine Masse. Wir stehen auf dem Fußboden in einem Wald aus roten Pfeilen, der das Gravitationsfeld symbolisiert. Egal wo wir stehen, wir spüren die Gravitation, auch wenn wir auf eine Leiter steigen.

Zurück zum Kondensator. Durch das Anlegen einer Spannungsquelle sammeln sich an der am Minuspol angeschlossenen Platte mehr Elektronen an, als dort hingehören. Daher ist sie negativ geladen $(-Q_0)$. An der am Pluspol angeschlossenen Platte fehlen entsprechend Elektronen, die positive Ladung der unbeweglichen Protonen überwiegt hier $(+Q_0)$

Zwei geometrische Angaben müssen noch geklärt werden. Der lichte Abstand zwischen den Platten ist der Plattenabstand s. Bei der Plattenfläche A könnte man ins Grübeln geraten, da wir zwei Platten haben und jede hat noch eine innere und eine äußere Oberfläche. Die Plattenfläche A ist wie folgt definiert: Es ist eine Oberfläche einer Platte.

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$U_q = U_{12} = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Dieses Integral kann beliebig kompliziert werden. Wir haben hier aber sehr geordnete Verhältnisse. Der Abstandsvektor $\vec{s}$ und die Feldvektoren $\vec{E}$ liegen parallel und die Feldwirkung im Inneren des Kondensators ist überall gleich. So etwas nennt man ein homogenes Feld. Obige Gleichung wir dann sehr viel angenehmer.

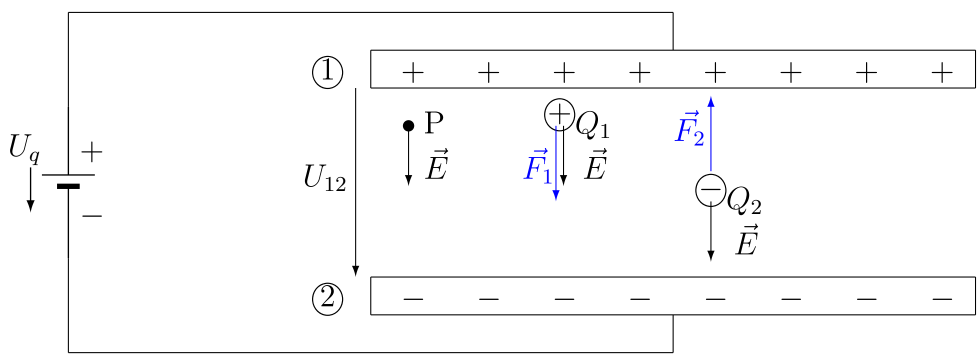
Bei homogenem Feld gilt:

$$U = E\,s \tag{11}$$

mit E, $\vec{E}$: Elektrische Feldstärke mit der Einheit $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ (Volt pro Meter)[9].

Jetzt wollen wir uns um die Feldwirkung kümmern. Wir können sie übrigens nicht spüren, da wir nicht die richtige physikalische Eigenschaft haben. Wir sind nämlich nicht geladen, jedenfalls nicht in elektrotechnischem Sinne.

Befindet sich im elektrischen Feld eine isolierte positive oder negative Ladung Q (das ist eine andere Ladung als die $\pm Q_0$ auf den Platten), so wirkt eine Kraft auf diese Ladung.



Der Feldvektor wirkt an jedem beliebigen Ort P, also auch an den Ladungen Q_1 und Q_2. Die Kraft berechnet sich zu:

$$\vec{F} = Q\,\vec{E}. \quad \text{Einheiten:} \quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{A\,s}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A\,s\,m^2\,kg}}{\mathrm{m\,s^3\,A}} \tag{12}$$

[9]Welch ein Wunder, für Volt pro Meter wird kein Eigenname vergeben.

Merke: Bei einer positiven Ladung wirkt die Kraft in Feldrichtung (hier Q_1) und umgekehrt.

Dank der komplizierten Definiton des Volt

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3\,\mathrm{A}}$$

gelingt uns der Sprung von elektrischen Einheiten zu mechanischen Einheiten.

Zwischen der auf den Platten angeordneten Ladung Q eines Kondensators und der angelegten Spannung U besteht folgender Zusammenhang

$$Q = C\,U \tag{13}$$

Mit C: Kapazität des Kondensators, Einheit Farad[10], 1 F= 1 $\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}}$

Die Aussprache von Farad ist nicht wie bei Fahrrad sondern ähnelt der Aussprache von Verrat mit Betonung auf der zweiten Silbe.

Vorsicht: Die in dieser Gleichung erscheinende Ladung Q war bis vor kurzem noch Q_0. Die Spannung U hier war vor kurzem noch U_{12}. Wir wollen eine allgemeine Gleichung haben, unabhängig von den gerade verwendeten Indizes.

Die Kapazität ist von der Geometrie des Kondensators und vom Isolierstoff zwischen den Kondensatorplatten, dem Dielektrikum abhängig. Aussprache: di-Elektrikum. Das elektrisch irgendwie wirksame aber nichtleitende Zeug dazwischen (di).

$$C = \frac{\varepsilon\,A}{s} \tag{14}$$

Mit

$A :$ Fläche einer Kondensatorplattenoberfläche in m^2,

$s :$ Plattenabstand in m

$\varepsilon :$ Dielektrizitätskonstante

Letztere wird genauer beschrieben.

$$\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$$

Mit

$\varepsilon_0 :$ elektrische Feldkonstante, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ (Farad pro Meter), eine Naturkonstante,

[10] Michael Faraday 1791 bis 1867

ε_r : Dielektrizitätszahl (keine Einheit), stoffabhängig

Einige Beispiele für die Dielektrizitätszahl

Isolierstoff	ε_r [1]
Vakuum (Referenz)	1
Luft	≈ 1
Polystyrol (PS)	2,5
Polyvinylchlorid (PVC)	5
Spezialkeramiken	$5 \cdots 10^4$

Reale Kondensatoren werden z.B. als Rollkondensatoren ausgeführt. Zwei dünne Aluminiumfolien und zwei ebenfalls dünne PVC-Folie werden wechselweise übereinander gelegt und aufgerollt. Große Flächen, kleine Abstände und große Dielektrizitätszahlen führen zu Kondensatoren mit hoher Kapazität = Fassungsvermögen für Ladungen bei einer bestimmten Spannung.

Die Studierenden, die wissen wie rum man einen Lötkolben anfasst, haben evtl. schon einmal einen Keramikkondensatoren verbaut. Das Rätsel dürfte nun geklärt sein.

Ein anderer Begriff in diesem Zusammenhang ist Tantalkondensator. Ohne diese sehr kleinen Kondensatoren mit großer Kapazität gäbe es keine Mobiltelefone. Tantal ist ein leider recht seltenes Metall, das eine besondere Eigenschaft hat. Es bildet eine stabile Oxidschicht aus Tantalpentoxid, die nichtleitend ist und ein hohes ε_r hat (25). Kleinste Tantalflocken (denken Sie an tausendfach größere Cornflakes) werden zu einem Sinterkörper verpresst und gebacken und bilden einen porösen Körper – die eine Kondensatorplatte. Für sein Volumen hat dieser Körper auch im Inneren eine sehr große Fläche. Der Isolierstoff wird elektrochemisch hergestellt oder formiert – die Oxidschicht. Sie ist extrem dünn. Fehlt nur noch die zweite Platte. Dazu wird der Sinterkörper mit einer elektrisch leitenden Flüssigkeit getränkt, einem Elektrolyt. Wenn jetzt noch Anschlüsse vorhanden sind, ist der Kondensator fertig. Alle Elektrolytkondensatoren haben an ihren Anschlüssen Bezeichnungen $+$ und $-$. Sie müssen mit der richtigen Polarität verbaut werden. Werden sie falsch herum eingebaut, sind sie sofort kaputt, weil die Oxidschicht elektrochemisch aufgelöst wird – Kurzschluss. In Elektronikspielzeug die Batterien falsch herum einzulegen ist keine gute Idee.

Es wird schnell langweilig, Kondensatoren an Gleichspannungen zu betreiben. Sie werden aufgeladen und lassen keinen Strom durch, weil die beiden Platten voneinander isoliert sind. Mehr passiert nicht. Interessant wird es, wenn die Spannung, die an einem Kondensator anliegt, zeitveränderlich ist. Sie ahnen, wo die Reise hingeht – richtig – Wechselspannung. Für zeitveränderliche Größen gibt es in der Elektrotechnik eine Konvention, die leider nicht immer durchgehalten wir. Konstante Größen: Formelzeichen als Großbuchstabe, zeitveränderliche Größe: Kleinbuchstabe.

Auch bei zeitveränderlichen Spannungen oder Ladungen gilt

$$q = C\,u$$

Wenn sich aber die Ladung auf den Kondensatorplatten ändert ($\mathrm{d}q$) muss ein zeitveränderlicher Strom i fließen.

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$$

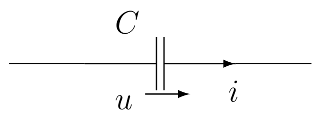
Für alle Fälle: Der Punkt auf $\dot{q}$ ist die Kurzschrift für Ableitung nach der Zeit t. So wie das Symbol $f'(x)$ für Ableitung nach x steht.

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator lautet

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{oder} \qquad u = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t.$$

Das ist gar keine gute Nachricht. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Widerstand wird durch das Ohmsche Gesetz beschrieben. Damit kann man gut umgehen. Aber das hier – oh je. Wir lassen das erst einmal sacken und erfinden ein Schaltzeichen.

Schaltzeichen eines Kondensators



Zu einem späteren Zeitpunkt, wenn wir erfahren haben, wie Strom industriell hergestellt wird, werden wir wissen, dass Ströme i und Spannungen u sinusförmig verlaufen. Das Integrieren und Differenzieren wird damit ja wohl zu schaffen sein. Aus Sinus wird Kosinus und umgekehrt. In der Hälfte der Fälle kippt ein Vorzeichen.

4.1.1 Übungsaufgabe

Ein Kondensator wurde aus zwei Metallplatten mit den Maßen 20 cm x 40 cm gebaut. Zwischen den Platten befindet sich eine PVC Folie mit 0,1 mm Dicke. Der Kondensator liegt an einer Spannung von 100 V.

Ges.:

a) Die Kapazität des Kondensators,

b) die Elektrische Feldstärke im Kondensator,

c) die Ladung des Kondensators,

d) die Kraft, die auf ein Elektron im Inneren des Kondensators wirkt. Wie ist die Orientierung der Kraft?

a)

$$C = \frac{\varepsilon\, A}{s}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$$

$$\varepsilon_r = 5 \qquad \text{für PVC}$$

$$A = 0,2 \cdot 0,4\ \mathrm{m}^2$$

$$s = 1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

$$C = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 5}{1 \cdot 10^{-4}}\ \frac{\mathrm{F\,m}^2}{\mathrm{m\ m}}$$

$$C = 3,54 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{F} = 35,4\ \mathrm{nF}.$$

An dieser Stelle sei ein wichtiger Einschub eingefügt.

Tausender-Vorsilben

Wir kennen die Maßangaben Megawatt, Kilogramm, Millibar, Mikrometer usw. Diese sind ganz praktisch, bis wir sie in einen Taschenrechner eingeben müssen. Hierzu ist die Verwendung von Zehnerpotenzen empfehlenswert, ansonsten verzählen wir uns zu leicht bei den Nullen. Eine Übersicht:

Tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
Giga	G	10^{9}	1 000 000 000
Mega	M	10^{6}	1 000 000
kilo	k	10^{3}	1 000
hekto	h	10^{2}	100
deka	da	10^{1}	10
—	–	10^{0}	1
dezi	d	10^{-1}	0,1
centi	c	10^{-2}	0,01
milli	m	10^{-3}	0,00 1
micro	μ	10^{-6}	0,00 000 1
nano	n	10^{-9}	0,00 000 000 1
pico	p	10^{-12}	0,00 000 000 000 1

Bitte gewöhnen Sie sich die Schreibweise mit Zehnerexponenten an. Die Taschenrechnertaste $\boxed{\text{ENG}}$ hilft Ihnen dabei ungemein. Sie erzeugt Ergebnisse mit Zehnerexponenten, die durch 3 teilbar sind. Das passt genau zu obigem Schema. Gerade in der Elektrotechnik mit den extrem kleinen und extrem großen Zahlenwerten ist es unverzichtbar diese Vorsilben oder zumindest die Zehnerexponenten zu verwenden.

Wir werden keine in der Wolle gefärbten Elektrotechniker werden, wir müssen aber in der Lage sein, uns mit solchen auf Augenhöhe zu unterhalten. Das dazugehörige Jägerlatein ist unerlässlich. Kondensatoren mit einigen Picofarad sind durchaus üblich. Ein Kondensator mit 100 μF hingegen ist schon eine sehr große Hausnummer.

Weil wir gerade dabei sind, eine Bitte: Bei Maßen mag man sagen, „da schleife ich noch ein Mü ab“. Was aber gar nicht geht, zu μm „mükro-Meter“ zu sagen. Es heißt mikro-Meter und demzufolge mikro-Farad. Wehe wenn ich Sie erwische.

b)

$$U = E\,s, \qquad E = \frac{U}{s}$$

$$E = \frac{100\ \mathrm{V}}{1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}}$$

$$E = 10^{6}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

c)

$$Q = C\,U, = \frac{\varepsilon\,A}{s}\,U$$

$$Q = 3{,}54 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F\ V} \quad \text{(Farad mal Volt)}$$

$$\text{Einheiten:} \quad \mathrm{F\ V} = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}}\ \mathrm{V} = \mathrm{A\,s} = \mathrm{C} \quad \text{(Coulomb)}$$

$$Q = 3{,}54 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

Übrigens in dem Zustand des Kondensators sind auf der negativen Platte $3{,}5 \cdot 10^{13}$ Elektronen zu viel vorhanden. Die gleiche Zahl an Elektronen fehlt auf der positiven Platte. Die Spannungsquelle mit 100 V hat die Elektronen „umgepumpt“.

d) Jetzt bringen wir als Probeladung ein einzelnes Elektron in den Isolierspalt des Kondensators. Das geht natürlich nicht oder haben Sie eine Elektronenpinzette? Außerdem stört die PVC-Folie. Hilfsweise betrachten wir ein beliebiges Elektron der PVC-Folie. In dem Kunststoff sind sie auch in unglaublich großer Zahl vorhanden, sie sind nur nicht beweglich. Sie müssen bleiben wo sie sind. Die Probeladung sei Q_1.

$$F = Q_1\,E = Q_1 \frac{U}{s}$$

$$Q_1 = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

$$F = -1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \frac{\mathrm{V\ A\,s}}{\mathrm{m}}$$

Der Weg zur Einheit Newton gelingt auch auf einem anderen Weg:
$\mathrm{V\,A\,s} = \mathrm{W\,s} = \mathrm{Nm}$. Die frei konvertierbare Währung namens Arbeit hilft.

$$F = -1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

Die Kraftrichtung ist entgegen der Feldrichtung. Die Feldrichtung ist von Plus nach Minus. Das negativ geladene Elektron möchte gegenan zur positiv geladenen Platte fliegen. Die Kraft F am Elektron zeigt zur $+$-Platte.

Diese Kraft auf die Elektronen erklärt auch, warum Kondensatoren eine maximale Spannung aufgedruckt haben. Wenn diese Maximalspannung überschritten wird, wird das elektrische Feld im Kondensator und damit die Kraft auf ein Elektron so groß, dass die Isolierstoffmoleküle ihre Elektronen nicht mehr festhalten können. Sie werden entrissen und sind jetzt frei beweglich. Der Kondensator wird durchschlagen und ist kaputt. Wäre der Isolierstoff in unserem Kondensator Luft, würde dieses Unglück passieren. Erinnern Sie sich? 1000 V durchschlagen 1 mm Luft. Hier würden 100 V 0,1 mm Luft durchschlagen. Da die Luft austauschbar ist, wäre dieser Kondensator anschließend wieder verwendbar.

5 Das magnetische Feld

Als Kind fand ich es sehr faszinierend, mit Permanentmagneten zu spielen. Die unerwarteten Kräfte, die zwischen zwei Körpern ziehend, manchmal auch abstoßend wirkten, fand ich unerhört. Spielzeug, das immer funktioniert, ohne dass Batterien gekauft werden mussten – einfach toll. Wenn Sie dieses kindliche Vergnügen nachvollziehen wollen, schlachten Sie eine alte Festplatte. Im Inneren finden Sie zwei sehr starke Permanentmagneten, mit denen sich trefflich spielen lässt.

Die Metalle Eisen, Nickel und Coblat reagieren auf Magnetfelder. Man nennt diese Metalle ferromagnetisch. Die magnetischen Eigenschaften finden auf kristalliner Ebene statt. Dort finden sich Elementarmagnete. Elementarmagnete mit gleicher Orientierung lagern sich zu Weiss'schen[11] Bezirken an. Diese Bezirke sind von Bloch'schen[12] Wänden umgeben. Nun setzen wir ein solches ferromagnetisches Material einem äußeren Magnetfeld aus, indem wir einen Permanentmagneten annähern. Die Weiss'schen Bezirke mit der passenden Orientierung rücken aneinander und schieben die Bloch'schen Wände nach außen. Sprunghaft können die Orientierungen von anderen Weiss'schen Bezirken sich ändern (Barkhausen[13]-Effekt). Die Weiss'schen Bezirke mit der passenden Orientierung vergrößern sich weiter. Das ferromagnetische Material wird selbst magnetisch und zieht seinerseits ferromagnetisches Material an. Wenn alle Elementarmagneten ausgerichtet sind, ist dieser Vorgang beendet, man spricht von Sättigung. Wenn das äußere Magnetfeld entfernt wird, verflüchtigt sich die erstellte Ordnung. Bis auf einen sehr kleinen Rest ist das ferromagnetische Material nicht mehr selbst magnetisch

Und was ist ein Permanentmagnet? Ein geeignetes ferromagnetische Material, das wie eben magnetisiert wird, wobei der Zustand mit Mitteln der Werkstofftechnik anschließend „eingefroren" wird.

Magnetische Felder werden nicht nur von Permanentmagneten erzeugt. Dort wo Strom fließt, werden auch magnetische Felder erzeugt.

5.1 Stromdurchflossene Leiter

Jeden stromdurchflossenen Leiter umgibt ein Magnetfeld, es ist eher schwach. Durch aufwickeln des Drahtes kann es verstärkt werden (Magnetspule). Ist im Inneren der Magnetspule ein Eisenkern, wird die Magnetwirkung verstärkt, nicht jedoch das Magnetfeld. Das hört sich unglaubwürdig an, ist aber leider so. Für Kenner: Feldstärke und Flussdichte beschreiben diese Diskrepanz. Wir vertagen das auf später.

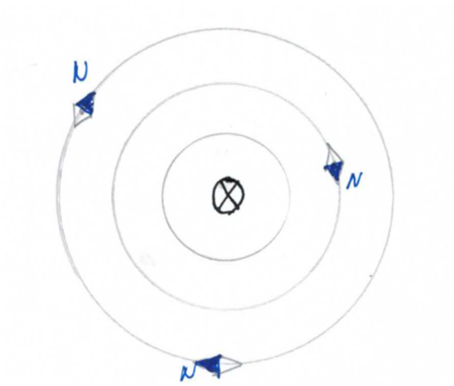
[11] Pierre-Ernest Weiss, 1865 bis 1940
[12] Felix Bloch 1905 bis 1983
[13] Heinrich Georg Barkhausen, 1881 bis 1956

Gedankenexperiment

Wir benötigen mehrere Kompassnadeln und einen Leiter, der senkrecht durch unsere Zeichenebene geht. Wenn Strom fließt, fließe er von oben durch die Zeichenebene nach unten.

Was ist eine Kompassnadel? Ein Permanentmagnet, der drehbar in seinem Schwerpunkt gelagert ist. Er orientiert sich zunächst am Erdmagnetfeld und zeigt mit einer Spitze nach magnetisch Nord. Diese Spitze wird mit N markiert. Hier ist eine blöde Panne passiert. Wir wissen, dass sich zwei gleichnamige Magnetpole abstoßen (der kleine Joachim fand das so faszinierend). Die N-Spitze der Kompassnadel zeigt nach magnetisch Nord, wo sich demzufolge der magnetischer Südpol des Erdmagneten befinden müsste – dumm gelaufen. Unser Erdmagnetfeld ist übrigens überlebenswichtig. Ohne es würde die Partikelstrahlung der Sonne nicht um die Erde herumgeleitet werden. Die Strahlenbelastung würde uns alle krank machen. Hervorgerufen wird das Erdmagnetfeld durch Stömungsvorgänge im flüssigen Eisenkern der Erde (Geodynamo). Daher sind die Magnetpole auch auf Wanderschaft (Nordpol etwa 90 m pro Tag) und stimmen nicht mit den geographischen Polen überein. In unserer Region ist die magnetische Missweisung 4° 18' E (2020). Sie nimmt pro Jahr um 9 Winkelminuten zu. Im Schnitt alle 250 000 Jahre gab es einen Polsprung des Erdmagnetfeldes. Der letzte ist nebenbei bemerkt 780 000 Jahre her. Da ist wohl einer überfällig.

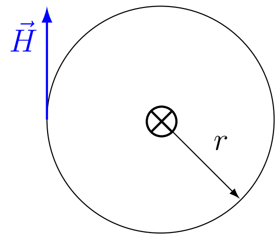
Wenn ein Strom fließt richten sich die Magnetnadeln nicht mehr am Erdmagnetfeld sondern am (lokal stärkeren) Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters aus



Wir haben ein konzentrisches Feld um den Leiter, es wird beschrieben durch Feldlinien. Das Magnetfeld wird beschrieben durch den Vektor der Magnetischen Feldstärke $\vec{H}$. Die Richtung ist immer tangential zu den Feldlinien.

