Stand alone Dynamik

Joachim Venghaus*

14. Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund

Blauer Text beschreibt Hintergrundinformationen, Abschweifungen und Unsachliches. Gelegentlich sollen die blauen Passagen der Aufheiterung dienen und entsprechen den Anekdoten, die ich in einer Präsenzvorlesung erzählen würde.

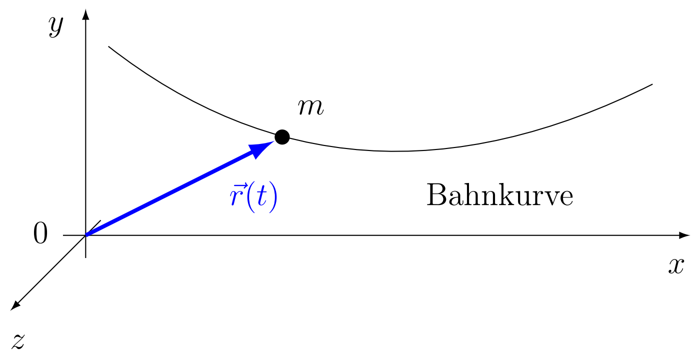
Teil I.
Dynamik

1. Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Bewegung, ohne nach Ursachen zu fragen.

1.1. Lage

Die Lage oder Postion eines Massenpunktes ist durch seinen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ gegeben.

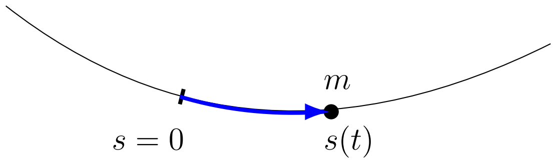


Ein Massenpunkt fährt entlang einer Bahnkurve. Dies kann wie bei einer Achterbahn eine Schienenbahn sein, es kann aber auch eine sich von allein einstellende Wurfbahn sein, die dann natürlich anders aussehen müsste.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{I.1}$$

Ortsvektor $\vec{r}$ und Komponenten $x,\ y,\ z$ sind naturgemäß zeitabhängig.

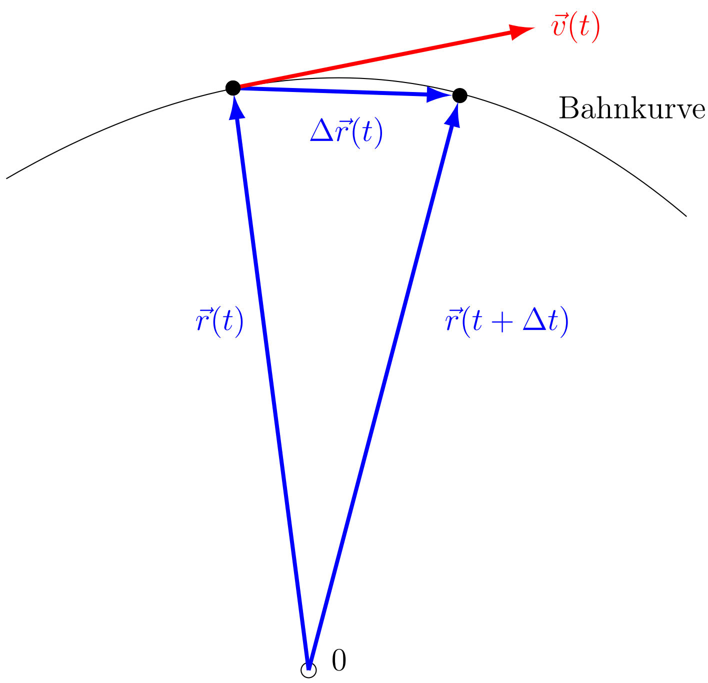
Bei vorgegebener Bahnkurve kann die Lage auch als Bogenlänge s (wie Strecke) angegeben werden.



$$\dim [\vec{r},\, x,\, y,\, z,\, s] = \text{Länge}, \qquad \text{Einheit: m}$$

1.2. Geschwindigkeit

Wir betrachten zwei Momentaufnahmen. Der Massenpunkt ist zum Zeitpunk t an einer Position, beschrieben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Eine kurze Zeit Δt später ist ist er auf seiner Bahnkurve vorangekommen. Seine Lage wird jetzt beschrieben durch den neuen Ortsvektor $\vec{r}(t + \Delta t)$.



Der Vektor $\Delta\vec{r}(t)$ beschreibt das Vorankommen „in Luftlinie“. Es gilt $\vec{r}(t) + \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t)$

Auch die Geschwindigkeit wird vektoriell angetragen.

Wenn der Zeitunterschied Δt sehr kurz gewählt wird, dann gleichen sich die Richtungen von $\Delta\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ an.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} \tag{I.2}$$

oder betragsmäßig bei festliegender Bahnstrecke

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

$$\dim\left[\vec{v},\, v\right] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}, \qquad \text{Einheit: } \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ tangiert überall die Bahnkurve. Beispiel eines Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}} \tag{I.3}$$

Spezialfälle

- $\vec{v}(t)$ habe konstante Richtung: Bewegung auf einer Geraden,
- $v(t) = |\vec{v}(t)| = \text{const.}$: Gleichförmige Bewegung, auch auf einer krummen Bahn.

1.3. Beschleunigung

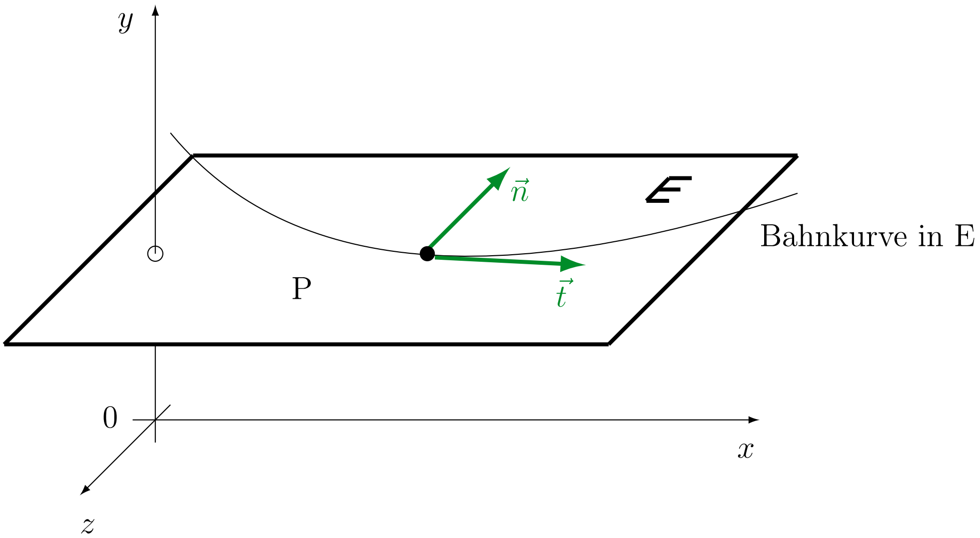
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{I.4}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

$$\dim\left[\vec{a},\, a\right] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2}, \qquad \text{Einheit: } \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Spezialfälle

- $\vec{a} = 0$: Wenn $\vec{v} = \text{const.}$ nach Betrag und Richtung, dann ist die Bewegung immer geradlinig und gleichförmig.
- Ebene Bewegung:



Einführung von Einheitsvektoren $\vec{t}$ und $\vec{n}$. Zur Erinnerung, Einheitsvektoren sind Richtungszeiger der Länge 1.

$\vec{t}$ Tangente zur Bahnkurve in E

$\vec{n} \perp \vec{t}$ in E als Normalenvektor

Man kann herleiten, dass der Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ bei ebenen Bewegungen aus maximal zwei additiven Anteilen besteht.

$$\vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{\varrho} \cdot \vec{n}, \tag{I.6}$$

mit ϱ: momentaner Krümmungsradius der Bahnkurve. Hierbei wird

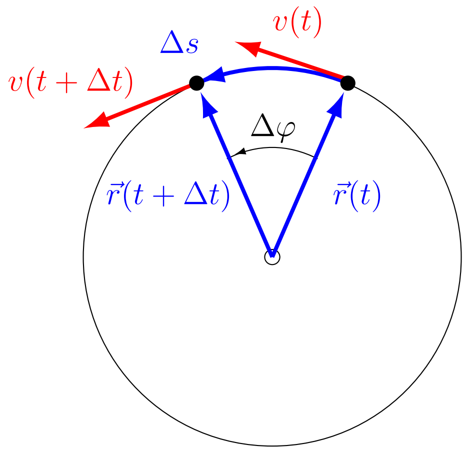
$\dot{v} \cdot \vec{t} = \vec{a}_t$ Tangentialbeschleunigung oder Bahnbeschleunigung und

$\frac{v^2}{\varrho} \cdot \vec{n} = \vec{a}_n$ Normal- oder Zentripetalbeschleunigung genannt.

Letztere ist immer auf den Krümmungsmittelpunkt gerichtet.

Zentripetalbeschleunigung mag sich seltsam anhören. Im allgemeinen Sprachgebrauch sind Zentrifugalbeschleunigungen bekannt. Letztere spüren wir ausschließlich im bewegten System (im Auto, im Karussell). Bei Kurvenfahrt werden wir nach außen gedrückt. Von außen betrachtet, also im ruhenden System, gibt es die Zentripetalbeschleunigung, die das Auto zum Kurvenmittelpunkt hin beschleunigt und so auf der Bahnkurve hält.