Im rechten Bild fließt der Strom aus der Zeichenebene heraus nach oben. Hier hilft die „rechte-Hand-Regel“. Der Daumen zeigt in Stromrichtung, die gekrümmten anderen Finger der rechten Hand zeigen in positive $\vec{H}$-Richtung.

Zusammenhang zwischen Magnetfeld $|\vec{H}| = H$ und erzeugendem Strom I in einem besonders einfachen Fall[14].



$$I = H\,\ell, \qquad \text{Durchflutungsgesetz} \tag{15}$$

mit $\ell = 2\,\pi\,r$, Länge einer Feldlinie.

Die Einheit der magnetischen Feldstärke H ist demzufolge $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ (Ampere pro Meter)

[14] Allgemein gilt das Biot-Savart-Gesetz, worauf hier nicht eingegangen wird.

5.2 Materie im Magnetfeld

Ein isolierter Leiter sei nun von Materie umgeben, der Strom I sei unverändert.

Stellen sie sich einen Vollzylinder aus Eisen, Nickel oder Cobalt vor, durch den eine zentrische Bohrung verläuft. Durch diese Bohrung fädeln wir den isolierten Draht. Der Strom I fließt nur durch den Draht.

Wir beobachten keine Veränderung

- beim Feldlinienverlauf,
- bei Betrag und Richtung von $\vec{H}$, da $I = H\,\ell$.

Wir beobachten aber eine verstärkte Magnetwirkung, fühlbar mit ferromagnetischem Material, welches wir in die Nähe bringen.

Daher wird eine zweite Feldgröße neben $\vec{H}$ notwendig, die den Einfluss der Materie beschreibt: Die magnetische Flussdicht $\vec{B}$ (sie wird von Anderen auch magnetische Induktion genannt).

$$\text{Einheit von } B: \qquad 1\ \mathrm{T}{=}1\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}, \quad \text{(Tesla)}^{15}$$

Vorzeichen und Richtung von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ sind gleich. Es gilt

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H}, \qquad B = \mu\,H. \tag{16}$$

mit μ: magnetische Permeabilität (Durchlassigkeit).

Die Einheit der magnetischen Permeabilität μ ist $\dfrac{\Omega\,\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$

Entgegen meiner Mahnung bei Mikrometer und Mikrofarad gilt hier folgende Aussprache: „Be ist gleich müh mal Ha“.

Für vollkommen unmagnetische Stoffe (Vakuum) gilt

$$\vec{B} = \mu_0\,\vec{H}, \qquad B = \mu_0\,H.$$

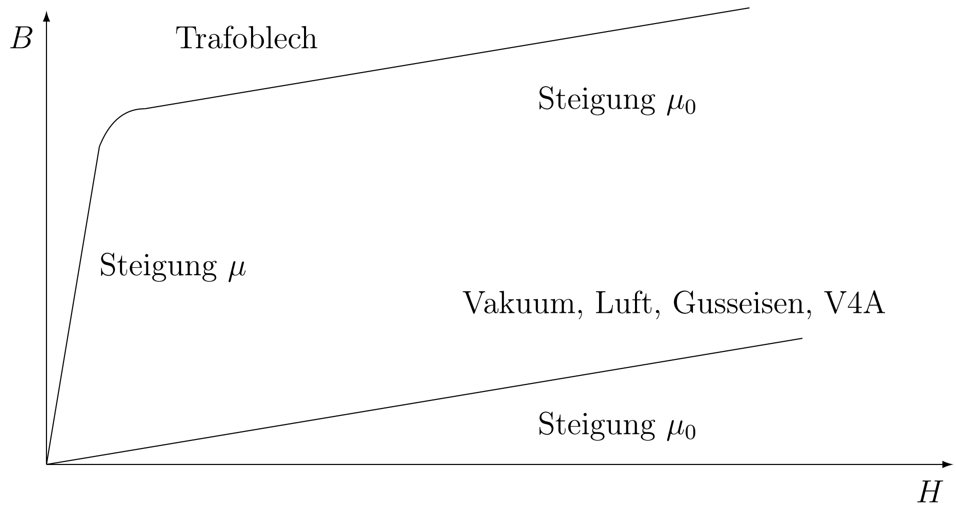
$$\mu_0 = 1,25 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}, \qquad \text{magnetische Feldkonstante}$$

Für magnetische Stoffe gilt: μ ist bis zu 10^5 mal größer aber nicht konstant. Genauere Angaben sind über Magnetisierungskennlinien zu gewinnen.

[15] Nikola Tesla 1856 bis 1943

In einem Versuch mit verschiedenen Materialien messen wir die magnetische Flussdichte[16] B und berechnen die magnetische Feldstärke H aus dem Strom I. Beides erfolgt für einen einheitlichen Ort.

$$B = f(H)$$



Trafoblech ist eine Eisen-Silizium-Legierung mit besonders hoher Permebilität. Bei zunehmender Feldstärke H steigt die Flussdichte B mit großer Steigung an. Mit Erreichen der Sättigung nimmt die Steigung stark ab und ist nur noch so groß, wie bei unmagnetischen Stoffen.

Bei dem Beispiel für unmagnetische Stoffe sind zwei Überraschungen verborgen. Nicht alles, was Eisen enthält, ist auch magnetisch. Gusseisen und Edelstähle sind hierfür Beispiele.

Die Permeabilität μ wird daher näher spezifiziert:

$$B = \mu_0 \, \mu_r \, H \qquad \text{oder} \qquad \mu = \mu_0 \, \mu_r$$

mit μ_r: Permeabilitätszahl.

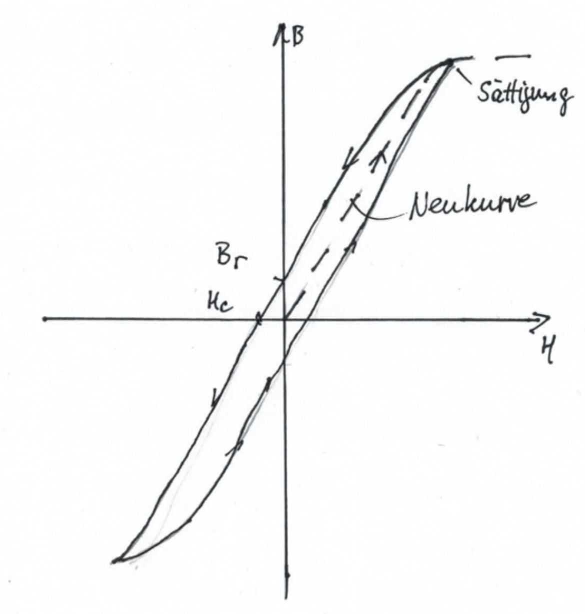
Es gilt für magnetische Stoffe $\mu_r \gg 1$. Sie werden ferromagnetisch genannt.

Für unmagnetische Stoffe gilt $\mu_r \approx 1$. Es gibt minimale Abweichungen vom Wert 1. Kupfer liegt knapp unter eins und wird diamagnetisch genannt. Aluminium und Luft liegen knapp über eins. Solche Stoffe werden paramagnetisch genannt. Für uns ist dieser feine Unterschied ohne jeden Belang.

[16] Das erfolgt meist mittels Hallsensor nach Edwin Herbert Hall, 1855 bis 1938. Aussprache wie in Carnegie Hall. Mit „Nachhallen“ hat das gar nichts zu tun. Nicht falsch aussprechen, ist peinlich.

Hysterese

Wird die Feldstärke H wieder verringert und im Vorzeichen umgekehrt wird ein Hystereseeffekt erkennbar.



Ein ferromagnetisches Material wird erstmalig mit zunehmendem H magnetisiert. Die Neukurve wird bergauf abgefahren bis zur Sättigung. Nun wird der Strom und damit die Feldstärke verringert. Die obere durchgezogene Kurve wir bergab gefahren. Bei $H = 0$ bleibt eine Restflussdichte B_r übrig, genannt Remanenzflussdichte[17]. Nun wird der Strom umgepolt und H mit negativem Vorzeichen erhöht. Bei H_c (Koerzitivfeldstärke[18]) wird die Flussdichte B null, anschließend negativ.

Die Größe Flussdichte B mit der Einheit $\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}$ beschreibt einen magnetischen Fluss, der auf eine Fläche bezogen ist.

$$\Phi = B\,A \tag{17}$$

mit Φ (groß-Phi): magnetischer Fluss, Einheit 1 Vs = 1 Wb (Weber[19]).

Gleichung (17) ist gültig für homogene Magnetfelder und senkrechten Durchtritt der Feldlinien durch die Fläche A.

[17] lat. remanere: verbleiben, zurückbleiben
[18] lat. coercere: bändigen, beieinanderhalten
[19] Wilhelm Eduard Weber 1804 bis 1891, einer der „Göttinger Sieben“, Freund und Kollege von Gauß

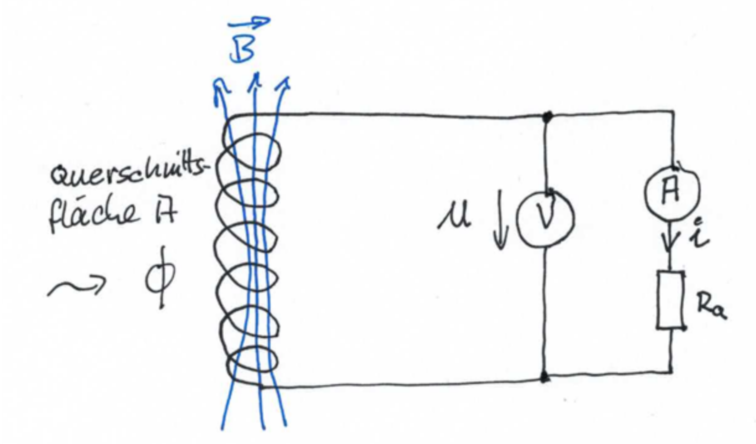
Allgemein gilt

$$\Phi = \int \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{A}.$$

So sehr Weber zu ehren ist – er und sechs weitere Professoren der Georgia Augusta wurden von König Ernst-August I von Hannover wegen liberaler Äußerungen entlassen – die Einheit Vs durch Wb zu ersetzen, stellt nun keinerlei Verbesserung dar.

5.3 Magnetische Induktion

An und in einer Spule gebe es eine magnetische Flussdichte $\vec{B}$. Über die Querschnittsfläche der Spule A ist der magnetische Fluss Φ in der Spule berechenbar.



Phänomen: Ändert sich der Fluss Φ, entstehen u und i. u und i haben wechselnde Vorzeichen, da Φ zu- und abnehmen kann.

Wichtig: Kein Strom, keine Spannung, wenn Φ vorhanden aber konstant!

Erkenntnis: Ein sich ändernder magnetischer Fluss Φ erzeugt, induziert[20] eine elektrische Spannung. Infolgedessen kann ein Strom fließen, sofern eine geschlossene Leiterschleife vorhandne ist s.o.

Frage: Wie ist die Fließrichtung des Stroms?

Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten. Viele nebensächlichen Aspekte, z.B. der Wicklungssinn der Spule, spielen eine Rolle, weshalb wir uns auf Umwegen dieser Frage nähern wollen

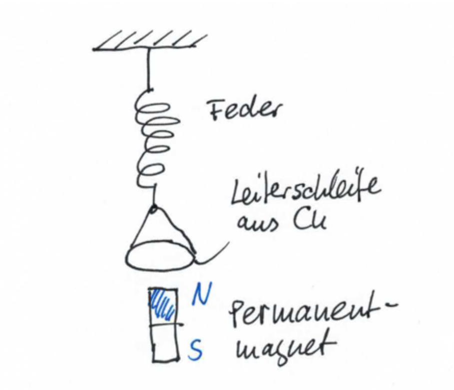
Annäherung: Die induzierte Spannung lässt einen Strom fließen. Dieser erzeugt ein zweites Magnetfeld.

Neue Frage: Wie wirken die beiden Magnetfelder aufeinander?

Wir wollen wissen, ob die beiden Magnetfelder sich verstärken oder ob sie gegeneinander wirken. Die Antwort hierauf hat weitreichende Auswirkung auf die Welt, in der wir leben.

Versuch:

[20] lat. inducere: hineinführen



Wir haben ein schwingungsfähiges System aus einer Feder und einer Masse. Ein massiver Kupferring, eine Leiterschleife, bildet diese Masse. Wir lenken die Masse nach unten aus und lassen los. Der Kupferring wird auf- und abschwingen. Da das ganze reibungsarm ist, wird das System mehrere Minuten lang schwingen. Man sagt, die Schwingung klingt langsam ab. Das ist der Normalfall.

Nun kommt der Permanentmagnet ins Spiel. Er ist so angeordnet, dass er im Inneren des schwingenden Kupferrings positioniert ist. Durch die Schwingbewegung gibt es einen zeitveränderlichen Fluss Φ durch die Leiterschleife.

Wir können unseren Kupferring an einer Stelle wahlweise öffnen oder schließen. Wenn er offen ist, kann kein Strom fließen. Wenn er geschlossen ist, kann im Ring ein Strom fließen. Jetzt führen wir zwei Versuche durch:

Leiterschleife offen: Normales Abklingen der Schwingung.

Leiterschleife geschlossen: Schnelles Abklingen der Schwingung.

Fazit: Der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das dem äußeren Magnetfeld entgegenwirkt.

Wenn das genau anders wäre, würden wir unsere Welt nicht wiedererkennen. Wir könnten aus dem Nichts unendliche Mengen Energie erzeugen. Ob uns das gut bekommen würde, ist sehr fraglich. Kleinste Bewegungen würden sich sofort selbst verstärken. Zum Glück ist das nicht so, trotz unzähliger Youtube-Videos über „free energy“, die alle Schwachsinn sind. Auch die Hauptsätze der Thermodynamik sorgen hier für geordnete Verhältnisse. Herr Lenz hat das auf den Punkt gebracht:

Lenz'sche[21] Regel:
Der induzierte Strom i wirkt der ihn hervorrufenden Flussänderung $\mathrm{d}\Phi$ entgegen.

Sonderlich verständlich ist die Lenz'sche Aussage nicht. Daher der komplizierte Umweg über schwingende Kupferringe. Wir vergleichen die Wirkung zweier Magnetfelder aufeinander, Lenz vergleicht „Äpfel mit Birnen“.

[21]Heinrich Friedrich Emil Lenz, 1804 bis 1865

Quantitaive Betrachtung

Nachdem wir festgestellt haben, dass es kein magnetisches Perpetuum Mobile geben kann, wüssten wir trotzdem gerne, wie groß ist die Spannungen bei dieser Aktion.

$$u_q = N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{Induktionsgesetz} \tag{18}$$

mit

u_q : Quellenspannung, Leerlaufspannung

N : Zahl der Drahtwindungen

$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$: Flussänderung

Gleichung (18) ist die Geschäftsgrundlage eines jeden Kraftwerkbetreibers.

Hierbei ist ohne jeden Belang die

- geometrische form der Windungen
- Erzeugungsart von Φ (permanent oder elektromagnetisch)
- Änderungsart von Φ.

Nun suchen wir den Zusammenhang von Strom und Spannung an einer Spule. Wir kennen bisher folgende Gesetze: $\Phi = B\,A,\ B = \mu_0\,H,\ N\,i = H\,\ell$.

$$\Phi = B\,A = \mu_0\,H\,A = \mu_0 \frac{N\,i}{\ell}\,A$$

Wir setzen ein in das Induktionsgesetz

$$u = N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0\,N^2\,A}{\ell}\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Die Bestandteile der Gleichung, die die Spule beschreiben, werden zu einer neuen Größe L zusammengefasst, so dass gilt:

$$u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{oder} \qquad i = \frac{1}{L}\int u\,\mathrm{d}t.$$

Mit L: Induktivität der Spule, Einheit $1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{H}$ (Henry[22])

[22]Joseph Henry, 1797 bis 1878

Etwas ganz Ähnliches hatten wir auch beim Kondensator. Schon wieder eine schlechte Nachricht.

Für zylindrische oder thorusförmige Luftspulen gilt

$$L = \frac{\mu_0 \, N^2 \, A}{\ell}. \tag{19}$$

mit

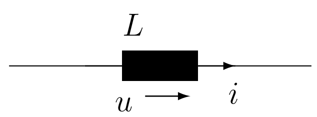
N : Windungszahl

A : Spulenquerschnittsfläche

ℓ : Spulenlänge oder mittlerer Umfang

Eine Luftspule ist eine Spule ohne Eisenkern. Ein Thorus sieht aus wie ein Donut oder ein aufgepumpter Fahrradschlauch

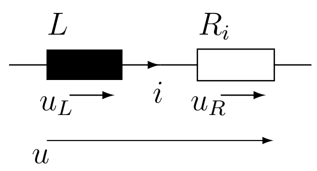
Schaltzeichen einer idealen Spule:



Ideal ist eine Spule, wenn sie keinen inneren Drahtwiderstand R_i hat. Obwohl das schwer zu realisieren ist, gehen wir in der Regel von idealen Spulen aus.

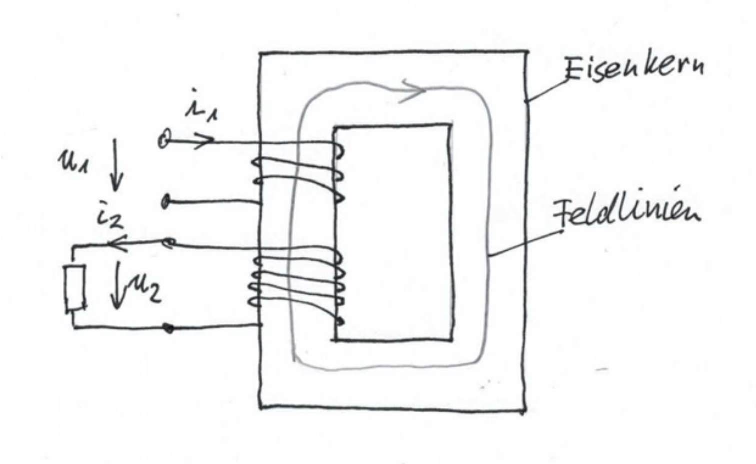
Die Magnetspulen in Magnet-Resonanz-Tomographen (MRT) sind ideale Spulen, weil sie so stark gekühlt werden, dass sie supraleitend sind. Kein schöner Gedanke, wenn man da drinliegt. Ich hatte immer Angst, dass flüssiger Stickstoff auf mich tropft. Damit werden die Spulen gekühlt. Außer dass ein Bandscheibenvorfall diagnostiziert wurde, ist mir nichts passiert.

Reale Spulen können wie folgt abgebildet werden:



5.4 Transformatorische Spannungserzeugung

Zwei Spulen befinden sich auf einem gemeinsamen Eisenkern.



Die Spannungen u_1 und u_2 sind zeitveränderlich (Vorgriff: es werden sinusförmige Wechselspannungen sein). Bei einem realen Transformator würden wir natürlich eine Spule am gegenüberliegenden Schenkel anbringen. Hier können wir aber gut erkennen, dass beide Spulen den gleichen Wicklungssinn haben. Die Stromrichtungen sind allerdings wegen der Lenz'schen Regel unterschiedlich.

Die Primärspule[23] mit N_1 Windungen wird an die zeitveränderliche Spannung u_1 angeschlossen.

Die Sekundärspule[24] mit N_2 Windungen an einen Verbraucher. Es gilt

$$u_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad u_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Der einige Unterschied:

Index 1: u_1 erzeugt $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

Index 2: $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ erzeugt u_2.

Daher:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

[23] lat. prima: die Erste
[24] lat. secunda: die Zweite

Ein idealer Transformator hat keine Verlauste, also gilt die Leistungsbilanz $P_1 = P_2$. Daher gilt:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Reale Transformatoren haben Kupferverluste, der Trafo wird warm wegen des Widerstands der Kupferwicklungen, und Eisenverluste, der Trafo brummt wegen der Ummagnetisierung des Eisens (und wird noch wärmer).

Definition des Übersetzungsverhältnis eines idealen Transformators

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{i_2}{i_1}. \tag{20}$$

Wir sehen ein außergewöhnliches Formelzeichen $\ddot{u}$. Das ist keinesfalls die zweifache Ableitung der Spannung u nach der Zeit. Es ist tatsächlich der Umlaut ü. Gebräuchlich nur in D A CH. Andernorts r wie ratio.

5.4.1 Übungsaufgabe

Die Primärwicklung eines idealen Transformators hat 1200 Windungen. Sie benötigen eine Wechselspannung von 12 V, Ihnen stehen 230 V zur Verfügung. Was machen Sie?

Ich wickle mir eine passende Sekundärspule auf den Trafo.

$$N_1 = 1200, \qquad u_1 = 230\text{ V}, \qquad u_2 = 12\text{ V}$$

$$N_2 = N_1 \frac{u_2}{u_1}$$

$$N_2 = 1\,200 \cdot \frac{12}{230}$$

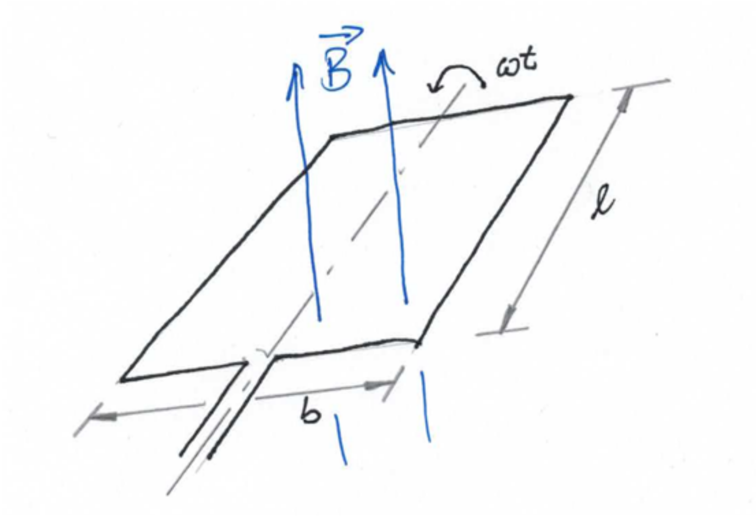
$$N_2 \approx 62,5 \text{ Windungen}$$

An dieser Stelle fragen wir uns, wie es sein kann, dass wir für die zeitveränderlichen Größen u_1 und u_2 stumpf Zahlenwerte einsetzen. Die sind doch fast immer gelogen. Stimmt, das ist hier nicht ganz sauber. Wir werden das zu einem späteren Zeitpunkt noch korrigieren. Für die Experten: Wir haben die Effektivwerte eingesetzt, die wir später mit U_1 und U_2 bezeichnen werden. Kommt alles noch.