- Bewegung auf einer Kreisbahn.



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{r \cdot \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Der Zusammenhang $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$ bzw. $\mathrm{d}s = r \cdot \mathrm{d}\varphi$ ist leicht über den Umfang eines Kreises nachvollziehbar: $U = r \cdot 2\,\pi$.

Wir kürzen ab:

$$v = r\,\omega$$

mit $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ Winkelgeschwindigkeit

$$\dim\,[\omega] = \frac{1}{\text{Zeit}}, \qquad \text{Einheit: } \frac{1}{\text{s}} \qquad \text{nicht Hz}$$

Analog zur Winkelgeschwindigkeit wird die Winkelbeschleunigung eingeführt

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \qquad \dim\,[\alpha,\,\dot{\omega},\,\ddot{\varphi}] = \frac{1}{\text{Zeit}^2}, \qquad \text{Einheit: } \frac{1}{\text{s}^2}$$

Für Kreisbahnen gilt

(I.7) $$a_t = \dot{v} = r\,\dot{\omega} = r\,\ddot{\varphi}$$

(I.8) $$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\,\omega^2}{r} = r\,\omega^2$$

Ausflug

Angaben von Geschwindigkeiten auf Kreisbahnen

Drehzahl	n	$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$	Ereignisse pro Minute
Drehfrequenz	f	$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$	Ereignisse pro Sekunde
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{s}}$	Bogenmaß pro Sekunde

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi\, \frac{n}{60} = \frac{\pi\, n}{30} \approx \frac{n}{10}. \tag{I.9}$$

■

1.3.0. Übung, Vorbemerkung zur Kinematik

Bekannt ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v; & \ddot{x} &= \dot{v} = a \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v; & \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \end{aligned}$$

Vorgehensweise, wenn bei bekannter Beschleunigung Wege s bzw. x oder Geschwindigkeiten v bzw. $\dot{x}$ gesucht sind: Integrieren.

$$v = \int a \,\mathrm{d}t = \int \ddot{x} \,\mathrm{d}t = \dot{x}$$

$$x = \int v \,\mathrm{d}t = \int \dot{x} \,\mathrm{d}t$$

Typische Integration: $a = \text{const}$

$$v = \dot{x} = \int a \,\mathrm{d}t = a\,t + c_1$$

$$x = \int v \,\mathrm{d}t = \int (a\,t + c_1) \,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\,t^2 + c_1\,t + c_2$$

Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 werden durch Anfangsbedingungen bestimmt. ■

1.3.1. Übung, Spurt von Null auf 100

Ein Auto beschleunigt mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wie lange dauert der Spurt von 0 auf $v_E = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$? Welcher Weg d wird dabei zurückgelegt?

Lösung

$$\begin{aligned}
& & \ddot{x} &= a = \text{const.} \\
&\text{2 mal integrieren} & \dot{x} &= a\,t + c_1 \\
& & x &= \frac{a}{2}\,t^2 + c_1\,t + c_2 \\
&\text{Anfangsbedingungen AB1} & \dot{x}(t=0) &= 0 \\
&\text{AB2} & x(t=0) &= 0 \\
&\text{Konstanten bestimmen} & c_1 &= 0, \qquad c_2 = 0 \\
&\text{tatsächliche Bewegungsgleichungen} & \dot{x} &= a\,t \\
& & x &= \frac{a}{2}\,t^2 \\
&\text{Endbedingungen EB1} & \dot{x}(t=T) &= v_E \\
&\text{EB2} & x(t=T) &= d = ? \\
&\text{Zeit } T \text{ bestimmen (hier EB1)} & T &= \frac{v_E}{a} \\
& & T &= \frac{28}{2,4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 11{,}7\,\text{s} \\
&\text{gesuchte Größe bestimmen (hier EB2)} & d &= \frac{a}{2}\,T^2 = \frac{a}{2}\,\frac{v_E^2}{a^2} = \frac{v_E^2}{2\,a} \\
& & d &= \frac{28^2}{2 \cdot 2,4}\,\frac{\text{m}^2\,\text{s}^2}{\text{s}^2\,\text{m}} = 164\,\text{m}
\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen vom Typ „Doppelnull“ führen wie bei der Balkenbiegung (dort sprachen wir von Randbedingungen) zu Konstanten, die Null sind.

Dieses Rechenschema wird in Zukunft immer wieder auftauchen. Es wird sehr verblüffend sein, dass es völlig unerheblich ist, welche Größen gegeben und welche gesucht sind; die Vorgehensweise ist immer gleich. ■

1.3.2. Übung, Massenpunkt auf Kreisbahn

Ein Massenpunkt bewegt sich mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ auf einer Kreisbahn mit Radius r. Zur Zeit $t = 0$ gilt $\dot{\varphi}(t = 0) = \omega_0$ und $\varphi(t = 0) = \varphi_0$. Wie groß muss $\ddot{\varphi}$ sein, damit der Massenpunkt nach einem Umlauf $(2\,\pi)$ zum Stillstand kommt?

Lösung

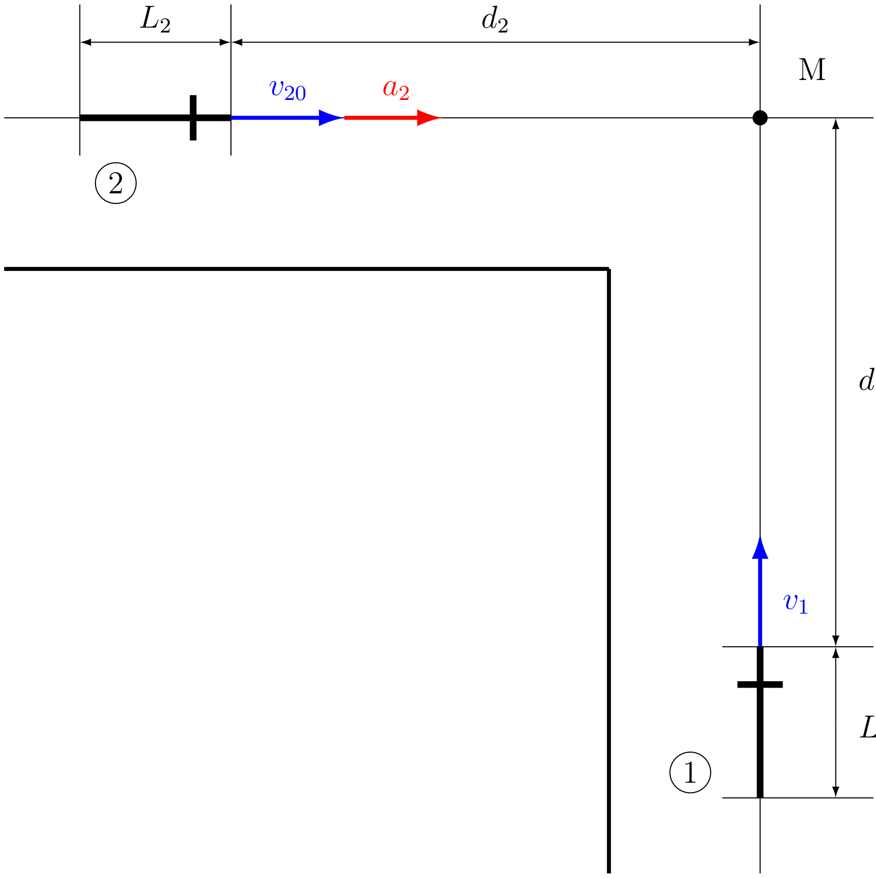
$$
\begin{aligned}
& & \ddot{\varphi} &= \alpha = \text{const.} \\
&\text{2 mal int.} & \dot{\varphi} &= \alpha\, t + c_1 \\
& & \varphi &= \frac{\alpha}{2}\, t^2 + c_1\, t + c_2 \\
&\text{AB1} & \dot{\varphi}(t = 0) &= \omega_0 \\
&\text{AB2} & \varphi(t = 0) &= \varphi_0 \\
&c_{1,2}\ \text{best.} & c_1 &= \omega_0, \qquad c_2 = \varphi_0 \\
&\text{tats. BewGl.} & \dot{\varphi} &= \alpha\, t + \omega_0 \\
& & \varphi &= \frac{\alpha}{2}\, t^2 + \omega_0\, t + \varphi_0 \\
&\text{EB1} & \dot{\varphi}(t = T) &= 0 \\
&\text{EB2} & \varphi(t = T) &= \varphi_0 + 2\,\pi \\
&T\ \text{best. (hier EB1)} & 0 &= \alpha\, T + \omega_0 \\
& & T &= -\frac{\omega_0}{\alpha} \\
&\text{hier ist } \alpha \text{ gesucht, EB2} & \varphi_0 + 2\,\pi &= \frac{\alpha}{2}\, T^2 + \omega_0\, T + \varphi_0 \\
& & 2\,\pi &= \frac{\alpha}{2}\, \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} - \omega_0\, \frac{\omega_0}{\alpha} \\
& & 2\,\pi &= \frac{\omega_0^2 - 2\,\omega_0^2}{2\,\alpha} \\
& & \alpha = \ddot{\varphi} &= -\frac{\omega_0^2}{4\,\pi}.
\end{aligned}
$$

Eine negative Winkelbeschleunigung? Ja, der Massenpunkt wird abgebremst. ■

1.3.3. Übung, Kreuzung mit Motorrädern

Zwei Motorräder fahren auf eine Kreuzung zu, zum Zeitpunkt $t = 0$ seien ihre Positionen und Geschwindigkeiten bekannt.

Gegeben: L_1, L_2, d_1, d_2, $v_1 = \text{const.}$, $v_{20} = v_2(t = 0)$.



Mit welcher konstanten

a) Verzögerung ($a_2 < 0$),

b) Beschleunigung ($a_2 > 0$)

muss Motorrad 2 reagieren, um eine Kollision zu vermeiden? Es wird sehr riskant gefahren. Jeweils ein Vorderrad berührt das Hinterrad des Anderen, ohne dass es zu einem Unfall kommt.

Lösung

Generell gilt für a) und b)

$$\begin{array}{lll} & \ddot{x}_2 = a_2 = \text{const.} & \ddot{x}_1 = 0 \\ \text{2 mal int.} & \dot{x}_2 = a_2\,t + c_1 & \dot{x}_1 = 0 \cdot t + c_3 \\ & x_2 = \dfrac{a_2}{2}\,t^2 + c_1\,t + c_2 & x_1 = c_3\,t + c_4 \\ \text{AB1} & \dot{x}_2(t=0) = v_{20} & \dot{x}_1(t=0) = v_1 \\ \text{AB2} & x_2(t=0) = 0 & x_1(t=0) = 0 \end{array}$$

Die bis zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgelegten Wegstrecken sind ohne jeden Belang. Wir können fast immer die Anfangsbedingungen für Wege (oder Winkel) willkürlich auf Null setzen.

$$\begin{array}{rll} c_{1,2,3,4} \text{ best. AB1} & c_1 = v_{20} & c_3 = v_1 \\ \text{AB2} & c_2 = 0 & c_4 = 0 \\ \text{tats. BewGl.} & \dot{x}_2 = a_2\,t + v_{20} & \dot{x}_1 = v_1 \\ & x_2 = \dfrac{a_2}{2}\,t^2 + v_{20}\,t & x_1 = v_1\,t \end{array}$$

a) Motorrad (2) bremst ab, so dass sein Vorderrad am Punkt M das Heck von Motorrad (1) berührt. Dies wird in den Endbedingungen festgehalten.

Wir werden feststellen, dass bei den Endbedingungen nicht immer Aussagen getroffen werden können. Anders als bei den Anfangsbedingungen dürfen wir bei den Endbedingungen auch gelegentlich Lücken lassen. Hier trifft das bei den Geschwindigkeiten zu. Wie schnell (2) am Punkt M bei diesem waghalsigen Manöver sein wird, wissen wir nicht. Grübeln Sie in solchen Fällen nicht unnötig lang, machen Sie aber auch keine wilden Annahmen. Nur weil Sie eine Geschwindigkeit nicht wissen, ist sie noch lange nicht Null.

$$\begin{array}{lll} \text{EB1} & \dot{x}_2(t=T) = ? & \dot{x}_1(t=T) = ? \text{ oder } v_1 \\ \text{EB2} & x_2(t=T) = d_2 & x_1(t=T) = L_1 + d_1 \end{array}$$

Auch wenn nach der Zeit T nicht gefragt wird, so ist der Schritt „T bestimmen“ doch immer unverzichtbar. Wir suchen eine EB, die aussagekräftig ist und zu möglichst einfachen Ergebnissen führt (quadratische Gleichungen sind tunlichst zu meiden).

EB2 für $x_1(t = T)$ ist hier erfolgversprechend.

$$T \text{ best. hier EB2 für } x_1 \qquad L_1 + d_1 = v_1\,T$$

$$T = \frac{L_1 + d_1}{v_1}$$

Der letzte Schritt ist das Berechnen der gesuchten Größe. In diesem Fall ist es a_2. Zur Verfügung stehen der Ausdruck für die Zeit T sowie die aussagekräftige EB2 für $x_2(t = T)$.

$$\text{ges. Größe best. hier } a_2 \qquad d_2 = \frac{a_2}{2}\,T^2 + v_{20}\,T$$

$$\text{nach } a_2 \text{ auflösen} \qquad \frac{a_2}{2}\,T^2 = d_2 - v_{20}\,T$$

$$\text{ausklammern} \qquad a_2 = \frac{2}{T^2}\,\left(d_2 - v_{20}\,T\right)$$

$$T \text{ einsetzen} \qquad a_2 = 2\left(\frac{v_1}{L_1 + d_1}\right)^2 \cdot \left(d_2 - v_{20}\,\frac{L_1 + d_1}{v_1}\right)$$

Kein schönes Ergebnis aber ein Ergebnis.

b) Nun beschleunigt Motorrad 2 so, dass sein Hinterrad am Punkt M das Vorderrad von 1 berührt. Die EBen müssen dahin angepasst werden.

EB1	$\dot{x}_2(t = T) = ?$	$\dot{x}_1(t = T) = ?$ oder v_1
EB2	$x_2(t = T) = L_2 + d_2$	$x_1(t = T) = d_1$

$$T \text{ best. hier EB2 für } x_1 \qquad d_1 = v_1\,T$$

$$T = \frac{d_1}{v_1}$$

$$\text{ges. Größe best. hier } a_2 \qquad L_2 + d_2 = \frac{a_2}{2}\,T^2 + v_{20}\,T$$

$$\text{nach } a_2 \text{ auflösen} \qquad \frac{a_2}{2}\,T^2 = L_2 + d_2 - v_{20}\,T$$

$$\text{ausklammern} \qquad a_2 = \frac{2}{T^2}\,\left(L_2 + d_2 - v_{20}\,T\right)$$

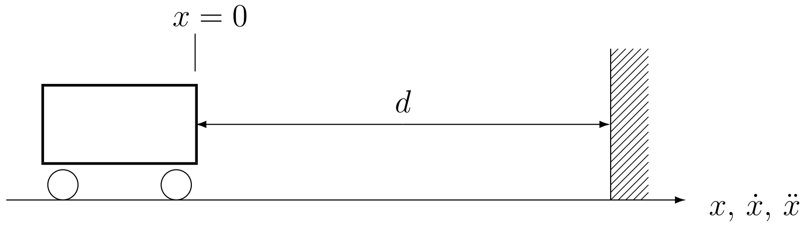
$$T \text{ einsetzen} \qquad a_2 = 2\left(\frac{v_1}{d_1}\right)^2 \cdot \left(L_2 + d_2 - v_{20}\,\frac{d_1}{v_1}\right)$$

■

1.3.4. Übung, Auto im Nebel

Wie schnell darf ein Auto mit einer Beschleunigung $a_0 = \text{const.}$ bei einer Sichtweite b fahren, um rechtzeitig vor einem Hindernis zum Stehen zu kommen. Die Reaktionszeit sei 0.

Geg: $a_0 = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $b = 50\,\text{m}$, Ges: v_0



Lösung

$$\ddot{x} = a_0 = \text{const.}$$

$$\text{2 mal int.} \qquad \dot{x} = a_0\,t + c_1$$

$$x = \frac{a_0}{2}\,t^2 + c_1\,t + c_2$$

$$\text{AB1} \qquad \dot{x}(t=0) = v_0 = \,?$$

$$\text{AB2} \qquad x(t=0) = 0$$

$$c_{1,2}\ \text{best.} \qquad c_1 = v_0, \qquad c_2 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \qquad \dot{x} = a_0\,t + v_0$$

$$x = \frac{a_0}{2}\,t^2 + v_0\,t$$

$$\text{EB1} \qquad \dot{x}(t=T) = 0$$

$$\text{EB2} \qquad x(t=T) = b$$

$$T\ \text{best. (hier EB1)} \qquad T = -\frac{v_0}{a_0}$$

Eine negative Zeit? Abwarten, hier wird abgebremst, a_0 ist negativ. Alles wird gut. Nun wird die gesuchte Größe v_0 berechnet. Die aussagekräftige EB2 und der Ausdruck für T stehen zur Verfügung.

ges. Größe best., hier v_0 $\qquad b = \frac{a_0}{2}\,T^2 + v_0\,T$

T einsetzen $\qquad b = \frac{a_0}{2}\,\frac{v_0^2}{a_0^2} - v_0\,\frac{v_0}{a_0}$

$$b = -\frac{v_0^2}{2\,a_0}$$

nach v_0 auflösen $\qquad v_0^2 = -2\,b\,a_0$

$$v_0 = \sqrt{-2\,b\,a_0}$$

$$v_0 = \sqrt{-2 \cdot 50 \cdot (-5)}\,\sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}$$

$$v_0 = 22{,}4\,\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

■

2. Kinetik

Bisher, in der Kinematik, wird nur beschrieben, wie ein Massenpunkt sich bewegt. Nach Ursachen wird nicht gefragt. Das ändert sich jetzt in der Kinetik. Wir sehen hier wieder einmal die Unsitte, unterschiedliche Dinge mit leicht verwechselbaren Begriffen zu versehen: konkav–konvex, Stalagmiten–Stalaktiten, Hypothermie–Hyperthermie, Pronation–Supination, insbesondere die Medizin spielt dieses Spiel mit großer Wonne.