Wichtig ist jedoch, Transformatoren funktionieren nur mit zeitveränderlichen Spannungen, die wir demnächst als Wechselspannungen kennenlernen werden. Versuchen Sie nie Transformatoren an Gleichspannung anzuschließen. Als Kind wollte ich mit einem Klingeltrafo aus 4,5 V einer Taschenlampenbatterie 220 V machen. Geht nicht. Der Trafo wird nur heiß und stinkt nach Ampere. Die meisten Trafos überleben den Stunt nicht.

5.5 Rotatorische Spannungserzeugung

Ein $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ kann auch erzeugt werden, wenn Spule und Magnetfeld $H = \text{const}$, $B = \text{const}$ sich zueinander verdrehen. Wir betrachten eine Leiterschleife, die drehbar im Magnetfeld angebracht ist (dargestellt ist die magnetische Flussdichte $\vec{B}$).



In $\Phi = B\,A$ ist in diesem Fall A variabel, da gilt

$$A = \ell\, b\, \cos(\omega t) = A_{\max}\, \cos(\omega t)$$

Ungewöhnlich, eine Fläche kann auch negativ werden, sagt der Kosinus. Das ist wahr. Der Normalenvektor der Fläche schaut manchmal in B-Richtung (positiv) und manchmal gegenan (negativ). Manchmal steht der Normalenvektor senkrecht zur B-Richtung, dann ist die Fläche Null, passt alles.

$$\Phi = B\,A = B\,A_{\max}\,\cos(\omega t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\omega\, B\, A_{\max}\, \sin(\omega t)$$

$$u = N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N\,\omega\,B\,A_{\max}\,\sin(\omega t)$$

$$\text{oder vereinfacht:} \qquad u = \hat{u}\,\sin(\omega t)$$

$$\text{mit} \qquad |\hat{u}| = N\,\omega\,B\,A_{\max}$$

So erfolgt Spannungserzeugung in elektrischen Maschinen.

An Hand dieses primitiven Beispiels einer rotierenden Leiterschleife in einem konstanten Magnetfeld ohne jeden Eisenkern können wir sehen, dass rotatorisch erzeugte Spannungen sinusförmig sind. Gleiches gilt für reale Generatoren in Kraftwerken. Mit Hilfe welcher Primärenergie der Generator angetrieben wird, ist unerheblich. In den meisten Fällen treiben Dampfturbinen den Generator an. Der Dampferzeuger kann fossil befeuert sein (Kohle, Erdgas, Erdöl) oder durch Kernspaltung (hoffentlich bald nicht mehr, so meine persönliche Meinung). Wasserkraft- und Windturbinen stellen gleich eine rotierende Welle zur Verfügung, die den Generator antreibt.

Lediglich bei Energiegewinnung mittels Photovoltaik oder Brennstoffzelle wird ein anderer Weg beschritten. Gleichspannung muss mit Hilfe von Wechselrichtern in sinusförmige Wechselspannung umgewandelt werden.

Exkurs zur Kernenergie

Mit meiner Meinung zur Kernenergie kann ich nicht hinter dem Berg halten, da ich zu der Generation gehöre, die von künftigen Generationen verflucht sein wird.

Am 12. April 1967 ging das Kernkraftwerk Gundremmingen A ans Netz. Es war das zweite überhaupt in Westdeutschland und das erste mit einer nennenswerten Nettoleistung von 237 MW[25]. Ich wurde an dem Tag neun Jahre alt. Am 15. April 2023 wurden die letzten drei Kernkraftwerke[26] in Deutschland endgültig abgefahren. Das war drei Tage nach meinem 65. Geburtstag. Gundremmingen A wurde übrigens im Jahr 1977, also nach 10 Jahren Betrieb zu Schrott gefahren. Im Laufe meines Lebens habe ich jede Menge Strom aus Kernkraft verbraucht, der mir spottbillig verkauft wurde. Es ist nur ein Feigenblatt, dass ich, seit das möglich ist, einen Ökostromvertrag habe. In dem Strompreis, den ich bezahlt habe, waren kaum die Investitionskosten für die Kernkraftwerke enthalten, da der Bau stark subventioniert wurde. Die Rückbaukosten waren im Strompreis gar nicht enthalten, genauso wenig wie die immensen Kosten für die Endlagerung des Atommülls. Das Endlager muss gesucht, akzeptiert, gebaut, instandgehalten und bewacht werden. Letzteres für die Dauer von etwa einer Million Jahre. Berechnen Sie spaßenshalber die Gehaltskosten für die Wachleute. Das muss alles von den nachfolgenden Generationen bezahlen werden. Leider ist das nicht das einzige Problem unserer Nachfahren, wir hinterlassen auch ein gewaltiges Klimaproblem.

Meine Generation, wir werden „die Baby-Boomer“ genannt, wird aus vielen Gründen verflucht sein, u.a. für 56 Jahre billigen Atomstrom, der sich als extrem teuer herausstellen wird. Sie, die „Generation Z“ ist die erste von vielen Generationen, die das ausbaden muss.

[25] Das Kernkraftwerk Kahl mit 15 MWe ging 1962 als erstes ans Netz
[26] Isar 2, Neckarwestheim 2 und Emsland

6 Wechselstrom

6.1 Sinusförmige Wechselgrößen

Auf Grund rotatorischer Spannungserzeugung gilt

$$u = \hat{u}\,\sin\alpha = \hat{u}\,\sin(\omega t)$$

mit

$\hat{u}:$ Amplitude, Scheitelwert der Wechselspannung

$\alpha = \omega t:$ Phasenwinkel (Winkel der Leiterschleife im Magnetfeld)

Kreisfrequenz ω

Sie beschreibt periodische Vorgänge. Zu diesem Zweck werden ähnliche Größen verwendet.

$T:$ Periodenzeit in s

$f:$ Frequenz in $\dfrac{1}{\text{s}} = 1$ Hz (Hertz[27])

$n:$ Drehzahl in U/min (Umdrehungen pro Minute)

$\omega:$ Kreisfrequnz, Winkelgeschwindigkeit in $\dfrac{1}{\text{s}}$

Frequenz und Kreisfrequenz haben mit $\frac{1}{\text{s}}$ die gleiche physikalische Einheit. Sie unterscheiden sich jedoch voneinander, wie wir gleich sehen werden. Als Hinweis auf diesen Unterschied wird bei Frequenzen die Einheit Hz verwendet, bei Kreisfrequenzen jedoch nicht.

Es gilt folgender Zusammenhang

$$\omega = 2\pi\, f = \frac{\pi\, n}{30} \approx \frac{n}{10} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{1}{T}. \tag{21}$$

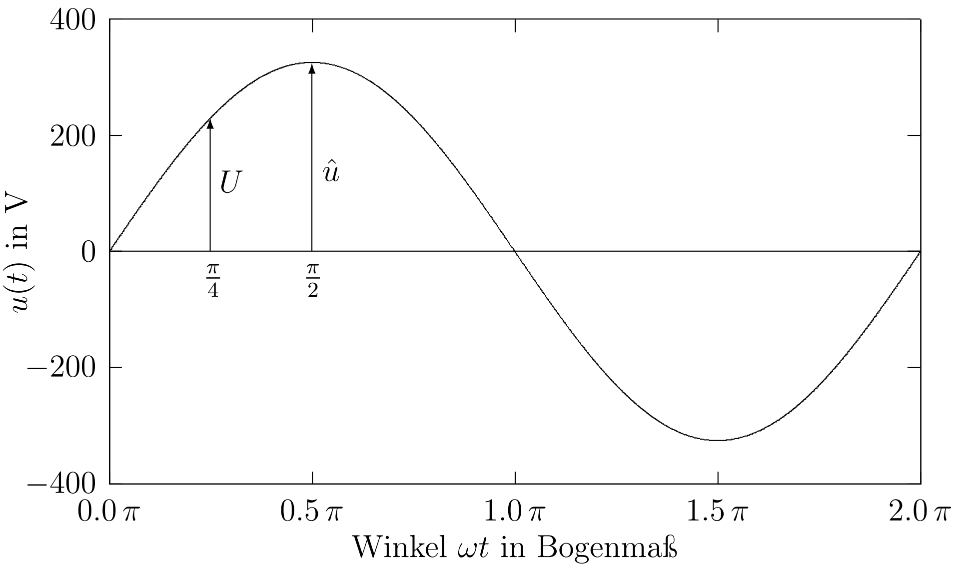
Zwei Beispiele

$$f = 50\ \text{Hz}, \qquad \omega = 314\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$f = 60\ \text{Hz}, \qquad \omega = 377\ \frac{1}{\text{s}}$$

Wir betrachten den sinusförmigen Verlauf der Spannung u

[27]Heinrich Rudolf Hertz, 1857 bis 1894



Effektivwert

Um bei Wechselspannungen eine einfache Möglichkeit zu haben, die Spannung anzugeben, wird der Effektivwert eingeführt. Beispiel: Wechselspannung von 230 V. Eine einfache Mittelwertbildung ist nicht zielführend. Denn egal wie groß die Wechselspannung ist, der Mittelwert ist immer Null. Betrachten Sie nur den obigen Verlauf.

Effektivwert ist der quadratische Mittelwert über eine Periode T, er hat das Formelzeichen U.

U ist ein alter Bekannter aus Gleichspannungszeiten, der hier wieder zur Geltung kommt.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \, \mathrm{d}t}.$$

Bei sinusförmigem Verlauf von u gilt

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{u}. \tag{22}$$

Das entspricht dem Momentanwert bei $\frac{\pi}{4}$ bzw. 45°.

Für Ströme gilt ganz analog

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}.$$

Bei sinusförmigem Verlauf von i gilt

$$I = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{\imath}. \tag{22}$$

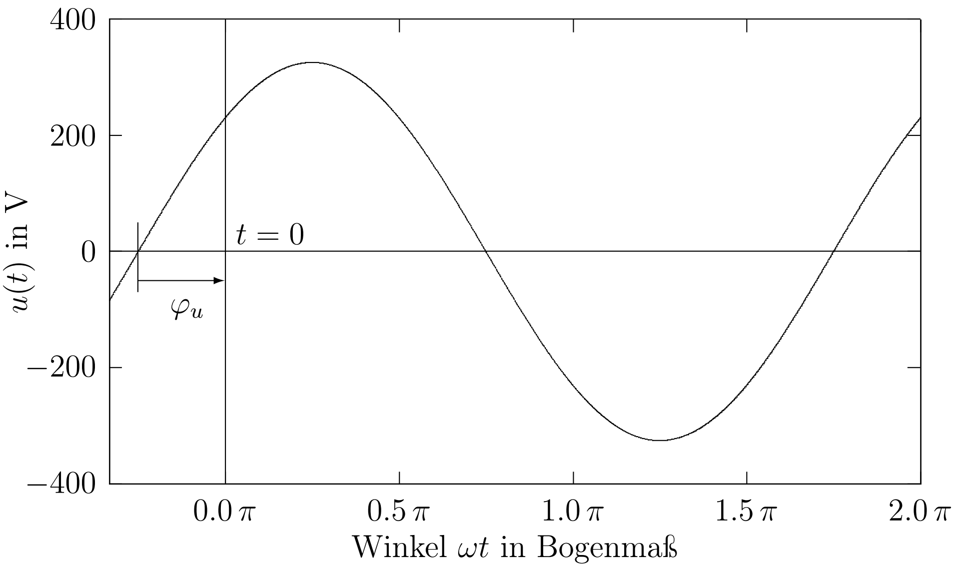
Als beschreibende Größe von Wechselspannungen und Wechselströmen werden die Effektivwerte U und I herangezogen. Messgeräte zeigen Effektivwerte an.

Der Begriff Effektivwert ist recht passend gewählt. Stellen Sie sich folgendes Experiment vor: Eine Glühlampe wird an einer unbekannten Wechselspannung betrieben. Ein Sensor erfasst die Helligkeit der Lampe. Nun betreiben Sie die gleiche Glühlampe an einer veränderbaren Gleichspannung. Sie erhöhen die Gleichspannung langsam, bis sich die gleiche Helligkeit einstellt. Die nun anliegende Gleichspannung ist genau so groß wie der Effektivwert der Wechselspannung zu Beginn des Versuchs. Gleich- und Wechselspannung haben hier den gleichen Effekt. Für Kenner und Fliegenbeinzähler sei ergänzt: Sie haben den gleichen Effekt an einer Ohmschen Last.

Im englischen Sprachgebrauch ist die Bezeichnung anders. Der Effektivwert wird dort RMS genannt. RMS (gesprochen 'aremess') steht für *root-mean-square* (Wurzel-Mittelwert-Quadrat). Das ist eine textliche Beschreibung der Formeln für U und I.

Nullphasenwinkel

Das obige Zusammenfallen von Spannungsnulldurchgang und Zeitpunkt $t = 0$ ist ein Sonderfall. Häufig geschieht folgendes:



Der tatsächliche Spannungsverlauf lautet dann

$$u = \sqrt{2}\, U\, \sin(\omega t + \varphi_u)$$

mitt φ_u : Nullphasenwinkel der Spannung.

Ganz analog gilt:

$$i = \sqrt{2}\, I\, \sin(\omega t + \varphi_i)$$

mit φ_i : Nullphasenwinkel des Stroms.

Die Nullphasenwinkel φ_u und φ_i sind vorzeichenempfindlich. Wenn, wie in obigem Bild, ein Pfeil vom Nulldurchgang der Funktion zum Zeitpunkt $t = 0$ nach rechts zeigt, handelt es sich um einen positiven Nullphasenwinkel. Zeigt der Pfeil nach links, um einen negativen. Merke: Es wird immer vom Nulldurchgang der Funktion aus gemessen. Es gibt auch noch eine rustikale Eselsbrücke: Wenn bei $t = 0$ der Funktionswert positiv ist, gibt es einen positiven Nullphasenwinkel und umgekehrt. Diese Eselsbrücke hält, da wir zunächst nur Winkel im Bereich $\pm 90°$ betrachten werden.

6.1.1 Übungsaufgabe

An den Klemmen einer Steckdose liegt eine Wechselspannung von 230 V an; die Netzfrequenz beträgt 50 Hz.

Ges.: Scheitelwert der Spannung $\hat{u}$, Kreisfrequenz ω, Periodenzeit T.

Netzspannungen sind sinusförmig.

$$\hat{u} = \sqrt{2}\, U = 325,3 \text{ V}$$

$$\omega = 2\,\pi\, f = 314\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 20 \text{ ms.}$$

6.1.2 Übungsaufgabe

Ein Ohm'scher Widerstand R von 300 Ω liegt an einer sinusförmigen Wechselspannung von 230 V, 50 Hz.

Ges.: Tatsächlicher Verlauf der Wechselgrößen Strom und Spannung.

$$u = \hat{u}\ \sin(\omega t) = \sqrt{2}\ U\ \sin(\omega t)$$

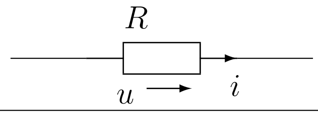
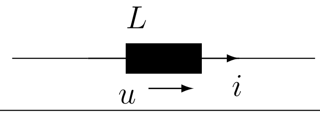
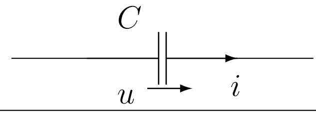
$$I = \frac{U}{R} = \frac{230 \text{ V}}{300\ \Omega} = 0,77 \text{ A}$$

$$i = \hat{\imath}\ \sin(\omega t) = \sqrt{2}\ I\ \sin(\omega t)$$

$$u = 325,3 \text{ V} \cdot \sin(314\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t)$$

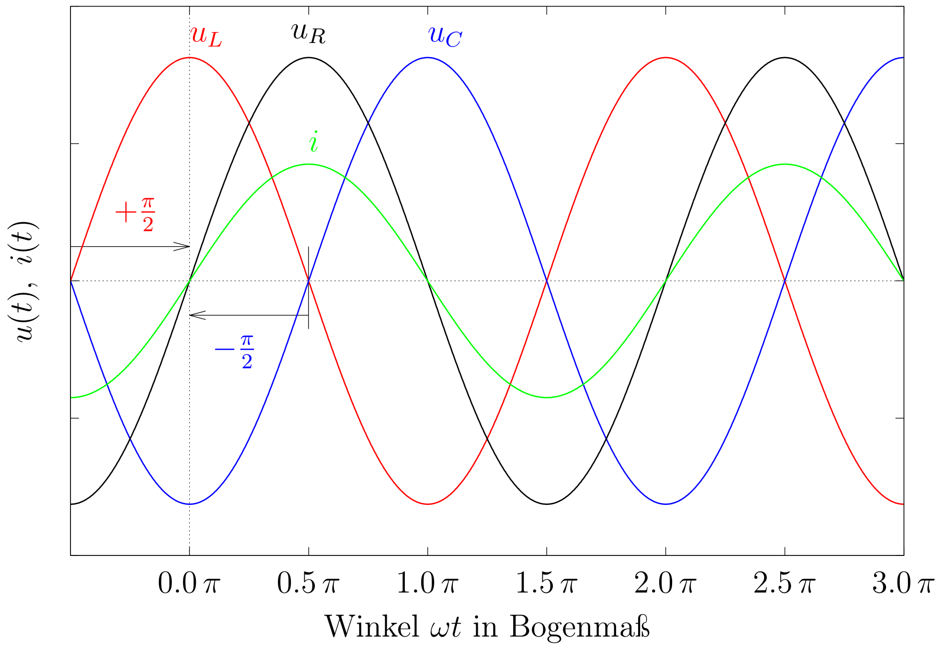
$$i = 1,09 \text{ A} \cdot \sin(314\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t)$$

6.2 R, L, C bei Wechselspannung

	Widerstand R 	Spule/Induktivität L 	Kondensator/Kapazität C 
Spannung bei allgemein zeitveränderlichem Strom i	$u = R\, i$	$u = L\, \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$u = \frac{1}{C} \int i \,\mathrm{d}t$
Spannung bei sinusförmigem Strom $i = \sqrt{2}\ I \sin(\omega t)$ mit Nullphasenwinkel des Stroms $\varphi_i = 0$	$u = \sqrt{2}\ I\, R \sin(\omega t)$	$u = \sqrt{2}\ I\, L\, \frac{\mathrm{d}\sin(\omega t)}{\mathrm{d}t}$	$u = \sqrt{2}\ \frac{I}{C} \int \sin(\omega t)\ \mathrm{d}t$
differenzieren/integrieren	$u = \sqrt{2}\ I\, R \sin(\omega t)$	$u = \sqrt{2}\ I\, L\, \omega\ \cos(\omega t)$	$u = \frac{\sqrt{2}\ I}{\omega\, C} \cdot [-\cos(\omega t)]$
Trigonometrie	$\sin(\omega t) = \sin(\omega t + 0)$	$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$	$-\cos(\omega t) = \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$
Gemeinsames Ergebnis	$u = \sqrt{2}\ U\ \sin(\omega t + \varphi_u)$	$u = \sqrt{2}\ U\ \sin(\omega t + \varphi_u)$	$u = \sqrt{2}\ U\ \sin(\omega t + \varphi_u)$
Nullphasenwinkel der Spannung φ_u	$\varphi_u = 0$	$\varphi_u = +\frac{\pi}{2}$	$\varphi_u = -\frac{\pi}{2}$
Spannungseffektivwerte	$U = I\, R$	$U = I\, \omega\, L$	$U = I\, \frac{1}{\omega\, C}$
abgekürzt	$U = I\, R$	$U = I\, X_L$	$U = I\, X_C$
(Blind)Widerstände	R	$X_L = \omega\, L$	$X_C = \frac{1}{\omega\, C}$
Bezeichnungen	Ohmscher Widerstand	Induktiver Blindwiderstand	Kapazitiver Blindwiderstand
(Blind)Leitwerte	$G = \frac{1}{R}$	$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega\, L}$	$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega\, C$
Bezeichnungen	Ohmscher Leitwert	Induktiver Blindleitwert	Kapazitiver Blindleitwert

Mit den frequenzabhängigen Blindwiderständen X_L und X_C bleibt das Ohmsche Gesetz gültig, wobei wir mit den Effektivwerten U und I rechnen.

Neuer Effekt: Strom und Spannung bei L und C erreichen nicht mehr gleichzeitig ihren Maximalwert.



Neuer Begriff: Phasenverschiebung
Neue Größe: Phasenverschiebungswinkel φ

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \tag{23}$$

Zu dieser Gleichung gibt es eine unschlagbare Eselsbrücke: pfui.

Fassen wir zusammen: Die Bauteile Spule L und Kondensator C führen zu charakteristischen Phasenverschiebungen. Sie rühren vom Integrieren und Differenzieren. Bisher fanden wir die Phasenverschiebung unverändert beim Nullphasenwinkel der Spannung φ_u, da wir bisher immer einen Strom annahmen bei dem $\varphi_i = 0$ war.

Nur das Schaltelement R verhält sich erwartungsgemäß: u_R und i verlaufen synchron, da beim Widerstand R der Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 0$ ist.