Kinetik beschreibt den Zusammenhang zwischen Kräften und Beschleunigungen. Für bewegte Massenpunkte gilt das

2.1. NEWTONsche Axiom

Axiome sind grundlegende Gesetze, die nicht bewiesen werden können aber empirisch abgesichert sind. Sie gelten so lange, bis sie widerlegt werden

$$\vec{F} = m\,\vec{a}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{I.10}$$

Die Masse m ist im Rahmen der klassischen Mechanik eine Proportionalitätskonstante

Dieses Axiom wurde 1687 von Sir Isaac Newton in seinem bahnbrechenden Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* aufgestellt und überdauerte unangefochten genau 228 Jahre. Im Jahr 1915 wurde es von Albert Einstein in seiner speziellen Relativitätstheorie widerlegt. Die Masse ist keineswegs eine Konstante. Bewegt sich ein Körper oder Massenpunkt sehr schnell (nahe Lichtgeschwindigkeit), so nimmt seine Masse dramatisch zu. Bei Erreichen der Lichtgeschwindigkeit wäre die Masse des kleinsten Staubkorns unendlich. Somit ist sichergestellt, dass kein massebehafteter Körper Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Die Kräfte die notwendig wären, ihn auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen, müssten ebenfalls unendlich sein. Für uns ändert sich aber nichts. Wir betreiben Newtonsche oder klassische Mechanik. Die Raserei der relativistischen Mechanik überlassen wir Anderen. So schnell können und wollen wir gar nicht.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, gelten die unwiderlegten Axiome der Statik

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{I.11}$$

Gleichung I.10 lautet im kartesischen $(x,\, y,\, z)$ Koordinatensystem

$$X = m\,\ddot{x}, \qquad Y = m\,\ddot{y}, \qquad Z = m\,\ddot{z} \tag{I.12}$$

$$\text{mit} \qquad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} \qquad \text{gilt auch} \qquad \vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}.$$

Gleichung I.12 auf der vorherigen Seite in natürlicher Zerlegung bei Bewegungen auf Kreisbahnen lautet

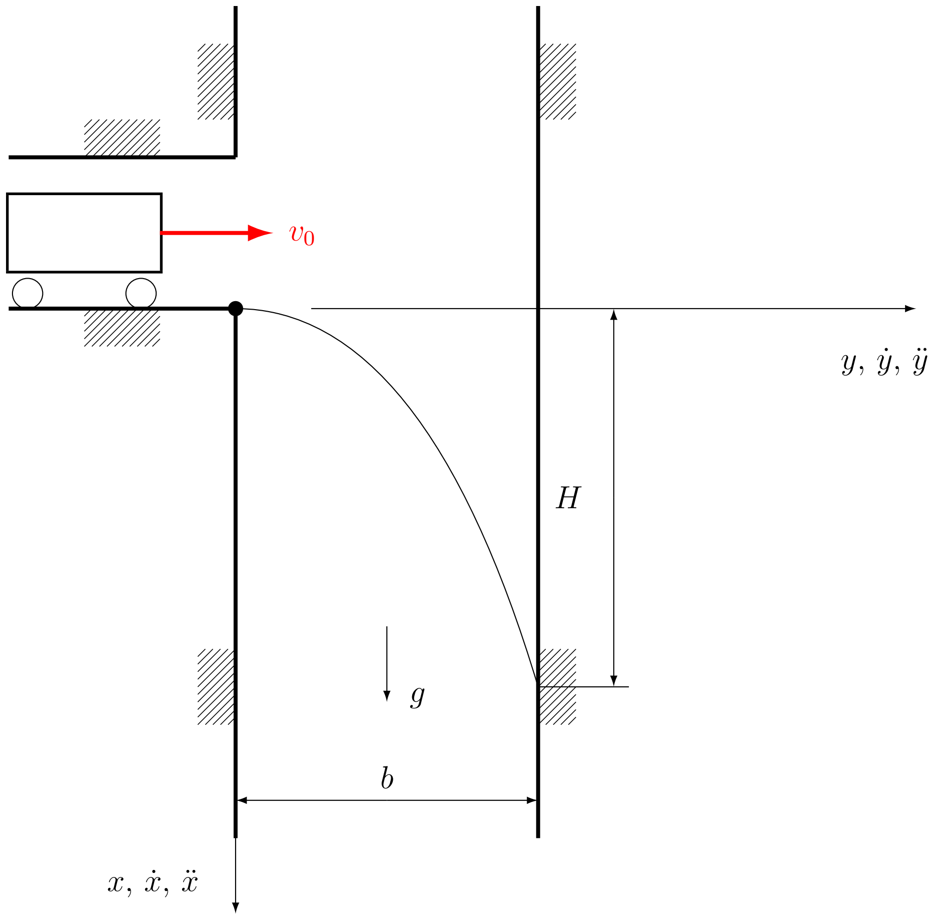
$$\begin{aligned} F_t &= m\,r\,\dot{\omega} = m\,r\,\ddot{\varphi} \\ F_n &= m\,r\,\omega^2 = m\,r\,\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{I.13}$$

■

2.1.1. Übung, Hunt in den Schacht gefallen

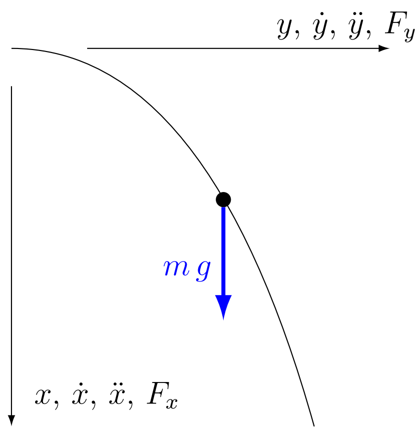
Ein Hunt (Förderwagen) ist in einen seigeren (senkrechten) Schacht gefallen. In einem Abstand H unter der Hängebank (Stollensohle) hat er an der gegenüberliegenden Schachtausmauerung Spuren hinterlassen. Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Wagen in den Schacht gerollt sein? Man betrachte den Wagen als Massenpunkt von beliebiger Masse m, der sich zunächst auf der y-Achse bewegt und dann abstürzt.

Geg.: $H = 20\,\mathrm{m}$, $b = 4{,}5\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Ges.: v_0.



Lösung

Anwendung des NEWTONschen Grundgesetz auf den frei fliegenden Massenpunkt. Welche Kräfte wirken?



Ist $m\,g$, die Gewichtskraft, wirklich die einzige Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt? Erwarten Sie etwa eine Kraft, die in y-Richtung den Massenpunkt quer durch den Schacht zieht? Wo soll die herkommen? Hauer Karl, der den Wagen schob, konnte zum Glück an der Kante stehen bleiben. Wer soll jetzt noch schieben? Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.

Es liegt eine zweidimensionale Bewegung vor. Das NewtonGG muss daher für beide Richtungen aufgestellt werden.

Wichtig ist nun, dass wir die kinematischen Größen und die kinetischen Größen in jeweils gleicher Richtung positiv annehmen. Hier ist dies erkennbar an der Achsenbeschriftung $x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ F_x$ und $y,\ \dot{y},\ \ddot{y},\ F_y$.

$$
\begin{array}{lll}
 & m\,\ddot{x} = m\,g & m\,\ddot{y} = 0 \\[1ex]
 & \ddot{x} = g = \text{const.} & \ddot{y} = 0 \\[1ex]
\text{2 mal int.} & \dot{x} = g\,t + c_1 & \dot{y} = c_3 \\[1ex]
 & x = \dfrac{g}{2}\,t^2 + c_1\,t + c_2 & y = c_3\,t + c_4 \\[1ex]
\text{AB1} & \dot{x}(t=0) = 0 & \dot{y}(t=0) = v_0 \\[1ex]
\text{AB2} & x(t=0) = 0 & y(t=0) = 0
\end{array}
$$

Da der Stollen totsöhlig (horizontal) verläuft, gibt es keine Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung. Bereits zurückgelegte Wege zu Beginn der Katastrophe sind uninteressant und können willkürlich zu Null gesetzt werden.

$c_{1,2,3,4}$ best.	$c_1 = 0$	$c_3 = v_0$
	$c_2 = 0$	$c_4 = 0$
tats. BewGl.	$\dot{x} = g\,t$	$\dot{y} = v_0$
	$x = \frac{g}{2}\,t^2$	$y = v_0\,t$
EB1	$\dot{x}(t = T) = \,?$	$\dot{y}(t = T) = \,?$ oder v_0
EB2	$x(t = T) = H$	$y(t = T) = b$

Erneut wissen wir nicht, wie die Geschwindigkeiten beim Einschlag in die Schachtwand sind. Bei der y-Richtung könnte man darauf kommen, dass v_0 ansteht. Notwendig ist diese Erkenntnis hingegen nicht.

Jetzt muss der Zeitpunkt T bestimmt werden. Wieder vermeiden wir EBen für Gleichungen, bei denen t quadratisch auftaucht. EB2 für y ist hervorragend geeignet.

T bestimmen

$$b = v_0\,T$$

$$T = \frac{b}{v_0}$$

Mit der verbliebenen aussagekräftigen EB2 für x und der Zeit T wird abschließend die gesuchte Größe v_0 berechnet

ges. Größe best.

$$H = \frac{g}{2}\,T^2$$

$$H = \frac{g}{2}\,\frac{b^2}{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{g}{2}\,\frac{b^2}{H}$$

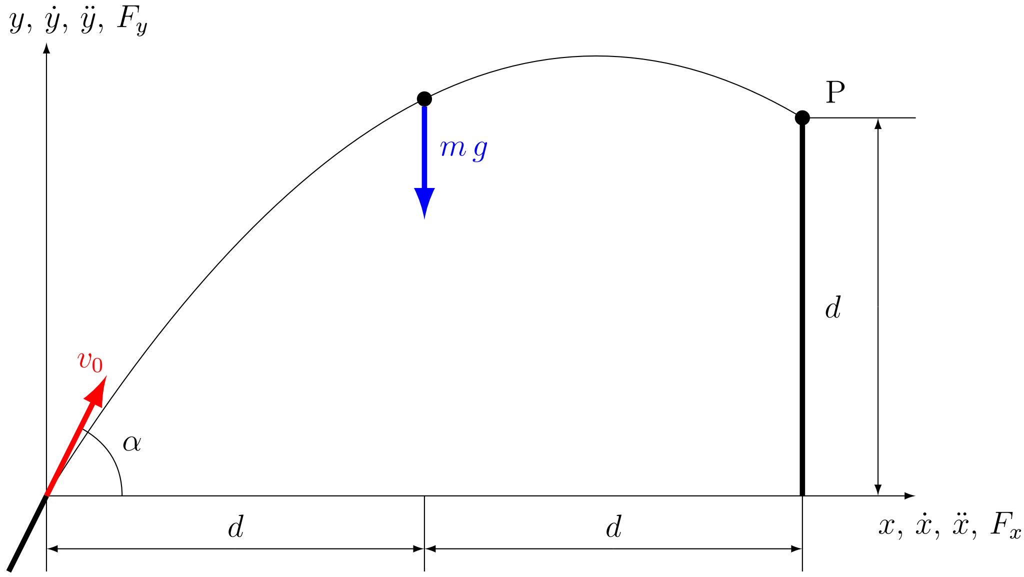
$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,b^2}{2\,H}}$$

$$v_0 = 2{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tja, mit etwa 8 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ war Hauer Karl unerlaubterweise schneller als mit Schrittgeschwindigkeit unterwegs. Das gibt Mecker vom Obersteiger (Grubenaufseher). ■

2.1.2. Übung, schräger Schuss

Mit einem Geschütz mit vorgegebener Elevation α soll auf den Punkt P geschossen werden. Welche Mündungsgeschwindigkeit v_0 ist notwendig?



Geg.: d, g, α, m (beliebig), kein Luftwiderstand. Ges.: v_0

Die Frage erscheint ungewöhnlich und praxisfremd. Realistischer ist doch die Frage, wie hoch man zielen muss, denn die Munition und damit das v_0 dürfte doch gegeben sein. Leider ist diese Aufgabenstellung analytisch nicht lösbar. Sie können spaßeshalber versuchen, das Ergebnis nach α aufzulösen. Das ist hoffnungslos, wir bekommen eine transzendente Gleichung, sie ist nicht auflösbar. Lediglich Iterationen sind möglich (so etwas nennt man dann Maschinengewehr). Also bleiben wir bei der Suche nach v_0

Lösung

Anwendung des NEWTONschen Grundgesetz auf das frei fliegende Projektil. Erneut liegt eine zweidimensionale Bewegung vor. Das NewtonGG muss daher für beide Richtungen aufgestellt werden.

$$
\begin{array}{lll}
 & m\,\ddot{x} = 0 & m\,\ddot{y} = -m\,g \\
 & \ddot{x} = 0 = \text{const.} & \ddot{y} = -g = \text{const.} \\
\text{2 mal int.} & \dot{x} = c_1 & \dot{y} = -g\,t + c_3 \\
 & x = c_1\,t + c_2 & y = -\frac{g}{2}\,t^2 + c_3\,t + c_4 \\
\text{AB1} & \dot{x}(t=0) = v_0\,\cos\alpha & \dot{y}(t=0) = v_0\,\sin\alpha \\
\text{AB2} & x(t=0) = 0 & y(t=0) = 0
\end{array}
$$

Hier muss die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit in ihre x- und y-Komponente zerlegt werden. Der bisher zurückgelegte Weg z.B. der im Lauf ist erneut uninteressant. Der betrachtete Schuss beginnt für uns, wenn das Projektil den Lauf verlassen hat. Die Gaskräfte, die das Projektil ausgestoßen haben, wirken schon nicht mehr.

$$
\begin{array}{lll}
c_{1,2,3,4}\ \text{best.} & c_1 = v_0\,\cos\alpha & c_3 = v_0\,\sin\alpha \\
 & c_2 = 0 & c_4 = 0 \\
\text{tats. BewGl.} & \dot{x} = v_0\,\cos\alpha & \dot{y} = -g\,t + v_0\sin\alpha \\
 & x = v_0\,\cos\alpha\,t & y = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\sin\alpha\,t \\
\text{EB1} & \dot{x}(t=T) = ? & \dot{y}(t=T) = ? \\
\text{EB2} & x(t=T) = 2\,d & y(t=T) = d
\end{array}
$$

Erneut wissen wir nicht, wie die Geschwindigkeiten beim Einschlag in Punkt P sind. Jetzt muss der Zeitpunkt T bestimmt werden. Wieder vermeiden wir EBen für Gleichungen, bei denen t quadratisch auftaucht. EB2 für x ist geeignet.

$$
\begin{array}{ll}
T\ \text{bestimmen} & 2\,d = v_0\,\cos\alpha\,T \\
 & T = \dfrac{2\,d}{v_0\,\cos\alpha}
\end{array}
$$

Mit der verbliebenen aussagekräftigen EB2 für y und der Zeit T wird abschließend die gesuchte Größe v_0 berechnet.

$$d = -\frac{g}{2}\,T^2 + v_0 \sin\alpha\, T$$

$$d = -\frac{g}{2}\,\frac{4\,d^2}{v_0^2\,\cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha\,\frac{2\,d}{v_0\,\cos\alpha}$$

$$d = -\frac{2\,g\,d^2}{v_0^2\,\cos^2\alpha} + 2\,d\,\tan\alpha$$

$$\frac{2\,g\,d^2}{v_0^2\,\cos^2\alpha} = 2\,d\,\tan\alpha - d$$

$$v_0^2 = \frac{2\,g\,d^2}{\cos^2\alpha\,(2\,d\tan\alpha - d)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,g\,d}{\cos^2\alpha\,(2\tan\alpha - 1)}}$$

Versuchen Sie es gar nicht erst, das Ergebnis nach α aufzulösen. Darüber werden Sie alt und grau. Es liegt nicht daran, dass Ihnen die Fähigkeiten fehlten, es geht einfach nicht.

Sollte der Winkel α nicht groß genug sein, wird der Nenner negativ, die Wurzel komplex.

Wenn

$$\tan\alpha < \frac{1}{2},$$

dann zielen Sie zu tief; die Geschwindigkeit bekommt ein komplexes Ergebnis. Ein Treffer ist nicht mehr möglich. Bei

$$\tan\alpha = \frac{1}{2},$$

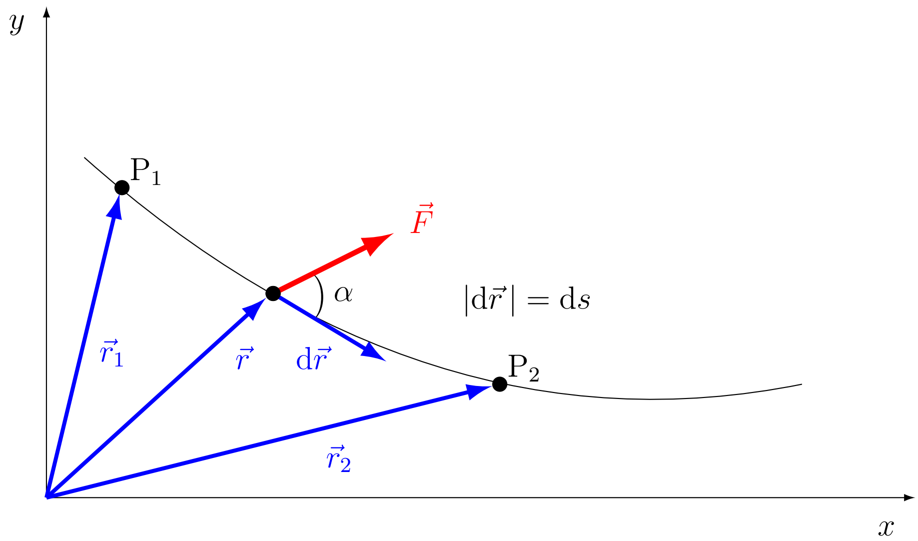
könnten Sie durch den Lauf den Zielpunkt sehen, sie halten genau drauf. Der Nenner wird Null und Sie müssten mit unendlich großer Geschwindigkeit schießen. Einstein schüttelt in diesem Fall weise den Kopf oder streckt Ihnen die Zunge heraus. Das Schießen – oder besser das Treffen – ist in der Realität noch viel schwieriger. Der Luftwiderstand macht die Sache erst richtig kompliziert.

■

2.2. Arbeit am Massenpunkt

Wird ein Massenpunkt durch eine Kraft $\vec{F}$ auf seiner Bahnkurve um einen differentiellen Weg $\mathrm{d}\vec{r}$ bewegt, so wird ihm eine differentielle Arbeit zugeordnet.