Phasenverschiebung bei idealen Bauteilen

Widerstand R	Spule L	Kondensator C
$\varphi = 0$ Strom und Spannung in Phase	$\varphi = +90^o = +\dfrac{\pi}{2}$ Spannung eilt Strom vor	$\varphi = -90^o = -\dfrac{\pi}{2}$ Strom eilt Spannung vor

Hier bedarf es einiger Merkhilfen und Eselsbrücken. Ich fürchte, sie sind ziemlich idiotisch.

Das Schaltbild des Kondensators besteht aus zwei parallelen Strichen. Ein Strich liefert das Minuszeichen bei $\varphi = -90^o$. Der andere Strich liefert den Bruchstrich bei $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Eine Spule hat keinen Bruchstrich, kein Minuszeichen und keine Striche.

Die Vor- und Nacheilerei von Strom und Spannung kann sich kein Mensch merken. Daher gehen wir künftig immer vom Kondensator aus, denn dafür gibt es eine Merkhilfe. Ein Kondensator hat eine Kapazität, ein Bierglas auch (Fassungsvermögen). Beim Füllen eines Bierglases gibt es zunächst einen Volumenstrom und erst später eine Füllhöhe. Beim Laden eines Kondensators ist es genau so. Es gibt zunächst einen Strom, später dann eine Spannung (Füllhöhe). Wenn wir eine Spule betrachten, ist es genau umgekehrt. Erst Spannung, dann Strom. Für Spulen gibt es aber keine Eselsbrücken.

Ab jetzt sollten Sie das Skript „Übungsblock und Hilfsmittel“ und insbesondere die Seite 7 griffbereit haben. Manches aus der Querformattabelle hier finden Sie dort wieder. Einige Aspekte kommen erst noch. Der Wust an neuen Größen ist nur mit Seite 7 zu bändigen.

6.1.3 Übungsaufgabe

Hier ist leider ein Nummerierungsfehler entstanden. Vorlesungskapitel und Übungskapitel stimmen nicht überein.

Eine ideale Spule ($R = 0$) liegt an 230 V, 50 Hz. Ein Wechselstrommeßgerät zeigt 3 A an.

Ges.: Induktivität, Blindwiderstand, Blindleitwert, tatsächlicher Verlauf der Wechselgrößen Strom und Spannung.

Induktivität L,

$$U = I\,X_L = I\,\omega\,L$$

$$L = \frac{U}{I\,\omega}, \qquad \left[\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H\ (Henry)}\right]$$

$$L = 0,24\ \mathrm{H}$$

Induktiver Blindwiderstand X_L,

$$X_L = \omega\,L = \frac{U}{I} \qquad \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega\right]$$

$$X_L = 76,7\ \Omega$$

Induktiver Blindleitwert B_L,

$$B_L = \frac{1}{\omega\,L} = \frac{I}{U} \qquad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{S\ (Siemens)}\right]$$

$$B_L = 1,3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{S}$$

Verläufe von u und i. Es ist günstig i als Bezug zu wählen.

i als Bezug zu wählen heißt, wir nehmen willkürlich an, der Nullphasenwinkel des Stroms $\varphi_i = 0$. Wir finden dann beim Nullphasenwinkel der Spannung φ_u unverfälscht den Phasenverschiebungswinkel φ wieder, den das Bauteil verursacht. Hier Spule: $\varphi = +90^o$.

$$i = \sqrt{2}\ I\ \sin(\omega t) \qquad \varphi_i = 0$$

$$i = 4,2\ \mathrm{A} \cdot \sin\left(314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$$

Jetzt benötigen wir den Nullphasenwinkel der Spannung. Wir betrachten eine Spule, die eine Phasenverschiebung von $\varphi = +90^o$ macht.

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad \text{(pfui), mit } \varphi_i = 0$$

$$\varphi_u = \varphi = +90^o$$

$$u = \sqrt{2}\, U \, \sin(\omega t + \varphi_u) \qquad \text{mit } \varphi_u = +90^o$$

$$u = 325,3\ \mathrm{V} \cdot \sin\left(314\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

6.1.4 Übungsaufgabe

Ein Kondensator liegt an 110 V bei 60 Hz (Nordamerika, Japan). Ein Strom von 0,6 A wird gemessen.

Ges.: Kapazität, Blindwiderstand, Blindleitwert, Wechselgrößen u, i.

Kapazität C,

$$U = I\,X_C = I\,\frac{1}{\omega\,C}$$

$$C = \frac{I}{\omega\,U}, \qquad \left[\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}\ (\mathrm{Farad})\right]$$

$$C = 14,5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = 14,5\ \mu\mathrm{F}$$

Kapazitiver Blindwiderstand X_C,

$$X_C = \frac{1}{\omega\,C} = \frac{U}{I} \qquad \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega\right]$$

$$X_C = 183,3\ \Omega$$

Kapazitiver Blindleitwert B_C,

$$B_C = \omega\,C = \frac{I}{U} \qquad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{S}\right]$$

$$B_C = 5,45 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}$$

Verläufe von u und i. Es ist wieder günstig, i als Bezug zu wählen.

$$i = \sqrt{2}\ I\ \sin(\omega t) \qquad \varphi_i = 0$$

$$i = 0,85\ \mathrm{A} \cdot \sin\left(377\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$$

Jetzt benötigen wir den Nullphasenwinkel der Spannung. Wir betrachten einen Kondensator, der eine Phasenverschiebung von $\varphi = -90^o$ macht.

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad \text{mit } \varphi_i = 0$$

$$\varphi_u = \varphi = -90^o$$

$$u = \sqrt{2}\, U\, \sin(\omega t + \varphi_u) \qquad \text{mit } \varphi_u = -90^o$$

$$u = 155,6\ \mathrm{V} \cdot \sin\left(377\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Wie man weiß, haben wir ein Versorgungsnetz mit 230 V, 50 Hz (die Sache mit den 400 V kriegen wir später). Vor 1987 betrug die Spannung 220 V. In den USA ist eine Spannung von 110 V bis 120 V bei einer Netzfrequenz von 60 Hz üblich. Ganz verrückt ist die Lage in Japan. Mitten durch das Land geht eine elektrische Grenze. Der nordöstliche Landesteil mit Tokyo hat ein Netz mit 100 V, 50 Hz. Der südwestliche Landesteil hat ein Netz mit 100 V, 60 Hz. Ein Energieaustausch zwischen den Landesteilen ist nur begrenzt möglich. Wer näheres hierzu wissen möchte, suche nach Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung (HGÜ). Nach der Katastrophe von Fukushima war der nordöstliche Landesteil von einem erheblichen Versorgungsmangel betroffen.

Das Durcheinander ist historisch bedingt. Die ersten Generatoren für Tokyo wurden 1895 in Deutschland bei AEG eingekauft, sie liefen mit 50 Hz. Die ersten Generatoren für Osaka wurden 1896 bei General Electric eingekauft und die liefen mit den USA-üblichen 60 Hz.

Wir sind Nutznießer dieses Durcheinanders. Lange Zeit war Japan führender Hersteller von Unterhaltungselektronik. Moderne Netzteile sind daher elektrische Allesfresser. Sie vertragen Spannungen von 100 V bis 240 V (in UK bis 1987 üblich) und Frequenzen von 50 Hz bis 60 Hz. Schauen Sie auf Ihrem Computernetzteil nach.

Die Bahn fährt mit Wechselspannungen von 15 kV bei einer Frequenz von 16,7 Hz. Die bei frühen Elektrolokomotiven eingesetzten Reihenschlussmotoren hatten Kommutatoren. Das Bürstenfeuer war bei einer Netzfrequenz von 50 Hz zu stark, weshalb in Bahnstromwerken mittels Maschinenumformern auf $16\frac{2}{3}$ Hz reduziert wurde (E-Motoren anderer Bauart (Synchronmotoren) trieben über Getriebe mit i=3 Generatoren an). An Bord von Flugzeugen und auch bei militärischen Radaranlagen gibt es gelegentlich Wechselstromnetze mit 400 Hz. Bei höheren Frequenzen können die Eisenkerne der Transformatoren schlanker ausgeführt werden, das spart Masse.

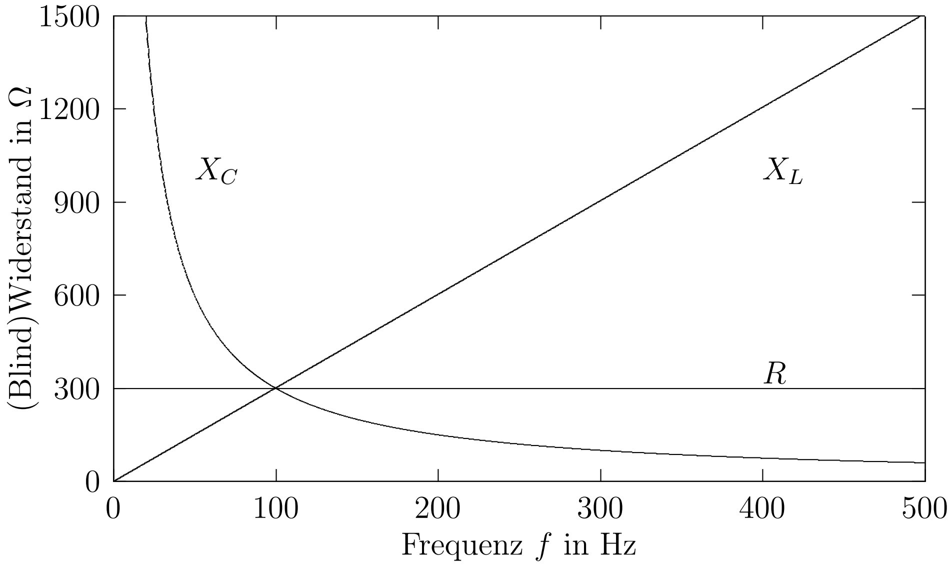
6.1.5 Übungsaufgabe

Stellen Sie die Frequenzabhängigkeit der (Blind-) Widerstände im Bereich von 0 bis 500 Hz dar.

$R = 200\ \Omega$, $C = 5{,}3\ \mu$F, $L = 0{,}48$ H.

Es gilt

$$R = \text{const}, \qquad X_L = \omega\, L = 2\pi\, f\, L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\, f\, C}$$



Wir können erkennen, dass der Widerstand R von der Frequenz unabhängig ist. Nun gut, das wussten wir schon vorher.

Der Blindwiderstand eines Kondensators X_C strebt bei der Frequenz Null (Gleichspannung) gegen Unendlich. Bei sehr hohen Frequnezen strebt er gegen Null. $X_C(f)$ ist eine Inversfunktion. Kondensatoren blockieren Gleichströme aber lassen hochfrequente Ströme nahezu ungehindert durch.

Der Blindwiderstand einer idealen Spule X_L ist bei der Frequnz Null gleich Null. Für unendlich hohe Frequenzen strebt er gegen Unendlich. $X_L(f)$ ist eine lineare Funktion. Eine ideale Spule (ohne Drahtwiderstand) erzeugt bei Gleichspannung einen Kurzschluss. Deshalb fing mein Klingeltrafo aus Kindertagen an zu stinken.

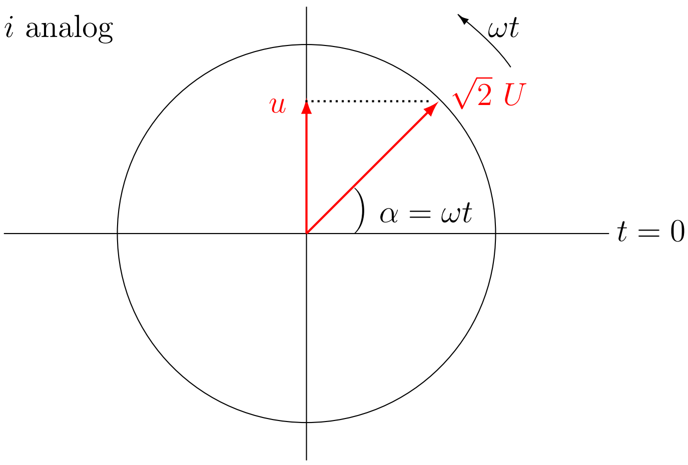
Übrigens, den Treffer aller drei Funktionen bei 300 Ω und 100 Hz habe ich extra so gewählt, damit es schön aussieht. In Wirklichkeit wäre das ein großer Zufall.

6.3 Zeigerbild, eine Darstellung von Wechselgrößen

Die Augenblickswerte

$$u = \sqrt{2}\, U\, \sin(\omega t),$$

i analog, können als Projektion eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn rotierenden Zeigers der Länge $\sqrt{2}\, U$ dargestellt werden (mathematisch positiver Drehsinn).



Vereinfachungen:

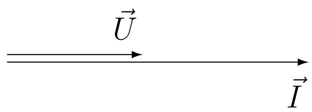
- Statt $\sqrt{2}\, U$ und $\sqrt{2}\, I$ werden die Effektivwerte U und I angetragen.
- Dass die Pfeile sich immer mit ω gegen den Uhrzeigersinn drehen, wird nicht mehr dargestellt.

Zusätzliche Berücksichtigung:

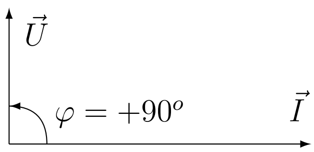
- Die Phasenlage von „Strompfeilen“ und „Spannungspfeilen“ zueinander wird dargestellt, φ_u, φ_i und φ werden sichtbar.
- Gleichartige Pfeile (Strom oder Spannung) werden vektoriell addiert. Aus U und I wird (vorübergehend) $\vec{U}$ und $\vec{I}$.

Beispiele:

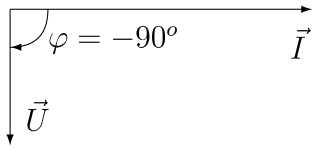
Widerstand R



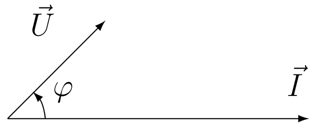
Induktivität L



Kapazität C



Passiver Zweipol Z



Passiver Zweipol

Ein passiver Zweipol ist ein beliebiger Verbraucher. Er kann aus den Elementen R, L und/oder C beliebig zusammengesetzt sein. Reihenschaltungen und Parallelschaltungen sind denkbar.

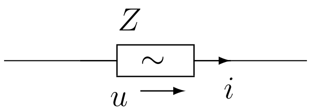
Er wird beschrieben durch die Größen

- Scheinwiderstand Z
- Scheinleitwert Y
- Phasenverschiebungswinkel φ

Es gilt:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{Y}$$

$$-90^o \leq \varphi \leq +90^o$$



Zur Erinnerung, unser Ohmsches Gesetz – Merkspruch URI – wurde vorübergehend zu UXI und gilt jetzt auch in der Form UZI (Militaristen finden das witzig).

Erneut haben wir viele neue Formelzeichen kreiert. Bald ist unser Alphabet aufgebraucht. Welche Widerstände und Leitwerte haben wir nun angesammelt?

- Ohmscher Widerstand: Widerstand R, Leitwert G.
- Spule: Induktiver Blindwiderstand X_L, induktiver Blindleitwert B_L.
- Kondensator: Kapazitiver Blindwiderstand X_C, kapazitiver Blindleitwert B_C.

- Passiver Zweipol: Scheinwiderstand Z, Scheinleitwert Y.

Die berühmte Seite 7 hilft, hier den Überblick zu behalten. Zeigerbilder und passive Zweipole sind dort enthalten. Die Bezeichnungen $\underline{U}$ statt $\vec{U}$ sind keine Fehler. Wir kommen noch dazu.

6.4 Leistung, Arbeit, Leistungsfaktor

Bei Wechselstrom erhalten wir erwartungsgemäß auch eine zeitveränderliche Leistung. Nennen wir sie vorübergehend Augenblickswert P_t. Die Einführung von p als zeitveränderliche Leistung lohnt nicht.

$$P_t = u\,i$$

Für u und i gilt

$$u = \sqrt{2}\,U\,\sin(\omega t + \varphi_u); \qquad i = \sqrt{2}\,I\,\sin(\omega t + \varphi_i).$$

Mit dem allgemeinen Additionstheorem

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

gilt

$$P_t = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot U\,I\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_u-\varphi_i) - \cos(2\,\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\right]$$

oder

$$P_t = 2\cdot U\,I\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\,\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\right]$$

Es gilt die allgemeingültige Gleichung

$$\begin{aligned}P_t &= U\,I\cos\varphi - U\,I\cos(2\,\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\\ P_t &= P \qquad\quad - P_\sim\end{aligned}$$

mit der Wirkleistung $P = U\,I\cos\varphi$, dem zeitlichen Mittelwert der Leistung.

Der Wechselanteil $P_\sim$ schwingt mit doppelter Frequenz $(2\,\omega t)$ um den Gleichanteil der Wirkleistung. Dieser Leistungsanteil pendelt zwischen Quelle und Verbrauche und bewirkt nichts im Verbraucher.

Dieser pendelnde Leistungsanteil wird uns noch Schwierigkeiten machen. Folgende Vorstellung hilft hierbei: Ein Verbraucher mit Spule oder Kondensator nimmt aus dem Netz alles an Leistung, was er kriegen kann, stellt aber schon während einer halben Periode fest, dass nicht alles gebraucht wird und schickt den nicht benötigten Teil zurück an die

Quelle. Dieses Verhalten ist typisch für einen Elektromotor (Spule) der mal im Leerlauf (gibt fast alles zurück), mal in Teillast, mal unter Volllast (behält fast alles) betrieben wird.

Dieser Effekt wird mit einer zweckmäßig aber willkürlich definierten Rechengröße versehen

$$\text{Blindleistung} \qquad Q = U\,I\,\sin\varphi.$$

Wirkleistung P und Blindleistung Q, geometrisch addiert, ergeben die

$$\text{Scheinleistung} \qquad S = U\,I.$$

Hier erleben wir erneut eine Inflation von Größen und Formelzeichen. Wir haben uns gerade von den Ohmschen Widerständen, Blindwiderständen und Scheinwiderständen erholt, da passiert das gleiche noch einmal. Wenn wir Ohmsche Widerstände in „Wirkwiderstände“ umbenennen (ist zulässig), dann passen wenigstens die Vorsilben Wirk-, Blind- und Schein- zueinander.

Leider passiert bei den drei Leistungen noch etwas, was zwar gut gemeint ist, jedoch für viel Verwirrung sorgt. Sie bekommen unterschiedliche Einheiten (kein Witz).

Unterscheidung der Leistungen			
	Wirkleistung	Blindleistung	Scheinleistung
Formel	$P = U\,I\cos\varphi$	$Q = U\,I\sin\varphi$	$S = U\,I$
Einheit	W	var	VA

Physikalisch gilt: 1 W = 1 var = 1 VA.

Ein ähnliches Vorgehen haben wir bei den Frequenzen und Kreisfrequenzen erlebt. Beide haben die physikalische Einheit $\frac{1}{s}$. Im Falle der Frequenz f (ohne Kreis) wird $\frac{1}{s}$ in Hz (Hertz) umbenannt, bei der Kreisfrequenz ω nicht.

Hier gilt: Alle drei Leistungsarten berechnen sich als Produkt aus U und I, haben also die Einheit V·A. Im Falle der Scheinleistung S bleibt es bei VA (Volt-Ampere). Bei der Wirkleistung wird in W (Watt) umbenannt und im Falle der Blindleistung wird in var umbenannt, was für „Volt-Ampere-reaktiv“ steht. Wenn man weiß, dass im Englischen die Blindleistung *reactive power* genannt wird, macht diese Einheit zumindest ein wenig Sinn. Aber diese Kleinbuchstaben, gehts noch?

’var’ nimmt auf meiner privaten Liste der unsinnigsten Einheitenumbenennungen einen unangefochtenen ersten Platz ein. Die gelungensten Umbenennungen, finde ich, sind

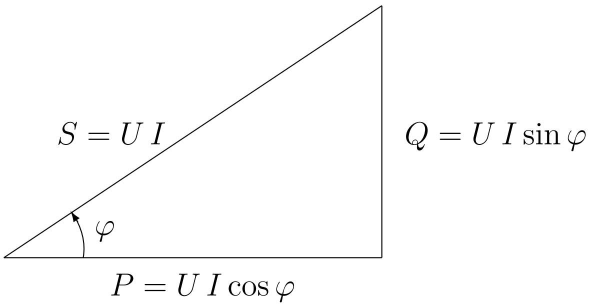
Newton und Volt. Trotzdem, es gibt in der Klausur Punktabzüge, wenn die falsche Leistungseinheit verwendet wird.

Es wird ein Leistungsfaktor λ (kleines griechisches lambda) definiert

$$\lambda = \frac{P}{S} \leq 1, \qquad \lambda = \cos\varphi$$

Vorsicht: Dieser Zusammenhang fehlt leider in den erlaubten Hilfsmitteln. Er muss auf Ihrem legalen Pfuschzettel stehen, genau wie das folgende Leistungsdreieck.

Alle drei Leistungsarten können im Leistungsdreieck graphisch dargestellt werden.



Arbeiten

Bei zeitlich konstanten Leistungen (der pendelnde Leistungsanteil ist inzwischen durch die Rechengröße 'Blindleistung Q' ersetzt, die sehr wohl als konstant angesehen werden kann) gilt über die Zeitdauer t, angegeben in Stunden:

Unterscheidung der Arbeiten			
	Wirkarbeit	Blindarbeit	Scheinarbeit
Formel	$W = U\,I\,t\cos\varphi$	$W_q = U\,I\,t\sin\varphi$	$W_s = U\,I\,t$
Einheit	Wh	varh	VAh

Physikalisch gilt: 1 Wh= 1 varh = 1 VAh.

Auch hier muss ich lästern. Die Wirkarbeit mit dem Formelzeichen W (ohne Index) zu versehen, die anderen beiden jedoch mit Index W_q und W_s, verstößt gegen einen vernünftigen Brauch: Kein Index = Oberbegriff – mit Index = spezifizierter Begriff. Wenn man mich gefragt hätte, gäbe es jetzt W_P, W_Q, W_S. Mich fragt aber keiner. Nun müssen Sie mit W, W_q, W_s leben. Die schönste Einheit unter der Sonne ist übrigens 'kvarh': Kilo-Volt-Ampere-reaktiv-Stunden.

6.4.1 Übungsaufgabe

Die folgenden Schaltelemente werden einzeln an 230 V, 50 Hz angeschlossen.

$R = 220\ \Omega$, $C = 5\ \mu$F, $L = 0,3$ H.

Ges.: Für jedes einzelne Bauteil Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung, Leistungsfaktor,

Arbeit bzw. Blindarbeit für 4 Stunden Betrieb.

Sie müssen die Sinus- und Kosinuswerte für 0°, +90° und –90° parat haben. Insbesondere die Vorzeichen sind wichtig. Auf Ihren legalen Pfuschzettel gehört ein Sinus- und ein Kosinusverlauf, der von -90° bis +360° reicht.

Widerstand R**:** Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 0^o$

$$\begin{aligned}
\text{Wirkleistung} \qquad & P = U\,I\,\cos\varphi \\
& P = U\,I = \frac{U^2}{R} = 240,5\ \text{W} \\
\text{Blindleistung} \qquad & Q = U\,I\,\sin\varphi \\
& Q = 0 \\
\text{Scheinleistung} \qquad & S = U\,I = \sqrt{P^2 + Q^2} \\
& S = 240,5\ \text{VA} \\
\text{Leistungsfaktor} \qquad & \lambda = \cos\varphi = 1 \\
\text{Wirkarbeit} \qquad & W = U\,I\,t\,\cos\varphi \\
& W = P\,t = 0,962\ \text{kWh} \\
\text{Blindarbeit} \qquad & W_q = U\,I\,t\,\sin\varphi \\
& W_q = Q\,t = 0
\end{aligned}$$

Kondensator C**:** Phasenverschiebungswinkel $\varphi = -90^o$

$$\begin{aligned}
\text{Wirkleistung} \qquad & P = U\,I\,\cos\varphi \\
& P = 0
\end{aligned}$$

Blindleistung $Q = U\, I\, \sin\varphi$

$Q = -U\, I, \qquad I = U\, \omega\, C$

$Q = -U^2\, \omega\, C = -83\ \text{var}$

Scheinleistung $S = U\, I = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$S = 83\ \text{VA}$

Leistungsfaktor $\lambda = \cos\varphi = 0$

Wirkarbeit $W = U\, I\, t\, \cos\varphi$

$W = 0$

Blindarbeit $W_q = U\, I\, t\, \sin\varphi$

$W_q = -U\, I\, t = Q\, t = -0,33\ \text{kvarh}$

Spule/Induktivität L: Phasenverschiebungswinkel $\varphi = +90^o$

Wirkleistung $P = U\, I\, \cos\varphi$

$P = 0$

Blindleistung $Q = U\, I\, \sin\varphi$

$$Q = U\, I, \qquad I = \frac{U}{\omega\, L}$$

$$Q = \frac{U^2}{\omega\, L} = 561,2\ \text{var}$$

Scheinleistung $S = U\, I = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$S = 561,2\ \text{VA}$

Leistungsfaktor $\lambda = \cos\varphi = 0$

Wirkarbeit $W = U\, I\, t\, \cos\varphi$

$W = 0$

Blindarbeit $W_q = U\, I\, t\, \sin\varphi$

$W_q = U\, I\, t = Q\, t = +2,25\ \text{kvarh}$

6.4.2 Übungsaufgabe

Die 3 Schaltelemente der vorigen Aufgabe werden gleichzeitig eingeschaltet:

$R = 220\ \Omega$, $C = 5\ \mu$F, $L = 0,3$ H. Ges.: Wirk-, Blind-, Scheinleistung, Netzstrom, Phasenverschiebungswinkel, Zeigerbild, Leistungsdreieck.

Es handelt sich um eine Parallelschaltung aller Elemente. Zur Erinnerung, es gilt nach wie vor $U = 230$ V, $f = 50$ Hz.

Wirkleistung $$P = U\,I\,\cos\varphi$$

$$P = U\,I = \frac{U^2}{R}$$

$$P = 240,5 \text{ W}$$

Blindleistung $$Q = U\,I\,\sin\varphi$$

$$Q = Q_L + Q_C = \frac{U^2}{\omega\,L} - U^2\,\omega\,C = U^2\left(\frac{1}{\omega\,L} - \omega\,C\right)$$

$$Q = 478,2 \text{ var}$$

Scheinleistung $$S = U\,I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = 535,3 \text{ VA}$$

Netzstrom $$I = \frac{S}{U}$$

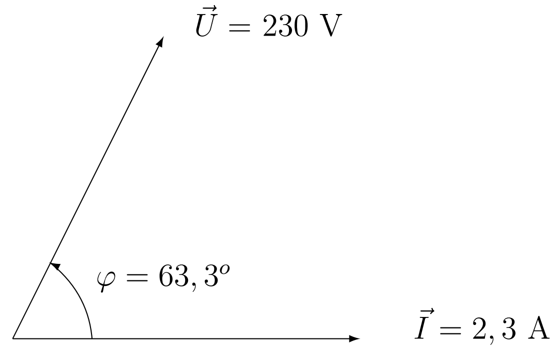
$$I = 2,3 \text{ A}$$

Phasenverschiebungswinkel $$\cos\varphi = \frac{P}{S} \qquad \varphi = \arccos\frac{P}{S}$$

$$\lambda = \cos\varphi = 0,5 \qquad \varphi = +63,3^o.$$

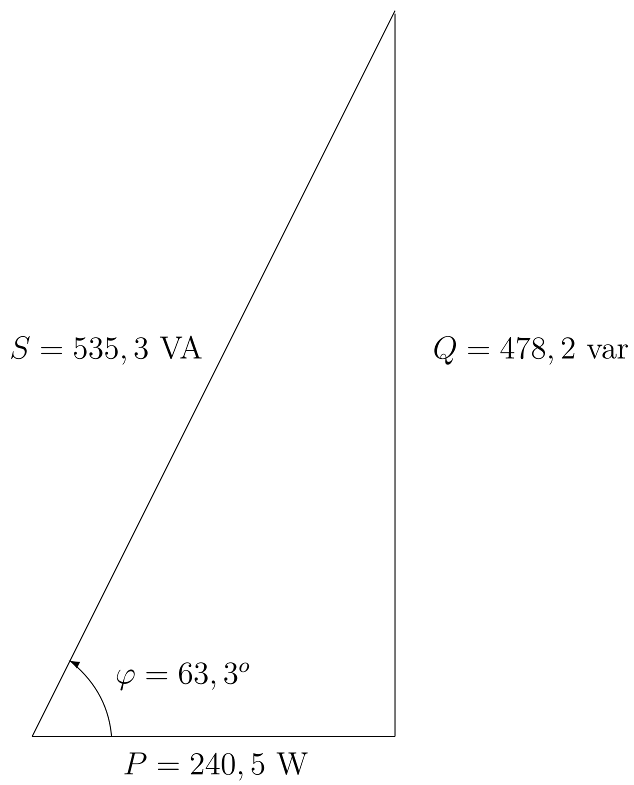
Zeigerbild.

Man wähle sich einen geeigneten Maßstab (z. B. 1 A → 2 cm, 100 V → 2cm).



Leistungsdreieck

Man wähle sich einen geeigneten Maßstab (z. B. 100 W, VA, var → 2 cm).



6.5 Wechselstromkreise

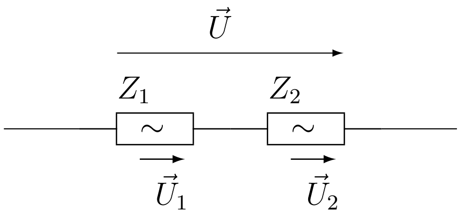
Die Kirchhoffschen Regeln gelten weiter. Allerdings mit den Momentanwerten

$$\sum \vec{i}_{\mathrm{zu}} = \sum \vec{i}_{\mathrm{ab}}, \qquad \sum \vec{u} = 0.$$

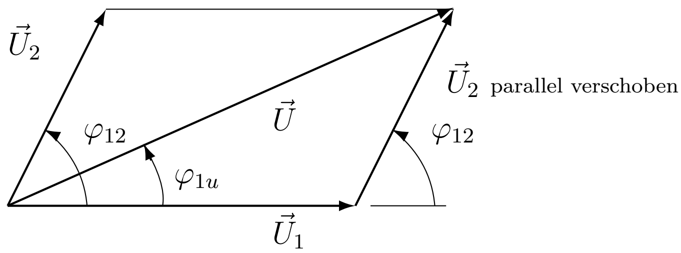
Bei sinusförmigen Wechselströmen gilt auch

$$\sum \vec{I}_{\mathrm{zu}} = \sum \vec{I}_{\mathrm{ab}}, \qquad \sum \vec{U} = 0.$$

Also Zeiger addieren, nicht Zahlenwerte, ein Beispiel:



$\vec{U}_1$ und $\vec{U}_2$ seien um den Winkel φ_{12} versetzt (alles willkürlich angenommen).



Mit zeichnerischen Mitteln ist $\vec{U}$ und φ_{1u} leicht zu ermitteln. Rechnerisch muss der Kosinussatz bemüht werden.

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2\,U_1\,U_2\,\cos\varphi_{12}$$
$$\cos\varphi_{1u} = \frac{U^2 + U_1^2 - U_2^2}{2\,U\,U_1}$$

In den letzten beiden Formeln wurden die Vektorpfeile nicht vergessen, es geht tatsächlich um die Beträge der Effektivwerte.

Wir sind uns einig, dass diese Vorgehensweise mit dem Kosinussatz niemanden befriedigt. Versuchen Sie spaßenshalber nach U_1 aufzulösen. Spätestens da hört der Spaß auf. Auch bei der letzten Übung beschlich Sie vermutlich ein unangenehmes Gefühl (mehr als sonst), weil Sie sich fragten, wäre ich auf diesen Rechenweg selbst gekommen?

Wir brauchen eine praktikable Lösung oder besser gesagt, einen praktikablen Werkzeugkasten, mit dem diese Probleme gelöst werden können. Wir stellen fest, dass unsere Vektoren immer in einer Ebene liegen. Da gab es doch etwas?

Die komplexen Zahlen sind hier überaus hilfreich. Sie werden das möglicherweise nicht als gute Nachricht verstehen, da Sie sich in Mathe gefragt haben, was soll dieser Mist mit der Wurzel aus –1, das braucht doch keiner, hoffentlich ist das bald vorbei.

Der Gedanke hierzu sei kurz erläutert: Widerstände erzeugen keine Phasenverschiebung: $\varphi = 0$. Strom- und Spannungspfeile könnten beide nach rechts zeigen. Dahin zeigt auch der positive Ast der Realteilachse in der Gaußschen Zahlenebene.

Spulen verursachen eine Phasenverschiebung von $\varphi = +90^o$. Wenn der Strom nach rechts zeigt, zeigt die Spannung nach oben wie der positive Ast der Imaginärteilachse.

Kondensatoren verursachen eine Phasenverschiebung von $\varphi = -90^o$. Wenn der Strom nach rechts zeigt, zeigt die Spannung nach unten wie der negative Ast der Imaginärteilachse. Es lohnt sich also, die komplexen Zahlen noch einmal näher anzuschauen und festzustellen, dass die Wurzel aus –1 eine tolle Sache ist. Na gut, ich korrigiere, doch zu etwas nützlich ist.

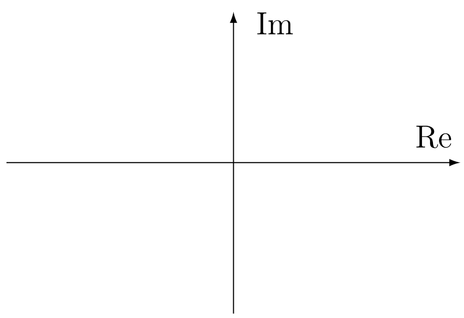
Wiederholung der Komplexen Zahlen

Es gilt

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{-1} \qquad \text{mit } j\text{: imaginäre Einheit} \\ j^2 &= -1 \end{aligned}$$

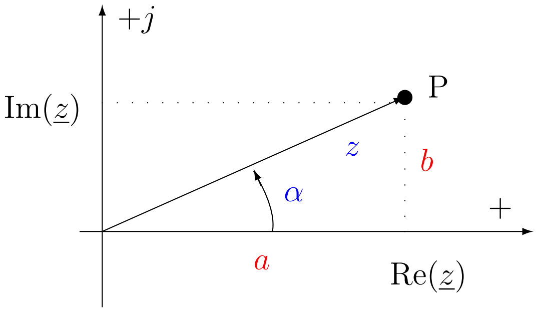
Sollten Sie in Mathematik die imaginäre Einheit als i kennengelernt haben, so müssen Sie umdenken; i ist schon an den Strom vergeben; j ist ab jetzt angesagt.

Gaußsche[28] Zahleneben mit Achsen für Realteile und Imaginärteile



[28]Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 bis 1855

Eine komplexe Zahl $\underline{z} = a + j\,b$ ist ein Punkt P in dieser Ebene. Beachten Sie die alternative Achsenbezeichnung, beide sind zulässig. Da wir in der Elektrotechnik keine negativen Realteile erleben werden, sehen wir ab jetzt nur noch den ersten und vierten Quadranten.



Wir erkennen zwei Darstellungsarten von Komplexen Zahlen (rot und blau). Beide werden benötigt.

Komponentenform

$$\underline{z} = a + j\,b = \mathrm{Re}(\underline{z}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{z})$$

a: genannt Realteil von $\underline{z}$, b: genannt Imaginärteil von $\underline{z}$

Exponentialform

$$\underline{z} = z\,e^{j\alpha} = z\,\cos\alpha + j\,z\,\sin\alpha$$

Die Exponentialfunktion beruht auf der Eulerschen[29] Gleichung:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\sin\alpha$$

$z\,e^{j\alpha}$ ist eine symbolische Schreibweise. Wir werden niemals die Taste $\boxed{e^x}$ des Taschenrechners benutzen. Wir werden lediglich den Zahlenwert von z und den Winkelwert von α betrachten und daraus unsere Schlüsse ziehen.

[29]Leonhard Euler, 1707 bis 1783. Nach ihm ist $e = 2,718\ldots$ als Eulersche Zahl benannt

Umwandlungsgleichungen

Wir werden sehr häufig zwischen den beiden Darstellungsarten hin- und her rechnen, weshalb die folgenden Umwandlungsgleichungen präsent sein müssen (Pfuschzettel).

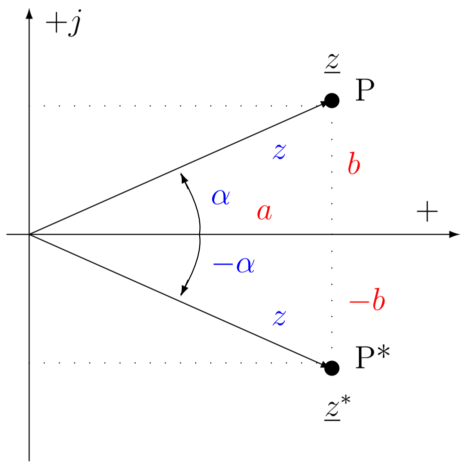
$$\underline{z} = a + j\,b = z\,e^{j\alpha}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}; \qquad \alpha = \arctan\frac{b}{a} \qquad \text{Komp} \to \text{Exp}$$

$$b = z\,\sin\alpha; \qquad a = z\,\cos\alpha \qquad \text{Exp} \to \text{Komp}$$

Konjugiert komplexe Zahl $\underline{z}^*$

Durch Spiegelung an der Re-(+)-Achse entsteht eine konjugiert komplexe Zahl.
Geg: $\underline{z} = a + j\,b$.



Die konjugiert komplexe Zahl, dargestellt durch Punkt P*, lautet

$$\underline{z}^* = a - j\,b, \qquad \underline{z}^* = z\,e^{-j\alpha}.$$

In Mathematik wurden die konjugiert komplexen Zahlen benötigt, um komplexe Nenner zu beseitigen. Diese Problematik werden wir umgehen. Nur an einer einzigen Stelle werden wir eine konjugiert komplexe Zahl benötigen. An dieser Stelle ist aber der Vorzeichenwechsel vor j von entscheidender Bedeutung.

Die folgenden Rechenregeln sorgen dafür, dass wir komplexe Nenner vermeiden.

Addieren und Subtrahieren

werden wir immer in Komponentenform.

$$\underline{z} = \underline{z_1} - \underline{z_2} + \underline{z_3} = a_1 + j\,b_1 - (a_2 + j\,b_2) + a_3 + j\,b_3$$

$$\underline{z} = (a_1 - a_2 + a_3) + j\,(b_1 - b_2 + b_3) = a + j\,b$$

Die Realteile werden sortenrein verrechnet, die Imaginärteile werden sortenrein verrechnet. Auf Vorzeichen ist genau zu achten.

Multiplizieren und Dividieren

werden wir immer in Exponentialform.

$$\underline{z} = \frac{\underline{z_1}\,\underline{z_2}}{\underline{z_3}} = \frac{z_1\,e^{j\alpha_1}\,z_2\,e^{j\alpha_2}}{z_3\,e^{j\alpha_3}}$$

$$\underline{z} = \frac{z_1\,z_2}{z_3} \cdot e^{j(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)} = z\,e^{j\alpha}$$

Die Beträge z werden nach Vorgabe multipliziert und dividiert. Die Winkel werden addiert bzw subtrahiert. Bei den Winkeln wird aus Multiplikation Addition und aus Division Subtraktion.

Weitere Besonderheiten

$$e^{j0} = 1; \qquad e^{j90^o} = j; \qquad e^{-j90^o} = -j; \qquad j^2 = -1; \qquad \frac{1}{j} = -j.$$

Erstamals sehen wir eine Notation, die furchtbar falsch ist: e^{j90^o}. In einem Exponenten darf eigentlich keine einheitenbehaftete Zahl stehen. Da wir die e-Funktion jedoch nie „ausrechnen“ sondern nur als eine Art Kurzschrift betrachten (der Betrag steht als Faktor davor, der Winkel steht mit Vorzeichen im Exponenten beim j), ist es in der Elektrotechnik üblich und zulässig, in den Exponenten Winkel in Grad einzutragen. Puristen verwenden natürlich Bogenmaß, wir dürfen in Grad denken und schreiben.

Diese Vorgehensweise (Addieren in Komp, Multiplizieren in Exp) vereinfacht unsere Rechnungen ungemein. Die Vereinfachung liegt nicht in einer Abkürzung der Rechnung sondern in einer Standardisierung der Rechnung. Durch die permanente Anwendung der Umwandlungsgleichungen müssen wir nie selbst darauf kommen, dass wir mal eine Pythagoras, mal einen Arcustangens, mal einen Sinus, mal einen Kosinus anwenden müssen. Wir werden auch nie einen komplexen Nenner in Komponentenform erleben, den wir mühsam beseitigen müssen. Können Sie sich daran erinnern? Konjugiert komplex erweitern, was für ein Umstand, das brauchen wir nicht.

7.1.1 Übungsaufgabe

Gegeben sei $\underline{z}_1 = 12 - j18$, $\underline{z}_2 = 5 \cdot e^{-j53^o}$,

Ges.: $\underline{z}_1$ in Exponentialform, $\underline{z}_2$ in Komponentenform.

Komponentenform: $\underline{z} = a + j\,b$, Exponentialform: $\underline{z} = z\,e^{j\alpha}$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}; \qquad \alpha = \arctan\frac{b}{a} \qquad \text{Komp} \rightarrow \text{Exp}$$

$$b = z\,\sin\alpha; \qquad a = z\,\cos\alpha \qquad \text{Exp} \rightarrow \text{Komp}$$

$$\underline{z}_1 = 21{,}6 \cdot e^{-j56^o}; \qquad \underline{z}_2 = 3{,}0 - j\,4{,}0$$

Bitte beachten Sie: Nach einer Umwandlung muss vor der imaginären Einheit j das gleiche Vorzeichen erscheinen. Da wir nur im ersten und vierten Quadranten unterwegs sind, können wir uns darauf verlassen und können unser Rechenergebnis überprüfen. Die Vorzeichen sind bei diesem Thema das größte Problem.

7.1.2 Übungsaufgabe

Geg.: $\underline{z}_1 = 4 - j\,3, \qquad \underline{z}_2 = 2 + j\,5, \qquad \underline{z}_3 = 4 - j\,6, \qquad \underline{z}_4 = 1 + j\,2.$

Ges.:

a) $\underline{z}_A = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 - \underline{z}_3 + \underline{z}_4$

b) $\underline{z}_B = \frac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2}{\underline{z}_3 \cdot \underline{z}_4}$

c) $\underline{z}_C = \frac{(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) \cdot \underline{z}_3}{\underline{z}_4}$

a) Addition und Subtraktion (Strichoperationen) erfolgen in Komponentenform

$$\underline{z}_A = (4 - 2 - 4 + 1) + j\,(-3 - 5 + 6 + 2)$$

$$\underline{z}_A = -1 + j\,0, \qquad \underline{z}_A = -1 \qquad \text{(Zufall)}$$

b) Multiplikation und Division (Punktoperationen) erfolgen in Exponentialform. Daher wandeln wir alle gegebenen Größen in Exponentialform (Komp → Exp).

$$\underline{z}_1 = 5 \cdot e^{-j36{,}9^o}, \qquad \underline{z}_2 = 5,4 \cdot e^{+j68{,}2^o}, \qquad \underline{z}_3 = 7,2 \cdot e^{-j56{,}3^o}, \qquad \underline{z}_4 = 2,2 \cdot e^{+j63{,}4^o}$$

$$\underline{z}_B = \frac{5 \cdot 5,4}{7,2 \cdot 2,2} \cdot e^{j\,(-36{,}9^o + 68{,}2^o + 56{,}3^o - 63{,}4^o)}$$

$$\underline{z}_B = 1,7 \cdot e^{j24{,}2^o}.$$

c) Der Klammerausdruck $(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)$ muss zunächst in Komponentenform aufaddiert werden, das Zwischenergebnis wird Komp → Exp gewandelt, anschließend werden die Punktoperationen in Expontendarstellung durchgeführt.