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = F\,\mathrm{d}s\,\cos\alpha. \tag{I.14}$$



Längs eines endlichen, bestimmten Wegs $P_1(\vec{r}_1) \to P_2(\vec{r}_2)$ auf der Bahnkurve ist die von der Kraft $\vec{F}$ verrichtete Arbeit

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}. \tag{I.15}$$

$$\dim[W] = \text{Kraft} \cdot \text{Länge}, \qquad \text{Einheit: Nm} = \text{Ws} = \text{J}$$

Drei Bemerkungen:

1. Vermeiden Sie den Ausdruck „Arbeit wird geleistet“. Arbeit wird immer verrichtet. Im Zusammenhang mit Arbeit das Verb „leisten“ zu verwenden, ist irreführend, da Leistung eine eigene physikalische Größe ist.
2. Die Einheit Nm ist ein alter Bekannter. Bisher kennen wir sie als Einheit für Momente. Es liegt hier einer der seltenen Fälle vor, dass zwei verschiedene physikalische Größen die gleiche Einheit haben. Später kommt noch eine dritte hinzu. Eine Größe namens Drehfedersteifigkeit wird auch in Nm angegeben. Wir müssen also aufpassen, worum es gerade geht.
3. Die Arbeit ist die frei konvertierbare Währung zwischen den Disziplinen der Physik: Mechanik (Nm), Elektrotechnik (Ws), Thermodynamik (J). Es gilt
$$1\text{Nm} = 1\text{Ws} = 1\text{J}.$$

Gleichung (I.15) ist ein Kurvenintegral, welches für jeden Einzelfall in ein RIEMANN[1]sches Integral umgewandelt werden muss.

2.3. Leistung am Massenpunkt

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{I.16}$$

Bei konstanter Kraft $\vec{F}$ vereinfacht sich die Leistung zu

$$P = \vec{F}\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\,\vec{v}.$$

$$\dim{[P]} = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}}, \qquad \text{Einheit: } \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}.$$

Aus (I.15) und (I.16) folgt durch Integration über die Zeit

$$W_{1\to 2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\,\mathrm{d}t. \tag{I.17}$$

Das Vorzeichen der Arbeit wird dabei durch die Größe

$$\cos\alpha = \cos\left(\angle\,\vec{F}, \mathrm{d}r\right)$$

bestimmt. Siehe auch Gleichung (I.14). Das bedeutet, dass es für die Arbeit folgende Möglichkeiten gibt:

$$W \lesseqqgtr 0$$

Das ist wahrlich eine fundamentale Erkenntnis. Arbeit kann positiv oder negativ sein. Die Arbeit ist positiv, wenn das betrachtete Teilsystem Arbeit „bekommt“. Denken Sie an einen Bollerwagen, den Sie den Berg hochziehen, er bekommt Arbeit. Zugkraft und zurückgelegter Weg zeigen tendenziell in die gleiche Richtung bzw. der Winkel zwischen Kraft und Weg ist kleiner 90°. Das Skalarprodukt ist positiv. Bei negativer Arbeit denken Sie an ein Gewicht, das Sie mit einer Leine abseilen wollen. Weg (nach unten) und Kraftrichtung (nach oben) sind entgegengesetzt. Hier gibt die Last Arbeit ab. Es gibt aber auch Kräfte, die verrichten gar keine Arbeit, dann wird die Arbeit Null sein.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 bis 1866, bedeutender Mathematiker, er lehrte in Göttingen.

Beispiele

1. Kräfte, die keine Arbeit verrichten, d.h.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

   a) Kraftangriffspunkte ruhen: $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ bzw. $\mathrm{d}\vec{r} = 0$. Das gilt für

   - Lagerkräfte
   - Haftreibungskräfte
   - Reaktionskräfte an den Berührstellen rollender Körper

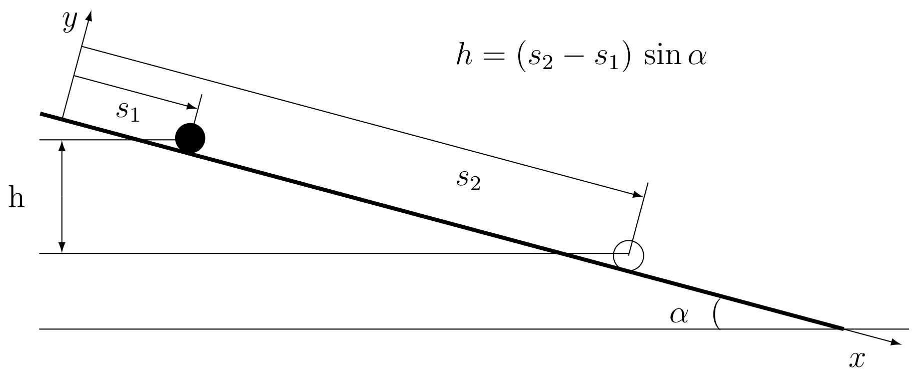
   b) Kräfte, die senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor stehen

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r}$$

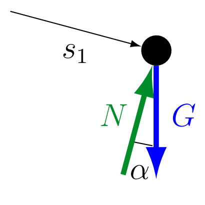
   Das gilt immer für Normalkräfte.

2. Einfache Berechnung der Arbeit

   a) Massenpunkt auf glatter Ebene auf dem Weg von s_1 nach s_2.



   Massenpunkt von der Ebene abgeschnitten



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} G\,\sin\alpha \\ N - G\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$W_{1\to 2} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \begin{pmatrix} G\,\sin\alpha \\ N - G\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_{s_1}^{s_2} G\,\sin\alpha\,\mathrm{d}x.$$

Nunmehr gilt

$$W_{1\to 2} = G\,\sin\alpha \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}x = G\,\sin\alpha\,(s_2 - s_1)$$

und wegen $h = (s_2 - s_1)\,\sin\alpha$ folgt in diesem besonderen Fall

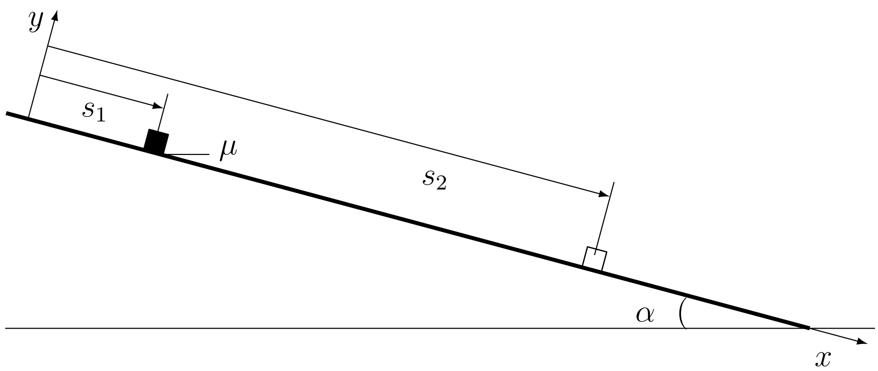
$$W_{1\to 2} = G\,h.$$

Wir stellen fest, dass der Winkel α im Ergebnis keine Rolle mehr spielt. Die Bahn zwischen den Positionen s_1 und s_2 könnte auch ganz anders aussehen. Sie könnte wie die Rutsche eines Spaßbades kurvig sein und Hügel und Senken haben.

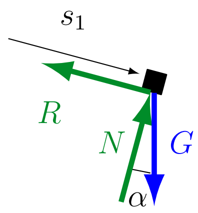
Dieses einfache Ergebnis ist eine Merkmal für konservative Systeme.

Konservativ ist hier keine politische Aussage; vielmehr beschreibt der Begriff die Reibungsfreiheit. Die Energie im System wird bewahrt und nicht in Wärme umgesetzt.

b) Massenpunkt auf rauer Ebene (Gleitreibungskoeffizient μ) auf dem Weg von s_1 nach s_2.



Massenpunkt von der Ebene abgeschnitten



$$\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} G\,\sin\alpha - R \\ N - G\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \begin{pmatrix} G\,\sin\alpha - R \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{s_1}^{s_2} (G\,\sin\alpha - R)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $R = \mu\,N$ und $N = G\,\cos\alpha$, folgt $R = \mu\,G\,\cos\alpha$. Somit ist

$$W_{1\to 2} = G\,(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha) \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}x = G\,(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha)\,(s_2 - s_1).$$

In diesem Beispiel lassen sich nicht – wie in Beispiel 2a) – der Winkel α und $(s_2 - s_1)$ gleichzeitig eliminieren. Hier ist die Arbeit abhängig von der speziellen Form der Bahn.

Das ist einleuchtend. Wäre die Bahn von s_1 nach s_2 kurvenreich, so würde der Weg erheblich länger; der Einfluss der Reibkraft R nähme zu. Wäre der Weg eine Berg-und-Talbahn, wäre der Winkel α von x abhängig und müsste im Integral bleiben; auch das hätte Einfluss auf die Arbeit.

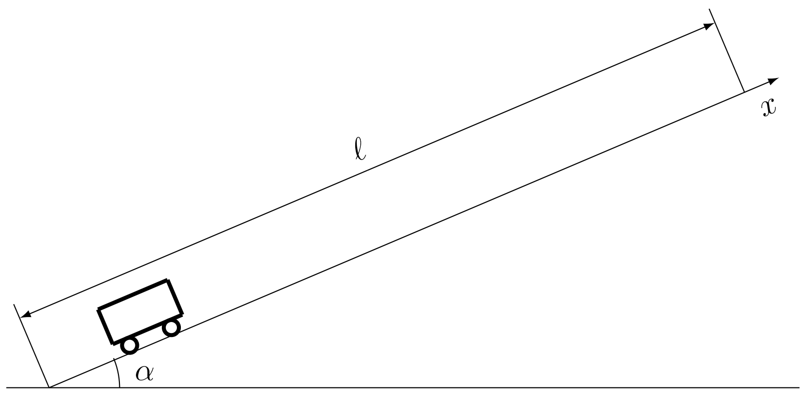
■

2.3.1. Übung, Schrägaufzug, Förderarbeit

Ein Schrägaufzug hat eine Steigung von $\alpha = 23°$ und ist 38 m lang. Ein Wagen mit der Masse 2500 kg wird mit konstanter Geschwindigkeit gefördert.
Gesucht:

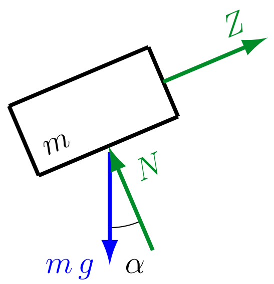
a) Zugkraft, parallel zur Förderebene (kein Fahrwiderstand),

b) Förderarbeit für eine Fahrt.