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = \underline{z}_5, \qquad \underline{z}_5 = 6 + j\,2 = 6,33 \cdot e^{j18{,}4^o}.$$

$$\underline{z}_C = \frac{\underline{z}_5 \cdot \underline{z}_3}{\underline{z}_4}$$

$$\underline{z}_C = \frac{6,33 \cdot 7,2}{2,2} \cdot e^{j(18{,}4^o - 56{,}3^o - 63{,}4^o)}$$

$$\underline{z}_C = 20,7 \cdot e^{-j101{,}3^o}$$

Das Ergebnis von Aufgabenteil c) kann kein elektrotechnisches sein, da (Phasenverschiebungs-) Winkel > +90° oder < –90° in ET nicht vorkommen. Macht nichts, das hier ist eine wertfreie Übung.

7 Komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen

Die Gaußsche Zahlenebene der komplexen Zahlen bietet sich als Rechenhilfe an.

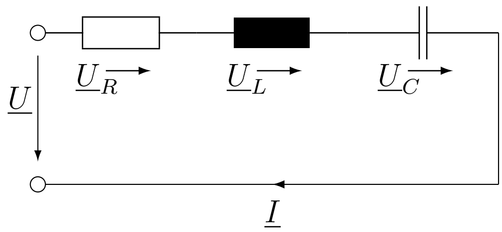
Zur Erinnerung: Unsere drei Bauteile erzeugen charakteristische Phasenverschiebungswinkel.

Widerstand $\varphi = 0^o$, ideale Spule $\varphi = +90^o$, Kondensator $\varphi = -90^o$.

Tatsächliche Spulen sind üblicherweise nicht ideal und haben wegen des Drahtwiderstands einen Phasenverschiebungswinkel $\varphi < +90^o$. Kondensatoren sind per se „ziemlich ideal“, da der Widerstand der kurzen Anschlussdrähte kaum ins Gewicht fällt. Daher fehlt der Hinweis 'idealer Kondensator'.

7.1 Komplexe Spannungen und Ströme

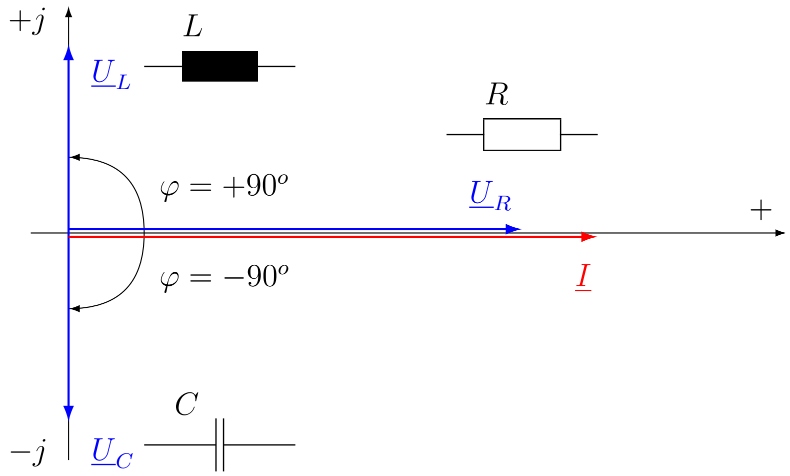
Ein Strom $\underline{I}$ fließe durch eine Reihenschaltung von R, L und C.



Der durch alle Bauteile fließende Strom $\underline{I}$ wird als Bezug gewählt d.h., er wird willkürlich als realer Strom angenommen

$$\underline{I} = I\, e^{j0^o}$$

Die Spannungen stellen sich auf Grund der bekannten Phasenverschiebungswinkel ein.



Mit $\quad \underline{I} = I \cdot e^{j0^o} \quad$ gilt

$$\underline{U}_R = U_R \cdot e^{j0^o} = I\,R$$

$$\underline{U}_L = U_L \cdot e^{j(+90^o)} = j\,I\,X_L = I\,j\,\omega L$$

$$\underline{U}_C = U_C \cdot e^{j(-90^o)} = -j\,I\,X_C = I\left(-j\,\frac{1}{\omega C}\right)$$

Für die Blindwiderstände von L und C werden daher die folgenden komplexen Größen definiert:

$$\underline{X}_L = j\,X_L = j\,\omega L$$

$$\underline{X}_C = -j\,X_C = -j\,\frac{1}{\omega C}$$

Die Phasenverschiebungswinkel +90°, –90° von Spule und Kondensator sind nun in den komplexen Blindwiderständen fest verankert.

Allgemein gilt für einen passiven Zweipol

$$\underline{U} = \underline{I}\,\underline{Z}.$$

Aus Gleichstromzeiten wissen wir, wie wir mit Parallelschaltungen von zwei Widerständen umgehen müssen.

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Mit komplexen Widerständen $\underline{X}_L$, $\underline{X}_C$ oder $\underline{Z}$ macht das keinen Spaß, da wir sehr häufig die Darstellungsform wechseln müssen. Wir werden uns angewöhnen, beim Auftauchen von Parallelschaltungen die Leitwerte zu bemühen, die natürlich auch komplexe Zahlen sind.

Besteht die Notwendigkeit mit Leitwerten zu rechnen, so gilt

$$
\begin{aligned}
&\text{Widerstand:} && G = \frac{1}{R} \qquad \text{Leitwert}\\
&\text{Induktivität:} && \underline{B}_L = \frac{1}{\underline{X}_L} = \frac{1}{j\,X_L} = \frac{1}{j\,\omega L} = -j\,\frac{1}{\omega L}\\
&\text{ind. Blindleitwert} && \underline{B}_L = -j\,\frac{1}{\omega L}\\
&\text{Kapazität:} && \underline{B}_C = \frac{1}{\underline{X}_C} = \frac{1}{-j\,X_C} = \frac{1}{-j\,\frac{1}{\omega C}} = j\,\omega C\\
&\text{kap. Blindleitwert} && \underline{B}_C = j\,\omega C\\
&\text{passiver Zweipol:} && \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \qquad \text{Scheinleitwert}
\end{aligned}
$$

Alle Leitwerte sind auf Seite 7 des Hilfsmittels aufgelistet. Wer sich auf die komplexe Rechnung einlässt, wird mit den Widerständen einigermaßen klar kommen, zumal es die idiotische Eselsbrücke für den Kondensator gibt. Die zwei Striche des Kondensators tauchen auch bei $\underline{X}_C$ auf, als Minuszeichen und als Bruchstrich. Bei den Leitwerten ist alles umgekehrt, daher rate ich Ihnen, bei Leitwerten sauber von Seite 7 abzuschreiben und nur die Widerstände auswendig vorzuhalten.

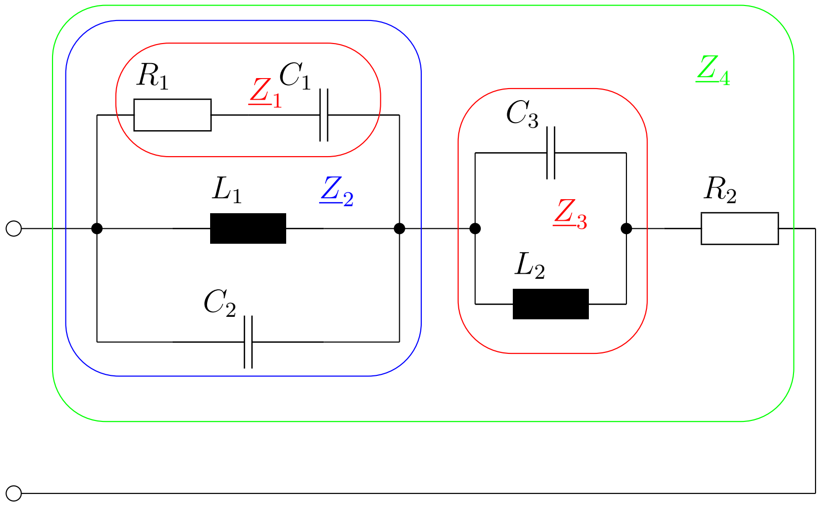
Wer jetzt denk „was raucht der denn, ich und auswendig lernen?“ kann natürlich auch die blinden Widerstände von Seite 7 abschreiben.

7.2 Komplexe Widerstände und Leitwerte in Wechselstromschaltungen

Häufiges Problem: Eine Schaltung ist aus einzelnen Komponenten R, L, C aufgebaut. Es sind Reihenschaltungen und/oder Parallelschaltungenzu finden. Gesucht ist der komplexe Gesamtscheinwiderstand.

Wir betrachten ein abschreckendes Besipiel. So umfangreich wird es nie wieder werden. Es geht nur ums Prinzip.

Beispiel:



Lösung: Die Schaltung wird in Teile zerlegt, die aus reinen Parallelschaltungen bzw. reinen Reihenschaltungen besteht. Diese Teile werden als passive Zweipole betrachtet und deren komplexer Scheinwiderstand berechnet. Wir gehen von innen nach außen, von untergeordnet zu übergeordnet vor.

Hier:

- R_1 und C_1 bilden $\underline{Z}_1$ (Reihenschaltung)
- $\underline{Z}_1$, L_1 und C_2 bilden $\underline{Z}_2$ (Parallelschaltung)
- C_3 und L_2 bilden $\underline{Z}_3$ (Parallelschaltung)
- $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und R_2 bilden $\underline{Z}_4$ (Reihenschaltung)
- $\underline{Z}_4$ ist der komplexe Scheinwiderstand der Gesamtschaltung

Reduktion auf zwei Teilprobleme

1. Reihenschaltung von R, L, C und/oder $\underline{Z}_1$, Gesucht ist der komplexe Scheinwiderstand $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R + j\left(X_L - X_C\right) + \underline{Z}_1$$

   Es gilt auch

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

2. Parallelschaltung von R, L, C und/oder $\underline{Z}_1$. Wichtig: Bei Parallelschaltungen müssen wir mit Leitwerten rechnen. Gesucht wird der komplexe Leitwert der Parallelschaltung $\underline{Y}$.
$$\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) + \underline{Y}_1$$
Es gilt auch
$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\varphi}} = Y \cdot e^{-j\varphi}$$

Hier stehen die entscheidenden Formeln für die Berechnung von Wechselstromschaltungen. Bei Reihenschaltungen verwenden wir ausschließlich

$$\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) + \underline{Z}_1,$$

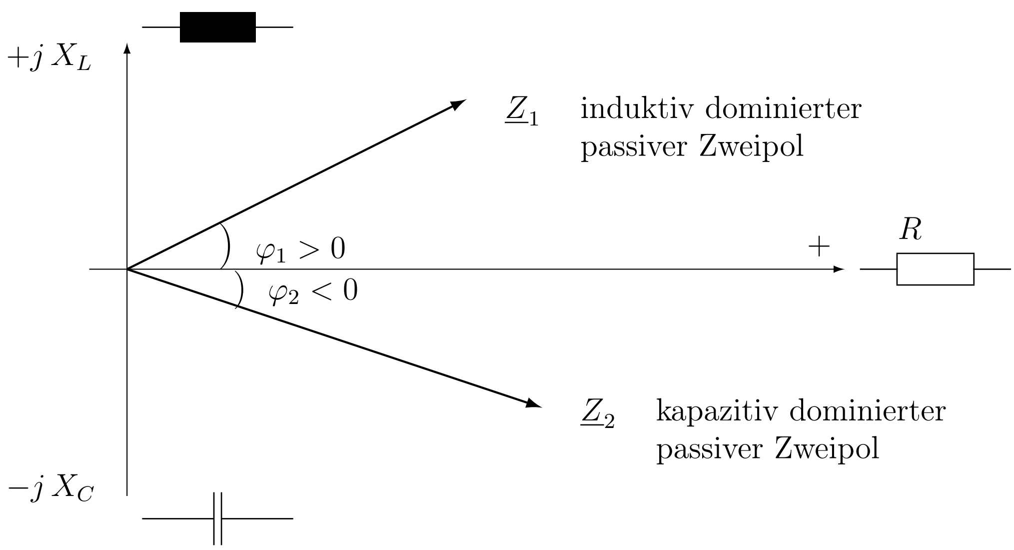
bei Parallelschaltungen hingegen nur

$$\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) + \underline{Y}_1.$$

Sollte in der betrachteten Parallel- bzw Reihenschaltung ein Element fehlen, so wird es schlicht weggelassen. Mit bekanntem $\underline{Z}$ bzw. $\underline{Y}$ können komplexe Ströme oder Spannungen berechnet werden.

Bitte beachten Sie, dass Sie die beiden genannten Gleichungen korrekt übertragen. Die Reihenfolge der Indizes im Klammerausdruck wechselt. Die standardisierte Vorgehensweise erkaufen wir uns mit der Notwendigkeit, häufig die Darstellungsform zu wechseln.

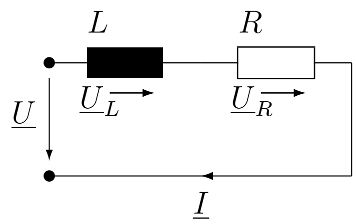
Darstellung von Scheinwiderständen in der komplexen $\underline{Z}$-Ebene



Eine komplexe $\underline{Y}$-Ebene ist denkbar, würde jedoch nur Verwirrung stiften.

7.2.1 Übungsaufgabe

Gegeben ist eine Reihenschaltung aus $R = 240\ \Omega$ und $L = 0,3$ H an $U = 230$ V und $f = 50$ Hz.



Ges.:

a) Komplexer Widerstand und Leitwert der Gesamtschaltung

b) Welcher kompl. Strom $\underline{I}$ stellt sich ein, wenn Sie $\underline{U} = (230 + j\,0)$ V annehmen?

c) Geben Sie den Phasenverschiebungswinkel an

a) Reihenschaltung, daher gilt:

$$\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) + \underline{Z}_1$$

In dieser Schltung fehlt ein Kondensator und ein zusätzlicher passiver Zweipol, daher X_C und $\underline{Z}_1$ streichen. Es gilt

$$\underline{Z} = R + j\,X_L \qquad \text{mit} \qquad X_L = \omega L$$

$$\underline{Z} = (240 + j \cdot 314 \cdot 0,3)\ \Omega$$

$$\underline{Z} = (240 + j \cdot 94,2)\ \Omega, \qquad \underline{Z} = 257,8 \cdot e^{j \cdot 21,4^o}\ \Omega$$

Es ist nie verkehrt, jeweils auch die andere Darstellungsform anzugeben. Wir sehen gleich, dass wir sie in diesem Fall benötigen. Verpflichtend ist es natürlich nicht. Ein gutes Pferd springt auch nur so hoch, wie es muss.

Als nächstes werden wir nach dem komplexen Leitwert gefragt. Die Versuchung liegt nahe, dass wir die 'Leitwertgleichung' $\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) + \underline{Y}_1$ verwenden. Das ergäbe aber einen groben Fehler, da diese Gleichung nur für Parallelschaltungen verwendet werden darf.

Im Falle einer Reihenschaltung gilt

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{257,8 \cdot e^{j \cdot 21,4^o}\ \Omega}$$

$$\underline{Y} = 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 21,4^O}\ \text{S}$$

b)

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \qquad \text{mit} \qquad \underline{U} = (230 + j\,0)\ \text{V} = 230 \cdot e^{j0^o}\ \text{V}$$

$$\underline{I} = \frac{230 \cdot e^{0^o}\ \text{V}}{257,8 \cdot e^{j \cdot 21,4^o}\ \Omega} = \frac{230}{257,8} \cdot e^{j(0^o - 21,4^o)}\ \text{A}$$

$$\underline{I} = 0,89 \cdot e^{-j \cdot 21,4^o}\ \text{A}.$$

Erinnerung: e-Funktionen im Nenner wandern in den Zähler (oder auf die Hauptzeile), indem das Vorzeichen des Exponenten wechselt. Der Winkelbetrag bleibt unverändert! Kommen Sie nicht auf die Idee, den Winkel zu invertieren.

c) Es gibt drei Wege, den Phasenverschiebungswinkel zu bestimmen. Bei dieser ersten Übungsaufgabe zeige ich Ihnen alle Drei Möglichkeiten:

1. Berechnung aus φ_u und φ_i

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i, \qquad \varphi = 0 - (-21,4^o) \qquad \varphi = 21,4^o$$

2. Beim Scheinwiderstand in Exponentialdarstellung $\underline{Z} = Z\, e^{j\varphi}$ ist der Phasenverschiebungswinkel direkt abzulesen.

$$\underline{Z} = 257,8 \cdot e^{j \cdot 21,4^o}\ \Omega \qquad \varphi = 21,4^o$$

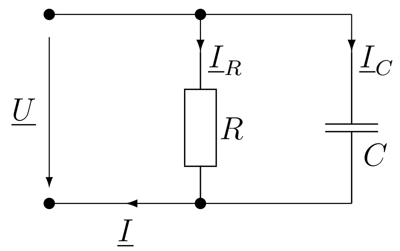
3. Beim Scheinleitwert in Exponentialdarstellung $\underline{Y} = Y\, e^{-j\varphi}$ ist der Phasenverschiebungswinkel mit falschem Vorzeichen zu finden.

$$\underline{Y} = 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 21,4^o}\ \text{S} \qquad \varphi = 21,4^o$$

Möglichkeit 2 ist die eleganteste, man muss nur wissen, wo was steht.

7.2.2 Übungsaufgabe

Gegeben ist eine Paralellschaltung aus $R = 120\ \Omega$ und $C = 6\ \mu$F an $U = 230$ V mit $f = 50$ Hz.



Ges.:

a) Der komplexe Widerstand und Leitwert der Gesamtschaltung

b) $\underline{I}$ habe den Phasenwinkel $\varphi_i = 0^o$; stellen Sie die komplexe Spannung und den komplexen Strom dar.

c) Phasenverschiebungswinkel

a) Parallelschaltung, daher gilt:

$$\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) + \underline{Y}_1$$

In dieser Schltung fehlt eine Spule und ein zusätzlicher passiver Zweipol, daher B_L und $\underline{Y}_1$ streichen. Es gilt

$$\underline{Y} = G + j\,B_C \qquad \text{mit} \quad G = \frac{1}{R}, \quad B_C = \omega C$$

$$\underline{Y} = (8,33 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,89 \cdot 10^{-3})\ \text{S}, \qquad \underline{Y} = 8,54 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j12,7^o}\ \text{S}$$

Als nächstes werden wir nach dem komplexen Widerstand gefragt. Erneut liegt die Versuchung nahe, dass wir die 'Widerstandsgleichung' $\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) + \underline{Z}_1$ verwenden. Das ergäbe aber einen groben Fehler, da diese Gleichung nur für Reihenschaltungen verwendet werden darf.

Im Falle einer Parallelschaltung gilt

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{8,54 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j12,7^o}\ \mathrm{S}}$$

$$\underline{Z} = 117,1 \cdot e^{-j \cdot 12,7^O}\ \Omega$$

b)

$$\underline{I} = \underline{U}\,\underline{Y}$$

Hier haben wir ein hässliches Problem. Von der Spannung $\underline{U}$ kennen wir den Betrag $U = 230$ V aber nicht den Nullphasenwinkel φ_u. Beim Strom fehlt uns der Betrag I, wir wissen nur, dass $\varphi_i = 0^o$.

Das macht nichts. Eine komplexe Gleichung stellt zwei reale Gleichungen dar, die beide erfüllt sein müssen. Hier im Falle einer Multiplikation (daher Exponentialdarstellung) lauten die beiden zu erfüllenden Gleichungen

$$I = U\,Y \qquad \text{und} \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

$$I = 230\ \mathrm{V} \cdot 8,54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}$$

$$I = 1,96\ \mathrm{A},\ \text{bekannt ist } \varphi_i = 0^o$$

$$\underline{I} = 1,96 \cdot e^{j0^o}\ \mathrm{A}.$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \varphi, \qquad \text{mit} \qquad \varphi = -12,7^o.$$

$$\varphi_u = 0^o - 12,7^o, \qquad \varphi_u = -12,7^o.$$

$$\underline{U} = 230 \cdot e^{-j12,7^o}\ \mathrm{V}.$$

Den Phasenverschiebungswinkel $\varphi = -12,7^o$ haben wir bei $\underline{Z}$ einfach abgelesen oder bei $\underline{Y}$ mit falschem Vorzeichen abgelesen.

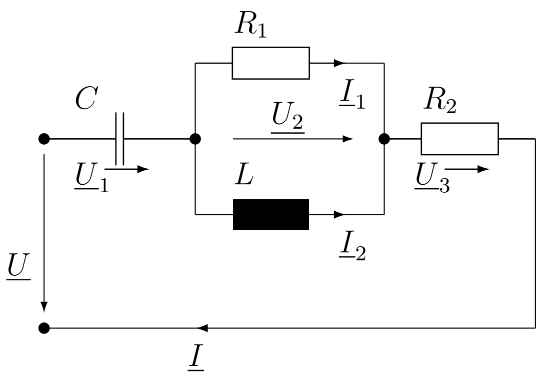
c)

$$\varphi = -12,7^o.$$

Das wussten wir bereits.

7.2.3 Übungsaufgabe

Gegeben ist eine Schaltung mit $C = 220\ \mu$F, $R_1 = 20\ \Omega$, $\omega L = 40\ \Omega$ und $R_2 = 5\ \Omega$. Sie liegt an einer Spannung $\underline{U} = 220 \cdot e^{j30^o}$ V, die Frequenz ist 50 Hz.



Ges.:

a) Komplexer Widerstand der Gesamtschaltung.

b) Der sich einstellende komplexe Strom.

c) Der sich einstellende Phasenverschiebungswinkel.