Lösung

a) Zugkraft



NEWTONsches Grundgesetz:

$$\sum X_i = m\,\ddot{x}, \qquad \text{da } v = \text{const.} \rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\begin{aligned} Z - m\,g\,\sin\alpha &= 0 \\ Z &= m\,g\,\sin\alpha \\ Z &= 9,58 \text{ kN.} \end{aligned}$$

b) Förderarbeit

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r},$$

$$\text{hier} \qquad W_{1\rightarrow 2} = \int_{x=0}^{x=\ell} Z\,\mathrm{d}x,$$

$$W_{1\rightarrow 2} = Z\,x\,\Big|_{x=0}^{x=\ell},$$

$$W_{1\rightarrow 2} = Z\,\ell = m\,g\,\sin\alpha\cdot\ell,$$

$$W_{1\rightarrow 2} = 3,64\cdot 10^5 \text{ N m} = 364 \text{ kJ.}$$

■

2.4. Leistung bei stationären Bewegungen

Gemäß (I.16) gilt bei Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bzw. konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$P = F \cdot v = F \cdot \dot{x} \qquad \text{(translatorische Bewegung)},$$

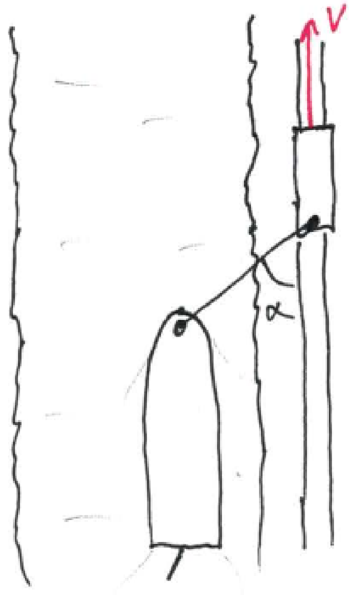
$$P = M \cdot \omega = M\,\dot{\varphi} \qquad \text{(rotatorische Bewegung)}. \tag{I.18}$$

Zu (I.18) gibt es eine praktische Faustformel für Rotationen mit der Drehzahl n:

$$P = M\,\frac{\pi\,n}{30} \approx \frac{M\,n}{10}.$$

■

2.4.1. Übung, Treideln eines Schiffs



Ein Schiff wird durch eine Lok getreidelt. Die Schleppleinenkraft beträgt $S = 8\,\mathrm{kN}$. Sie hat einen Winkel $\alpha = 28°$.
Gesucht:

a) Arbeit der Lok für Weg $\ell = 3\,\mathrm{km}$,

b) Zugleistung für eine Geschwindigkeit v von etwa 5 kn (genau 2,5 m/s).

Lösung

Zwischen der Vorausrichtung der Lok (x, bzw. v) und der Zugrichtung der Schleppleine liegt der Winkel $\beta = \pi - \alpha$.

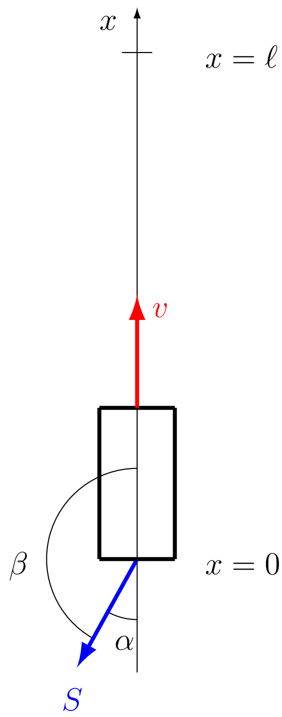
a)

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r},$$

hier $$W_{1\to 2} = \int_{x=0}^{x=\ell} S\, \cos\beta\, \mathrm{d}x,$$

$$W_{1\to 2} = S\,\ell\, \cos(\pi - \alpha),$$

$$W_{1\to 2} = -2,12 \cdot 10^7\ \mathrm{Nm} = -21,2\ \mathrm{MJ}.$$



b)

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\,\vec{v},$$

$$P = S\,v\, \cos(\pi - \alpha),$$

$$P = -17,7 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = -17.7\ \mathrm{kW}.$$

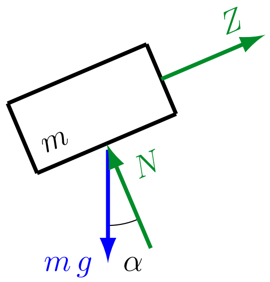
Da die Fahrtrichtung und die Kraftrichtung von S in nahezu entgegengesetzte Richtung zeigen, sind Arbeit und Leistung negativ. Die Lok gibt Arbeit und Leistung ans Schiff ab. ■

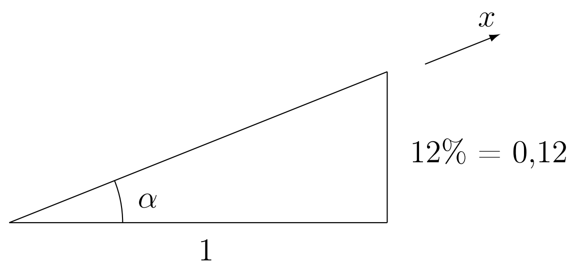
2.4.2. Übung, Schrägaufzug mit Angabe der Leistung

Der Wagen eines Schrägaufzugs hat eine Masse von 1800 kg. Die Steigung beträgt 12%. Es ist ein Motor mit einer Leistung von 4,5 kW installiert.

Gesucht ist die gleichförmige Fahrgeschwindigkeit bei Nennleistung ohne Fahrwiderstände.

Lösung





$$\alpha = \arctan \frac{0,12}{1} \approx 6,84°$$

NEWTONsches Grundgesetz in x-Richtung bei gleichförmiger Geschwindigkeit.

$$Z - m\,g\,\sin\alpha = m\,\ddot{x} = 0, \qquad \text{da } v = \text{const}$$
$$Z = m\,g\,\sin\alpha$$
$$P = \vec{F}\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\,\vec{v}, \quad \text{hier} \quad P = Z\,v$$
$$v = \frac{P}{Z} = \frac{P}{m\,g\sin(\arctan 0,12)}$$
$$v = 2,14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

■

2.5. Arbeitssatz für Massenpunkte

Aus dem NEWTONschen Axiom (Gleichung I.10 auf Seite 17) kann durch Integration über die Zeit der Arbeitssatz entwickelt werden.

(I.19)
$$\underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}}_{W_{1\to 2}} = \underbrace{\frac{1}{2}\,m\,v_2^2}_{E_{\mathrm{kin}2}} - \underbrace{\frac{1}{2}\,m\,v_1^2}_{E_{\mathrm{kin}1}}.$$

Die Ausdrücke $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ werden „kinetische Energie“ genannt.

$E_{\mathrm{kin}1} = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2$: Kinetische Energie in der Position 1,

$E_{\mathrm{kin}2} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2$: Kinetische Energie in der Position 2.

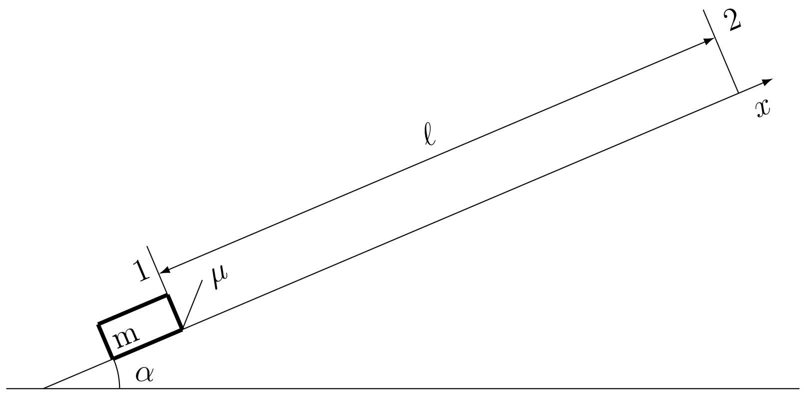
Gleichung I.19 ist gleichzeitig der Arbeitssatz für einen Massenpunkt

(I.20)
$$W_{1\to 2} = E_{\mathrm{kin}2} - E_{\mathrm{kin}1}.$$

In Worten: Die am Massenpunkt verrichtete Arbeit ist gleich der Änderung der Kinetischen Energie. ■

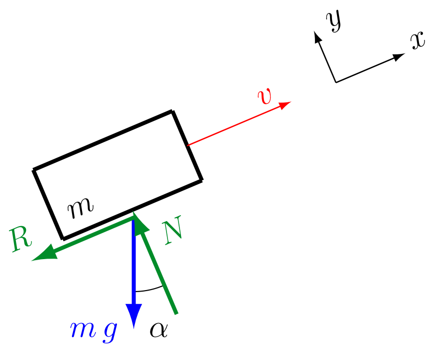
2.5.1. Übung, Reibung mit Arbeitssatz

Eine Masse wird mit v_1 an Position 1 abgeschossen. Zwischen Masse und Unterlage besteht Reibung. Welche Geschwindigkeit hat die Masse an Position 2?