Ein Element weniger, also C oder R_2 weg und diese Übungsaufgabe ist klausurrelevant. Dies wird Bestandteil der zweiten und durchaus schwierigsten Klausuraufgabe sein.

a) Wir sehen eine kombinierte Reihen- und Parallelschaltung. Hier ist die untergeordnete Parallelschaltung aus R_1 und L Bestandteil einer übergeordneten Reihenschaltung. Wir werden zunächst den komplexen Leitwert der Parallelschaltung berechnen, er heiße $\underline{Y}_1$. Daraus bestimmen wir den komplexen Widerstand $\underline{Z}_1$. Dann können wir den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ der Reihenschaltung aus C, $\underline{Z}_1$ und R_2 bestimmen.

Parallelschaltung $R_1 \mid\mid L$, daher gilt:

$$\underline{Y} = G + j\left(B_C - B_L\right) + \underline{Y}_1$$

In dieser Schltung fehlt ein Kondensator und ein zusätzlicher passiver Zweipol, daher

B_C und $\underline{Y}_1$ streichen. Es gilt

$$\underline{Y_1} = G - j\,B_L \qquad \text{mit} \quad G = \frac{1}{R_1}, \quad B_L = \frac{1}{\omega L}$$

$$\underline{Y_1} = (5.0 \cdot 10^{-2} - j \cdot 2,5 \cdot 10^{-2})\ \mathrm{S}$$

$$\text{Komp} \to \text{Exp}$$

$$\underline{Y_1} = 5,59 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-j26,6^o}\ \mathrm{S}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1}, \qquad \underline{Z}_1 = 17,89 \cdot e^{j26,6^o}\ \Omega$$

$$\text{Exp} \to \text{Komp}$$

$$\underline{Z}_1 = (16 + j\,8)\ \Omega.$$

Da wir bald mit $\underline{Z}_1$ addieren müssen, ist es sinnvoll, $\underline{Z}_1$ sofort von Exponential- in Komponenetenform zu verwandeln.

Nun zur übergeordneten Reihenschaltung. Wir verwenden

$$\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) + \underline{Z}_1$$

In der Reihenschaltung fehlen R_1 und L, da sie in der Parallelschaltung mit $\underline{Z}_1$ enthalten sind. Demzufolge gilt hier:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R_2 - j\,X_C + \underline{Z}_1 \quad \text{mit} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X_C = 14,5\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R_2 + \mathrm{Re}(\underline{Z}_1) - j\,X_C + j\,\mathrm{Im}(\underline{Z}_1)$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = [5 + 16 + j\,(8 - 14,5)]\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = [21 - j\,6,5)]\ \Omega, \qquad \underline{Z}_{\text{ges}} = 21,98 \cdot e^{-j17,2^o}\ \Omega$$

Auch hier müssen wir anschließend im Ohmschen Gesetz eine Punktoperation durchführen, weshalb $\underline{Z}_{\text{ges}}$ gleich Komp → Exp gewandelt wird.

b) Ungewöhnlich in dieser Aufgabe ist, dass eine Spannung mit $\underline{U} = 220 \cdot e^{j30^o}$ in allen Einzelheiten gegeben ist (Vorsicht 220 V nicht 230 V). In anderen Fällen, z.B. in der Klausur, kann die Winkelangabe fehlen. In solchen Fällen wählen wir willkürlich zur bekannten Spannung den denkbar günstigsten Winkel aus, er wäre dann 0°. Hier geht es aber weiter mit $\varphi_u = 30^o$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \qquad \text{mit} \qquad \underline{U} = 220 \cdot e^{j30^o}\ \text{V}$$

$$\underline{I} = \frac{220 \cdot e^{30^o}\ \text{V}}{21,98 \cdot e^{-j \cdot 17,2^o}\ \Omega} = \frac{220}{21,98} \cdot e^{j(30^o + 17,2^o)}\ \text{A}$$

$$\underline{I} = 10,01 \cdot e^{j47,2^o}\ \text{A}.$$

c) Inzwischen wissen wir, dass wir nur bei $\underline{Z}_{\text{ges}}$ nachschauen müssen, um den Phasenverschiebungswinkel φ abzulesen.

$$\varphi = -17,2^o$$

Trotzdem überprüfen wir noch einmal mittels 'pfui'

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i, \quad \varphi = 30^o - 47,2^o, \quad \varphi = -17,2^o.$$

Die Gesamtschaltung stellt einen kapazitiv dominierten passiven Zweipol dar (negativer Phasenverschiebungswinkel). Der Kondensator siegt über die Spule.

7.3 Komplexe Leistung und Arbeit

Wir erwarten bei der komplexen Leistungsberechnung ein Produkt $\underline{U} \cdot \underline{I}$. Das führt aber zu einem **falschen** Ergebnis.

$$\underline{U} \cdot \underline{I} = U\, e^{j\varphi_u} I\, e^{j\varphi_i} = U\, I\, e^{j(\varphi_u + \varphi_i)}$$

Erwartet wird aber ein Ergebnis, in dem der Phasenverschiebungswinkel φ auftaucht.

$$U\, I\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

Abhilfe ohne Beweis: $\underline{I}$ muss konjugiert komplex eingesetzt werden.

$$\underline{S} = \underline{U}\, \underline{I}^* = U\, e^{j\varphi_u} I\, e^{-j\varphi_i} = U\, I\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{S} = \underline{U}\, \underline{I}^* = U\, I\, e^{j\varphi} = S\, e^{j\varphi}$$

$$\underline{S} = S\, \cos\varphi + j\, S\, \sin\varphi = P + j\, Q$$

Um aus der Komplexen Leistung $\underline{S}$ Die Wikleistung P und die Blindleistung Q zu bestimmen wird $\underline{S}$ noch einmal Exp → Komp gewandelt. Der Realteil ergibt P und der Imaginärteil **inklusive Vorzeichen** vor j ergibt Q.

Arbeit

Auch nach komplexer Rechnung gilt die schon bekannte Vorgehensweise zur Berechnung der Arbeit. S, P und Q (alle ohne Strich) sind bekannt (s.o.), bei gegebener Betriebszeit t in Stunden gilt erneut:

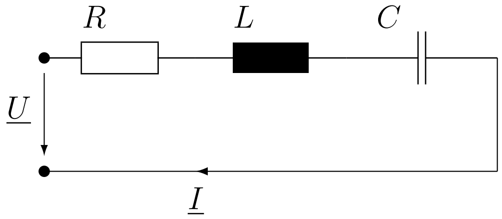
Unterscheidung der Arbeiten			
	Wirkarbeit	Blindarbeit	Scheinarbeit
Formel	$W = P\,t = U\,I\,t\cos\varphi$	$W_q = Q\,t = U\,I\,t\sin\varphi$	$W_s = S\,t = U\,I\,t$
Einheit	Wh	varh	VAh

Achtung: Die Blindleistung Q und damit auch die Blindarbeit W_q kann negativ werden. Das Vorzeichen ist sehr wichtig.

In Klausuren kommt recht häufig ein kapazitiv dominierter komplexer Scheinwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ vor. Wenn dem so ist, gilt $\varphi < 0$, $Q < 0$, $W_q < 0$. Dies ist eine zusätzliche Fehlermöglichkeit. Ich weiß, ich bin gemein.

7.3.1 Übungsaufgabe

Gegeben ist eine Reihenschaltung von $R = 200\ \Omega$, $L = 0,6$ H und $C = 8\ \mu$F an einer Spannung von 230 V und 50 Hz.



Ges.:

Komplexe Leistung, Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung sowie die Wirkarbeit und Blindarbeit für 3 Stunden Betrieb.

Für den neuen Aspekt Leistungen und Arbeit begnügen wir uns mit einer einfachen Schaltung.

Wir benötigen den komplexen Gesamtwiderstand der Schaltung $\underline{Z}$ und können daraus mit Hilfe des Ohmschen Gesetz den komplexen Strom $\underline{I}$ bestimmen. Mit $\underline{U}$ und $\underline{I}$ kann die komplexe Leistung $\underline{S}$ bestimmt werden.

Eine reine Reihenschaltung ist erkennbar, wir verwenden

$$\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) + \underline{Z}_1.$$

Lediglich $\underline{Z}_1$ fehlt und wird gestrichen. Wir benötigen

$$X_L = \omega L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = 188,5\ \Omega, \qquad X_C = 397,9\ \Omega$$

$$\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C)$$

$$\underline{Z} = [200 + j\,(188,5 - 397,9)]\ \ \Omega$$

$$\underline{Z} = [200 - j\,209,4]\ \ \Omega, \quad \underline{Z} = 289,6 \cdot e^{-j46,3^o}\Omega$$

Ohne Angaben zu Nullphasenwinkeln von Strom und Spannung wählen wir willkürlich den günstigsten Fall. Zur bekannten Spannung $U = 230$ V legen wir fest $\varphi_u = 0^o$.

Annahme: $\underline{U} = 230 \cdot e^{j0^o}$ V.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I} = \frac{230 \cdot e^{j0^o}}{289,6 \cdot e^{-j46,3^o}} \text{ A}$$

$$\underline{I} = \frac{230}{289,6} \cdot e^{j(0^o-(-46,3^o))} \text{ A}$$

$$\underline{I} = 0,80 \cdot e^{+j46,3^o} \text{ A}$$

wichtig: $\underline{I}^* = 0,80 \cdot e^{-j46,3^o}$ A

denn: $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*$ Strom konjugiert komplex

$$\underline{S} = 230 \cdot 0,80 \cdot e^{j(0^o-46,3^o)} \text{ VA}$$

Komplexe Leistung: $\underline{S} = 184 \cdot e^{-j46,3^o}$ VA

Scheinleistung: $S = 184$ VA

Exp $\to$ Komp für $\underline{S}$: $\underline{S} = (127,1 - j\,133)$ VA $= P + j\,Q$

Wirkleistung: $P = 127,1$ W

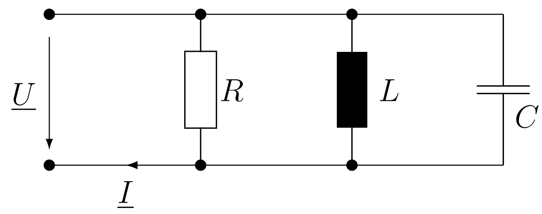
Blindleistung: $Q = -133$ var

Wirkarbeit für 3 h: $W = P\,t$, $W = 0,381$ kWh

Blindarbeit für 3 h: $W_q = Q\,t$, $W_q = -0,399$ kvarh

7.3.2 Übungsaufgabe

Gegeben ist eine Parallelschaltung von $R = 200\ \Omega$, $L = 0,6$ H und $C = 8\ \mu$F an einer Spannung von 230 V und 50 Hz.



Ges.:

Komplexe Leistung, Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung sowie die Wirkarbeit und Blindarbeit für 2 Stunden Betrieb.

Eine reine Parallelschaltung ist erkennbar, wir verwenden

$$\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) + \underline{Y}_1.$$

Lediglich $\underline{Y}_1$ fehlt und wird gestrichen. Wir benötigen

$$G = \frac{1}{R}, \qquad B_C = \omega C, \qquad B_L = \frac{1}{\omega L}$$

$$G = 5 \cdot 10^{-3}\text{ S}, \quad B_C = 2,51 \cdot 10^{-3}\text{ S}, \quad B_L = 5,31 \cdot 10^{-3}\text{ S}$$

$$\underline{Y} = (5 \cdot 10^{-3} - j \cdot 2,80 \cdot 10^{-3})\text{ S}$$

$$\text{Komp} \rightarrow \text{Exp} \qquad \underline{Y} = 5,73 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j29,2^o}\text{ S}$$

Wir berechnen den Strom $\underline{I}$. Hierzu benötigen wir eine komplexe Spannung. Da Vorgaben fehlen, wählen wir willkürlich $\underline{U} = 230 \cdot e^{j0^o} V$. Mit Hilfe des Ohmschen Gesetz für Leitwerte gilt:

$$\underline{I} = \underline{U}\,\underline{Y}$$

$$\underline{I} = 230 \cdot e^{j0^o} \cdot 5,73 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j29,2^o}\text{ A}$$

$$\underline{I} = 1,32 \cdot e^{-j29,2^o}\text{ A}$$

$$\text{wichtig:} \qquad \underline{I}^* = 1,32 \cdot e^{+j29,2^o}\text{ A}$$

denn: $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*$ Strom konjugiert komplex

$\underline{S} = 230 \cdot 1,32 \cdot e^{j(0^o + 29,2^o)}$ VA

Komplexe Leistung: $\underline{S} = 303,6 \cdot e^{+j29,2^o}$ VA

Scheinleistung: $S = 303,6$ VA

Exp → Komp für $\underline{S}$ $\underline{S} = (265,0 + j\,148,1)$ VA $= P + j\,Q$

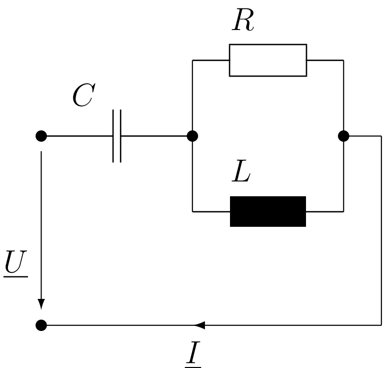
Wirkleistung $P = 265,0$ W

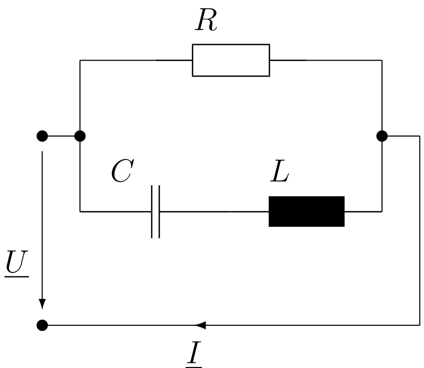
Blindleistung $Q = +148,1$ var

Wirkarbeit für 2 h $W = P\,t,\qquad W = 0,530$ kWh

Blindarbeit für 2 h $W_q = Q\,t,\qquad W_q = +0,296$ kvarh

Damit ist das Thema komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen beendet. In der Klausur wird eine Schaltung aus drei bis vier Elementen auftauchen. Eine Reihenschaltung und eine Parallelschaltung wird kombiniert. Gesucht wird nach den diversen Leistungen. Beispiele:





Beachten Sie bitte die unerwarteten Schwierigkeiten bei der Reihenschaltung C, L im rechten Bild. Sie werden zunächst ein $\underline{Z}_1$ berechnen, das die Gestalt $\underline{Z}_1 = (0 \pm j \cdot 333)\ \Omega$ haben wird (333: Phantasiewert). Für die Kehrwertbildung müssen Sie die Exponentialform bilden. Dabei explodiert Ihr Taschenrechner, denn Sie versuchen durch Null zu teilen. Wie man weiß, kann das nur Chuck Norris. Die Lösung ist einfacher als Sie denken; zeichnen Sie $\underline{Z}_1$ in eine Gaußsche Zahlenebene ein, dann wird sofort klar, wie die Exponentialform aussieht. Probieren Sie es für beide Vorzeichen $\pm$ aus.

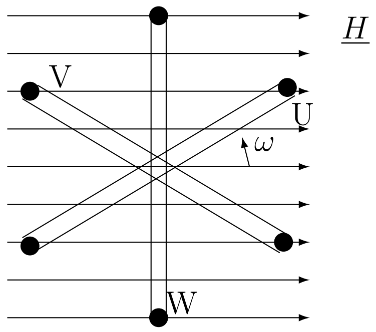
Von Semester zu Semester wandern die drei Elemente im Kreis. Alle sechs Semester beginnt das Spiel von Neuem mit anderen Zahlenwerten. Rechnen Sie ferner mit Gemeinheiten wie U = 220 V 50 Hz; 230 V, 50 Hz; 110 V, 60 Hz; … .

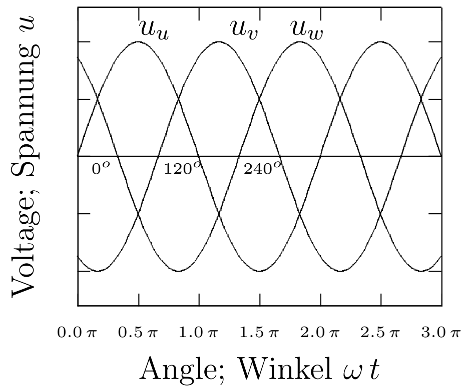
8 Drehstrom

Wir wenden uns dem letzten Kapitel zu. Es ist im Volltext in den erlaubten Hilfsmittel abgedruckt. Sie werden feststellen, dass dieses Thema wesentlich einfacher ausfällt, als die einleitenden Herleitungen es vermuten lassen.

In einem Magnetfeld drehen sich drei identische, um je 120^o versetzte Spulen, sie werden zunächst mit U, V, W bezeichnet.

In den Spulen eines solchen Drehstromgenerators, auch Stränge genannt, werden Spannungen von gleichem Effektivwert und gleicher Frequenz induziert. Einziger Unterschied ist die Phasenverschiebung von jeweils 120^o.





Die in einem Strang induzierte Spannungsamplitude ist

$$\hat{u}_{st} = \sqrt{2}\, U_{st} = \omega\, N_{st}\, \Phi_{max}.$$

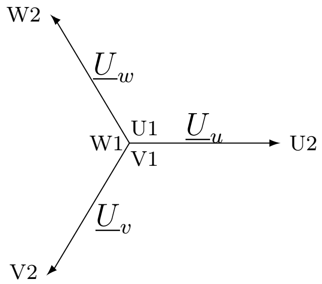
Die Wicklungen der Spulen haben genormte Anschlussbezeichnungen:

Wicklungsanfänge:	U1, V1, W1,
Wicklungsenden:	U2, V2, W2.

Die Gleichungen für die drei Strangspannungen lauten

$$u_u = \sqrt{2}\, U_{st}\, \sin(\omega t), \qquad u_v = \sqrt{2}\, U_{st}\, \sin(\omega t - 120^o), \qquad u_w = \sqrt{2}\, U_{st}\, \sin(\omega t - 240^o).$$

Darstellung der drei Spannungen im Zeigerbild:



Hier passiert etwas, was bei der komplexen Rechnung nie passiert ist. Wir erkennen Nullphasenwinkel $> 90°$. Wir müssen nun umdenken. Wir verlassen die komplexe Rechnung gänzlich. Nullphasenwinkel von 120° oder 240° entstehen durch die geometrische Anordnung unserer drei Spulen (Stränge) im Magnetfeld. Nicht etwa dadurch, dass Spule oder Kondensator an der Phase schiebt.

8.1 Verkettung der Stränge

Mit sechs Leitern könnten die Spannungen der drei Stränge vom Generator zum Verbraucher geführt werden. Durch „Verkettung“ kann die Zahl der notwendigen Leiter auf vier oder gar drei reduziert werden.

Wer mit offenen Augen durch die Landschaft fährt, wird an den meisten Hochspannungsleitungen ($U \geq 110$ kV) zwar sechs Leiterseile sehen (so heißen die Kabel wirklich). Tatsächlich sind auf solchen Trassen zwei voneinander unabhängige Übertragungen vorgesehen (drei links vom Mast, drei rechts vom Mast). Auf den Mastspitzen ist noch ein siebtes Leiterseil angeordnet. Es ist leitend mit jedem Mast verbunden, dient als Blitzableiter und wird daher Blitzfangseil genannt. Weitere Kabel ohne erkennbare Isolatoren können Glasfaserkabel fürs Internet sein. Mittelspannungs-Freileitungen ($U = 20$ kV) im ländlichen Raum haben tatsächlich nur drei Leiterseile und kein Blitzfangseil. Dieser Mangel hat vor Jahren die Elektronik meiner Heizung entschärft. Kaum noch vorhanden sind Niederspannungs-Freileitungen ($U = 400$ V) zu einzelnen Häusern. Dort waren früher vier Leiterseile sichtbar. Inzwischen wird die Niederspannungsversorgung mit vierpoligen Erdkabeln vorgenommen.

Es gibt zwei Arten der Verkettung

Sternschaltung

Die Strangenden U2, V2, W2 werden im Sternpunkt miteinander verbunden. Die Stranganfänge U1, V1, W1 werden mit drei Leitern, den Außenleitern L_1, L_2, L_3 verbunden (sog.

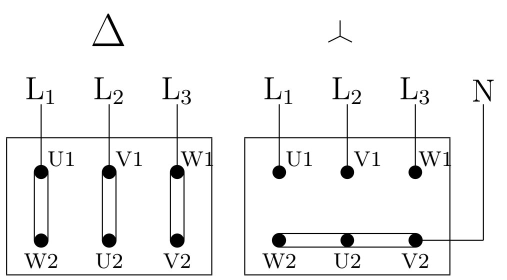
Drehstrom 3-Leiternetz). Stellen Sie sich hilfsweise einen Mercedesstern vor. Zusätzlich kann der Neutralleiter N, verbunden mit dem Sternpunkt, mitgeführt werden (Drehstrom 4-Leiternetz); letzteres ist üblich beim öffentlichen Niederspannungs-Verteilernetz.

Dreieckschaltung

Ein Strangende (z.B. U_2) wird mit dem nächsten Stranganfang (V_1) verbunden. Die so entstehenden drei Verbindungsstellen werden mit den Außenleitern L_1, L_2, L_3 verbunden (Drehstrom 3-Leiternetz). Eine solche Verkettung ist üblich bei Hochspannungsnetzen.

Die drei Leiterseile einer Mastseite sind die drei Außenleiter L_1, L_2, L_3. Sie haben keine feste Anordnung am Mast. Tatsächlich werden alle paar Kilometer die Anordnungen an Verdrillmasten vertauscht.

Reale Ausführung von Stern- und Dreieckschaltung an genormten Anschlusskästen von Elektromaschinen:

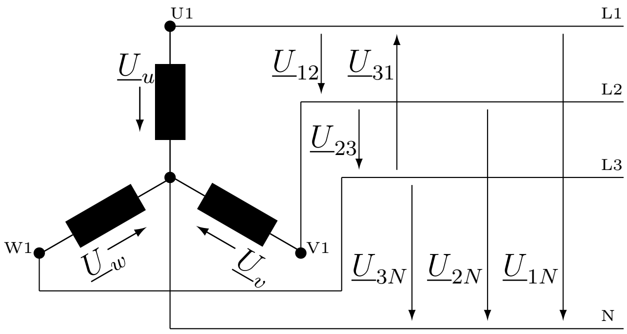


Jetzt verbreite ich Wissen, das Sie und ich nicht anwenden dürfen, da Sie zwar Ingenieurinnen und Ingenieure werden, nicht jedoch Elektrogerätemechaniker*innen. Im Anschlusskasten befinden sich sechs isolierte Stehbolzen und drei Blechlaschen mit passendem Lochabstand. Damit können Sie wie skizziert Stern- und Dreieckschaltung realisieren. Im Falle einer Dreieckschaltung gibt es keine Möglichkeit den blauen Neutralleiter N aufzulegen. Er wird isoliert und nicht angeschlossen. Die Außenleiter haben nach aktuellem Farbschema die Farben Schwarz, Braun, Grau. Eine fünfte Leitung ist der Schutzleiter, er ist grün/gelb und wird mit dem Metallgehäuse verbunden. Sollte ein Motor die falsche Drehrichtung haben, so werden zwei beliebige Außenleiter miteinander vertauscht.

8.2 Elektrische Größen bei Stern- und Dreieckschaltung

Spannungen

Beispiel eines Generators in Sternschaltung:



Die Strangspannungen $\underline{U}_u$, $\underline{U}_v$, $\underline{U}_w$ sind gleich den Spannungen zwischen Außen- und Neutralleiter:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_u, \quad \underline{U}_{2N} = \underline{U}_v, \quad \underline{U}_{3N} = \underline{U}_w.$$

oder kurz:

$$U_{\curlywedge} = U_{st}.$$

Diese Gleichung gesprochen lautet „U-Stern gleich U-Strang“. Dass die Pfeile von $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, und $\underline{U}_{3N}$ verschieden lang sind hat nur zeichnerische Gründe. Sie haben alle den gleichen Effektivwert.

Aber es sind auch die sog. Außenleiter- oder Dreieckspannungen zu finden. Aus den gleichschenkligen Dreiecken (z.B. U1, V1, N) ist der Effektivwert der Dreieckspannung bestimmbar.

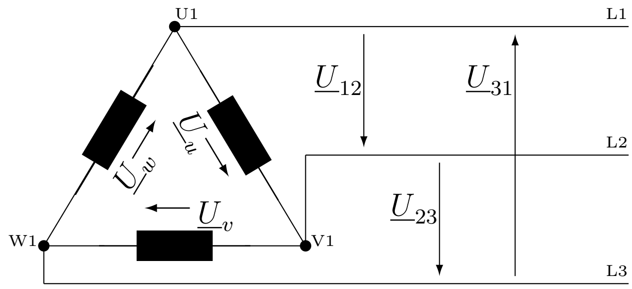
$$U_{12} = 2\,U_{st}\,\cos 30^o = 2\,U_{st}\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$U = U_{12} = \sqrt{3}\,U_{\curlywedge}.$$

Im öffentlichen Niederspannungsnetz beträgt die Spannung zwischen Außen- und Neutralleiter 230 V. Die Dreieckspannung wird mit 400 V angegeben (vor 1987: 220/380 V).

Jetzt haben wir das Geheimnis gelüftet, wo die 400 V herkommen, die in jedem Haushalt verfügbar sind. Betrachten Sie noch einmal das Diagramm auf Seite 101. Sternspannungen ergeben sich aus der Messung zwischen Sinuskurve und Nulllinie, Dreieckspannungen ergeben sich aus der Messung zwischen zwei Sinuskurven. Diese Spannung ist größer.

Beispiel eines Generators in Dreieckschaltung:



Es treten nur Dreieckspannungen auf

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_u, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_v, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_w.$$

oder kurz:

$$U = U_{st}.$$

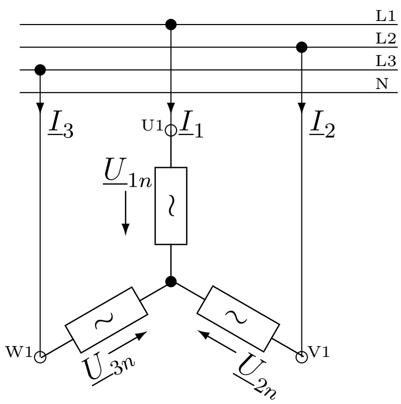
In dieser Gleichung steckt die Hauptfehlerquelle des Drehstroms für Sie. Die Größe „U ohne Index“ ist nicht irgend eine Spannung sondern ist ab jetzt fest verknüpft mit der Dreieckspannung, mit der größeren Spannung, in der Regel mit 400 V. Wenn man mich gelassen hätte, hätte ich dafür U_Δ eingeführt. Hat man aber nicht, Sie werden dieses Symbol nirgends finden. Diese Gleichung vorgelesen lautet „Dreieckspannung gleich Strangspannung“.

Ströme

Auch für die einzelnen Stränge gilt das Ohmsche Gesetz

$$I_{st} = \frac{U_{st}}{Z}.$$

Betrachtet wird ein symmetrischer Verbraucher in Sternschaltung:



Wann ist ein Verbraucher symmetrisch? Ein Drehstromverbraucher hat drei Stränge, hier dargestellt als passive Zweipole. Wenn diese drei Stränge jeweils den gleichen Scheinwiderstand Z haben, ist der Verbraucher symmetrisch. Auf Drehstrommotoren trifft das zu, auf Kochfelder nicht. Jede Kochplatte ist ein Strang, sie sind selten alle drei eingeschaltet. Wir bleiben aber bei symmetrischen Verbrauchern.

Möglicherweise vermissen Sie in obigem Schaltbild die Verbindung vom Neutralleiter zum Sternpunkt. Bei symmetrischen Verbrauchern kann der Neutralleiter weggelassen werden, durch ihn fließt kein Strom. Nur bei einem asymmetrischen Verbraucher ist er von entscheidender Bedeutung und trägt Strom. Sollten Sie einmal den Begriff 'Bauerndrehstrom' hören, so ist damit Drehstrom mit fehlendem Neutralleiter gemeint.

Wegen der Symmetrie gilt für jeden Strang:

$$U_{st} = U_{\curlywedge} = \frac{U}{\sqrt{3}}, \qquad \text{Achtung: } U \text{ ohne Index!}$$

Nach der Knotenregel, angewandt auf den Sternpunkt gilt für die Strangströme:

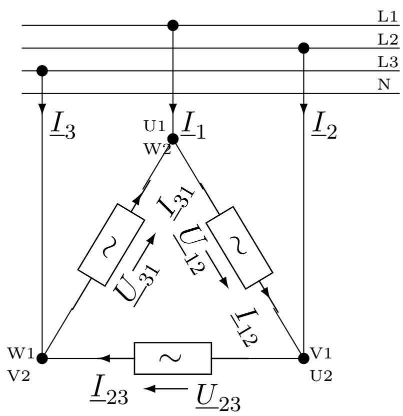
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0.$$

Die Ströme I in den Außenleitern sind gleich den Strangströmen und berechnen sich zu:

$$I = I_{st} = \frac{U_{st}}{Z} = \frac{U}{\sqrt{3}\,Z}.$$

Auch die Größe 'I ohne Index' hat eine feste Bedeutung, es ist der Strom in einem Außenleiter. Häufig wird er aber spezifiziert: $I_1,\ I_2,\ I_3$.

Betrachtet wird jetzt ein symmetrischer Verbraucher in Dreieckschaltung:



Für die Strangströme (z.B. $\underline{I}_{12}$) gilt:

$$\underline{I}_{12} = \frac{U_{12}}{Z} = \frac{U}{Z}.$$

Die Ströme I in den Außenleitern sind wiederum mit Hilfe der Knotenregel zu bestimmen. Angewandt auf den Knoten, gebildet von den Anschlüssen W2 und U1 lautet sie:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}.$$

Für die beiden anderen Knoten können analoge Gleichungen aufgestellt werden. Bei den hier vorausgesetzten symmetrischen Verbrauchern haben die Strangströme $\underline{I}_{12}$ und $\underline{I}_{31}$ eine Phasenlage von 120^o. Aus Geometriebetrachtung kann für den Strom I in jedem Außenleiter gefolgert werden:

$$I = \sqrt{3}\, I_{st} = \sqrt{3}\,\frac{U}{Z}.$$

8.3 Leistung, Leistungsfaktor, Arbeit

Die in einem Strang umgesetzte Wirkleistung berechnet sich zu:

$$P_{st} = U_{st}\, I_{st}\, \cos\varphi.$$

Hier treffen wir wieder auf den Phasenverschiebungswinkel φ, der von Spulen und Kondensatoren verursacht wird.

Die gesamte Wirkleistung aller drei Stränge ist dann:

$$P = 3\, P_{st} = 3\, U_{st}\, I_{st}\, \cos\varphi.$$

Dies ist unabhängig, wie die drei Stränge verkettet sind. Selbst wenn mit Außenleiterströmen I und Dreieckspannungen U die Drehstromleistung bestimmt werden soll, also zwischen Stern- und Dreieckschaltung unterschieden wird, sind die Ergebnisse identisch.

Bei Sternschaltung gilt:

$$P = 3\,\frac{U}{\sqrt{3}}\, I\, \cos\varphi = \sqrt{3}\, U\, I\, \cos\varphi.$$

Bei Dreieckschaltung gilt:

$$P = 3\, U\,\frac{I}{\sqrt{3}}\, \cos\varphi = \sqrt{3}\, U\, I\, \cos\varphi.$$

In nach wie vor symmetrischen Netzen gilt bei symmetrischer Belastung für die Wirkleistung:

$$P = \sqrt{3}\, U\, I\, \cos\varphi,$$

für die Blindleistung:

$$Q = \sqrt{3}\, U\, I\, \sin\varphi,$$

und für die Scheinleistung:

$$S = \sqrt{3}\, U\, I = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Hierbei ist:

U: (U ohne Index) Dreieckspannung (z.B. 400 V im öffentlichen Niederspannungsnetz),

I: (I ohne Index) Strom im Außenleiter,

φ: Phasenverschiebungswinkel zwischen Strangspannung und Strangstrom.

Auch bei Drehstromsystemen gilt für den Leistungsfaktor:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi.$$

Die Arbeiten werden bei konstanter Leistung durch Multiplikation mit der Zeit t berechnet:

Wirkarbeit: $W = P\,t$,
Blindarbeit: $W_q = Q\,t$,
Scheinarbeit: $W_s = S\,t$.

8.4 Zusammenfassung

Vergleich zwischen Stern- und Dreieckschaltung			
	Sternschaltung $\curlywedge$	Dreieckschaltung Δ	Verhältnis $\curlywedge : \Delta$
Strangspannung U_{st}	$\frac{U}{\sqrt{3}}$	U	$1 : \sqrt{3}$
Strangstrom I_{st}	$\frac{U}{\sqrt{3}\,Z}$	$\frac{U}{Z}$	$1 : \sqrt{3}$
Außenleiterstrom I	$\frac{U}{\sqrt{3}\,Z}$	$\frac{\sqrt{3}\,U}{Z}$	$1 : 3$
Wirkleistung P	$\frac{U^2}{Z}\cos\varphi$	$\frac{3\,U^2}{Z}\cos\varphi$	$1 : 3$
Blindleistung Q	$\frac{U^2}{Z}\sin\varphi$	$\frac{3\,U^2}{Z}\sin\varphi$	$1 : 3$
Scheinleistung S	$\frac{U^2}{Z}$	$\frac{3\,U^2}{Z}$	$1 : 3$
U ohne Index bedeutet Dreieckspannung, meist 400 V!			

Hiermit endet die Vorlesungsreihe Grundlagen der Elektrotechnik.

8.4.1 Übungsaufgabe

Ein Drehstromofen nimmt in Dreieckschaltung 10 kW auf. Er wird an einem 400/230 V – Netz betrieben.

Ges:

a) Widerstand eines Heizstranges,

b) Außenleiter- und Strangstrom,

c) Wie stellen sich P, I und I_{St} für Sternschaltung ein?

Wiederholung der Bezeichnungen von Strom und Spannung bei Drehstrom

U: Dreieckspannung, Spannung zwischen zwei Außenleitern (U ohne Index)

$U_{\curlywedge}$: Sternspannung, Spannung zwischen einem Außenleiter und dem Neutralleiter

U_{St}: Strangspannung, abhängig von der Art der Verkettung

I: Außenleiterstrom, Strom in einem Außenleiter (I ohne Index)

I_{St}: Strangstrom, abhängig von der Art der Verkettung

Besonderheit bei dieser Aufgabe

Bei einem Drehstromofen sind folgende Tatsachen zu berücksichtigen, obwohl sie in der Aufgabenstellung nicht gegeben sind: Die Heizelemente jedes Elektrowärmegeräts sind Ohmsche Widerstände R. In solchen Fällen wird in allen Gleichungen Z durch R ersetzt. Ferner erzeugen Ohmsche Widerstände keine Phasenverschiebung. Das bedeutet:

$$\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \lambda = 1$$

Bei Drehstromaufgaben ist folgende Vorgehensweise empfehlenswert:

1. Identifizieren der Verkettungsart (hier Dreieckschaltung).
2. Aus der Tabelle der Seite 108 alle Gleichungen der vorliegenden Verkettung abschreiben.
3. Suche nach der Gleichung, in der gegebene Größen eingesetzt werden können (hier $P = \dots$).
4. Bestimmung des Scheinwiderstands Z (hier Ohmscher Widerstand R).
5. Gesuchte Größen berechnen

Dreieckschaltung, es gilt

$$U_{St} = U$$
$$I_{St} = \frac{U}{Z}, \qquad \text{hier} \qquad I_{St} = \frac{U}{R}$$
$$I = \frac{\sqrt{3}\,U}{Z}, \qquad \text{hier} \qquad I = \frac{\sqrt{3}\,U}{R}$$
$$P = \frac{3\,U^2}{Z}\cos\varphi, \qquad \text{hier} \qquad P = \frac{3\,U^2}{R}\cdot 1$$
$$Q = \frac{3\,U^2}{Z}\sin\varphi, \qquad \text{hier} \qquad Q = \frac{3\,U^2}{R}\cdot 0$$
$$S = \frac{3\,U^2}{Z}, \qquad \text{hier} \qquad S = \frac{3\,U^2}{R}$$

a) Widerstand eines Heizstrangs R
Der Hinweis „nimmt 10 kW auf“ führt über die Einheit kW zur Erkenntnis, dass die Wirkleistung P bekannt ist.

$$P = \frac{3\,U^2}{R}, \qquad R = \frac{3\,U^2}{P}$$
$$R = \frac{3\cdot 400^2}{10\cdot 10^3}\ \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{W}}, \qquad R = 48\ \Omega$$

b) Außenleiterstrom I

$$I = \frac{\sqrt{3}\,U}{R}$$
$$I = \frac{\sqrt{3}\cdot 400}{48}\ \frac{\mathrm{V}}{\Omega}$$
$$I = 14,43\ A$$

Strangstrom I_{St}

$$I_{St} = \frac{U}{R}$$

$$I_{St} = \frac{400}{48} \ \frac{\mathrm{V}}{\Omega}$$

$$I_{St} = 8,33 \ \mathrm{A}$$

c) Nun wird der gleiche Drehstromofen in Sternschaltung betrieben. In guter Näherung kann der Widerstand R als unverändert angenommen werden. Wir notieren alle Gleichungen für Sternschaltung

$$U_{St} = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$$I_{St} = \frac{U}{\sqrt{3}\,Z}, \qquad \text{hier} \qquad I_{St} = \frac{U}{\sqrt{3}\,R}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{3}\,Z}, \qquad \text{hier} \qquad I = \frac{U}{\sqrt{3}\,R}$$

$$P = \frac{U^2}{Z}\cos\varphi, \qquad \text{hier} \qquad P = \frac{U^2}{R} \cdot 1$$

$$Q = \frac{U^2}{Z}\sin\varphi, \qquad \text{hier} \qquad Q = \frac{U^2}{R} \cdot 0$$

$$S = \frac{U^2}{Z}, \qquad \text{hier} \qquad S = \frac{U^2}{R}$$

Wichtig: Obwohl wir jetzt eine Sternschaltung haben, rechnen wir nach wie vor mit der Dreiecksspannung 'U ohne Index'. So wollen es die obigen Gleichungen.

Wirkleistung P

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$P = \frac{400^2}{48} \ \frac{\mathrm{V}^2}{\Omega}, \qquad P = 3,3 \ \mathrm{kW}.$$

Außenleiterstrom I

$$I = \frac{U}{\sqrt{3}\,R}$$

$$I = \frac{400}{\sqrt{3} \cdot 48} \quad \frac{\mathrm{V}}{\Omega}$$

$$I = 4,81 \ \mathrm{A}$$

Strangstrom I_{St}

$$I_{St} = I$$

$$I_{St} = 4,81 \ \mathrm{A}$$

8.4.2 Übungsaufgabe

Ein Drehstrommotor ist in Dreieckschaltung an ein 230/400 V – Netz anzuschließen. Bei Nennlast sind folgende Daten bekannt:
Elektrische Wirkleistung 11 kW, Leistungsfaktor $\lambda = 0{,}85$.

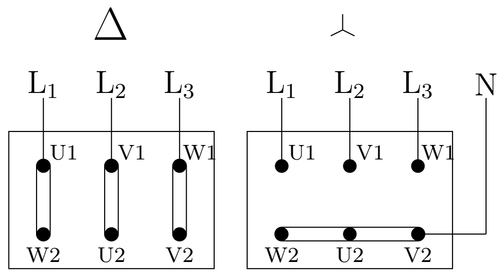
a) Wie ist der genormte Anschlusskasten zu beschalten?

b) Welcher Außenleiterstrom, welcher Strangstrom stellt sich ein?

c) Wie groß ist Blind- und Scheinleistung?

Ein Elektromotor besteht in erster Linie aus Spulen, weshalb die Umstellung von Z auf R der vorherigen Aufgabe mit einem Ofen ausbleibt. Wir würden spontan einen Phasenverschiebungswinkel von $+90°$ vermuten. Da ein Elektromotor jedoch mechanische Leistung abgibt, muss er elektrische Wirkleistung aufnehmen. Der Phasenverschiebungswinkel φ regelt, wie viel Strom (Wirkarbeit) verbraucht wird. Im Leerlauf steigt φ in Richtung 90° – wenig Stromverbrauch, bei Volllast sinkt φ in Richtung 0° – viel Stromverbrauch, wobei beide Grenzwerte nicht erreicht werden. Bei Nennbetrieb stellt sich laut Aufgabenstellung ein $\lambda = \cos\varphi = 0,85$ ein, das bedeutet $\varphi \approx 32°$.

a) Der Anschluss erfolgt an Hand des linken Bildes



Es liegt eine Dreieckschaltung vor, daher gilt

$$U_{St} = U$$
$$I_{St} = \frac{U}{Z}$$
$$I = \frac{\sqrt{3}\,U}{Z}$$
$$P = \frac{3\,U^2}{Z}\,\cos\varphi$$
$$Q = \frac{3\,U^2}{Z}\,\sin\varphi$$
$$S = \frac{3\,U^2}{Z}$$

b) Erneut kennen wir die Wirkleistung mit $P = 11$ kW. Hinzu kommt, dass der Leistungsfaktor mit $\lambda = \cos\varphi = 0,85$ bekannt ist.

$$P = \frac{3\,U^2}{Z}\,\cos\varphi$$
$$Z = \frac{3\,U^2}{P}\,\cos\varphi$$
$$Z = \frac{3 \cdot 400^2}{11 \cdot 10^3} \cdot 0,85 \quad \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{W}}, \qquad Z = 37,1\ \Omega$$

Außenleiterstrom I

$$I = \frac{\sqrt{3}\,U}{Z}$$
$$I = \frac{\sqrt{3} \cdot 400}{37,1} \quad \frac{\mathrm{V}}{\Omega}$$
$$I = 18,67\ A$$

Strangstrom I_{St}

$$I_{St} = \frac{U}{Z}$$
$$I_{St} = \frac{400}{37,1} \quad \frac{\mathrm{V}}{\Omega}$$
$$I_{St} = 10,78\ \mathrm{A}$$

c) Blindleistung

$$Q = \frac{3\,U^2}{Z}\,\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \sin(\arccos\varphi)$$

$$\sin\varphi = \sin(\arccos 0,85)$$

$$\sin\varphi = 0,527 \qquad (\varphi = 31,78^o)$$

$$Q = \frac{3\cdot 400^2}{37,1}\cdot 0,527\ \ \frac{\mathrm{V}^2}{\Omega}$$

$$Q = 6,82\ \mathrm{kvar}$$

d) Scheinleistung

$$S = \frac{3\,U^2}{Z}$$

$$S = \frac{3\cdot 400^2}{37,1}\ \ \frac{\mathrm{V}^2}{\Omega}$$

$$S = 12,94\ \mathrm{kVA}$$

Eine Drehstromaufgabe wird in der Klausur erscheinen. Überlegen Sie sich, wie die beiden Drehstromaufgaben kombiniert werden können. Ein Motor ist wegen der Sinus/Kosinus-Problematik durchaus prüfungsrelevant. Ein Ofen ist wegen der versteckten Information 'Ofen $\rightarrow\ \ \varphi = 0$' interessant. Das nachträglich Umschalten auf eine andere Verkettung kann auch beim Motor vorkommen. Auch dort bleibt Z in guter Näherung gleich.

Damit endet das Vorhaben Elektrotechnik-Grundlagen als Offlineveranstaltung. Ich wünsche Ihnen viel Glück bei der Klausur