Gegeben: $m,\ \ell,\ \alpha,\ \mu,\ v_1,\ g$

Lösung



Arbeitssatz für Massenpunkte

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = E_{\text{kin}2} - E_{\text{kin}1}.$$

Beteiligte Vektoren

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -R - m\,g\ sin\alpha \\ N - m\,g\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kinetische Energien

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2; \qquad E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2.$$

Reibung

$$R = \mu\,N; \qquad N = m\,g\,\cos\alpha; \qquad R = \mu\,m\,g\,\cos\alpha.$$

Der Vektor dr zeigt, dass nur die x-Positionen der Vektoren von Einfluss sind. Daher:

$$\int_0^{\ell} \big(-\mu\,m\,g\,\cos\alpha - m\,g\ sin\alpha\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,m\,\big(v_2^2 - v_1^2\big).$$

Integrieren, Grenzen einsetzen

$$\big(-\mu\,m\,g\,\cos\alpha - m\,g\ sin\alpha\big)\,\ell = \frac{1}{2}\,m\,\big(v_2^2 - v_1^2\big).$$

$$-m\,g\,\ell\,\big(\mu\,\cos\alpha + \sin\alpha\big) = \frac{1}{2}\,m\,\big(v_2^2 - v_1^2\big).$$

m kürzen, nach v_2 auflösen:

$$v_2^2 = v_1^2 - 2\,g\,\ell\,\big(\mu\,\cos\alpha + \sin\alpha\big),$$
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\,g\,\ell\,\big(\mu\,\cos\alpha + \sin\alpha\big)}.$$

■

3. Hauptsätze der Körperdynamik

Bisher: Behandlung von Massenpunkten ohne Ausdehnung.

Jetzt: Betrachtung von ausgedehnten Körpern.

Nahezu unverändert gültig bleibt das NEWTONsche Axiom bzw. der Arbeitssatz.

Es erfolgt lediglich eine Namensänderung gleich im Folgekapitel

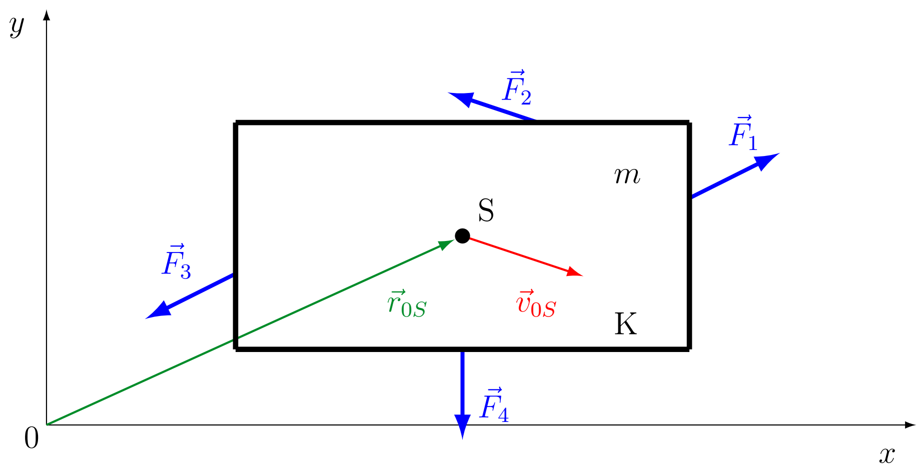
Neu und zusätzlich zu berücksichtigen: Drehbewegungen um einen Lagerungspunkt oder um den Schwerpunkt.

3.1. Schwerpunktsatz

Durch eine längere Herleitung ist beweisbar, dass zur Beschreibung der translatorischen Bewegung eines Körpers ähnliche Gesetze aufgestellt werden können, wie bei der Bewegung von Massenpunkten.

Das ist wenig überraschend, da Massenpunkte ausschließlich translatorisch unterwegs sind. Drehbewegungen von Massenpunkten sind mangels Ausdehnung irrelevant.

Voraussetzung: Stellvertretend für den Gesamtkörper K wird Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körperschwerpunkt S betrachtet.



Der Schwerpunktsatz lautet

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}_{0S} = m\,\dot{\vec{v}}_{0S}. \tag{I.21}$$

mit

$\vec{r}_{0S}$: Ortsvektor vom Koordinatenursprung 0 zum Schwerpunkt S.

$\ddot{\vec{r}}_{0S}$: zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit.

$\vec{v}_{0S}$: Geschwindigkeitsvektor von Schwerpunkt S im Koordinatensystem mit Ursprung 0 (zeigt nicht von 0 nach S).

Weiterführender Hinweis: Der Schwerpunktsatz ist ein Spezialfall des Impulssatzes. Der Impulssatz gilt für alle Körper (fest, flüssig, gasförmig). Der Schwerpunktsatz gilt nur für feste Körper.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{I}_0}{\mathrm{d}t} \qquad \text{mit} \qquad \vec{I}_0 = \int\limits_K \vec{v}_{0m}\,\mathrm{d}m \tag{I.22}$$

3.2. Impulsmomentensatz

Im Gegensatz zum Massenpunkten können am ausgedehnten Körper Kräfte so angreifen, dass sie bezüglich eines beliebigen Körperpunktes (z.B. Schwerpunkt) ein Moment erzeugen. Ausgedehnte Körper können also in Drehung versetzt werden ($\rightarrow$ rotatorische Bewegung). Zwei Fälle sind möglich:

1. Der Körper muss sich um einen bestimmten Punkt oder um eine bestimmte Achse drehen, da eine Lagerung vorhanden ist.
2. Der Körper kann sich frei bewegen (Raumschiff im All, Puck auf dem Eis); in diesem Fall erfolgt die rotatorische Bewegung immer um den Körperschwerpunkt.

Eine translatorische Bewegung kann in beiden Fällen überlagert sein.

Analogie

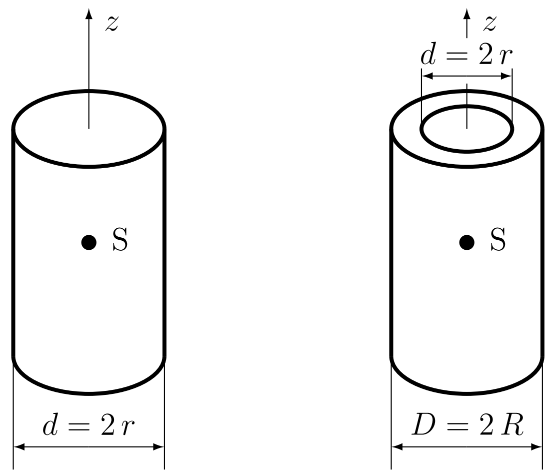
Bekannt: Kraft $\sim$ Beschleunigung. Proportionalitätsfaktor Masse m.

Neu: Moment $\sim$ Drehbeschleunigung bzw. Winkelbeschleunigung. Proportionalitätsfaktor ist noch zu klären.

Vereinfachung: Es werden ausschließlich Bewegungen in der x-y-Ebene betrachtet. Als Proportionalitätsfaktor wird die Größe Massenträgheitsmoment J eingeführt. Es beschreibt die Trägheit gegenüber Drehbewegungen um eine bestimmte Achse, hier um die z-Achse.

Beispiele für Massenträgheitsmomente (MTM) bei Bewegungen um den Schwerpunkt.

$$J_S = \frac{1}{2}\, m\, r^2$$

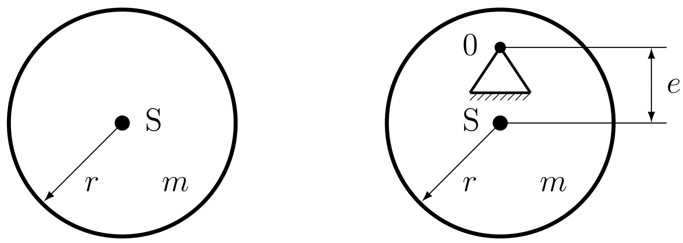


$$J_S = \frac{1}{2}\, m\, (R^2 + r^2)$$

Beim Hohlzylinder mit $J_S = \frac{1}{2}\, m\, (R^2 + r^2)$ verwundert das Pluszeichen. Wäre m die Masse des ursprünglichen Vollzylinders, dann müsste erwartungsgemäß $J_S = \frac{1}{2}\, m\, (R^2 - r^2)$ erscheinen. Bei m handelt es sich aber um die geringere Masse des Hohlzylinders. Aus diesem Grund ist das Pluszeichen richtig.

Noch etwas ist verwunderlich: Die Höhe des Zylinders spielt keine Rolle. Das MTM eines Bierdeckels oder Kreissägeblatts ist ebenfalls $J_S = \frac{1}{2}\, m\, r^2$.

Ist ein Körper außerhalb des Schwerpunkts gelagert, z.B. im Punkt 0, vergrößert sich das Massenträgheitsmoment.



$$J_S = \frac{1}{2}\, m\, r^2 \qquad\qquad J_0 = \frac{1}{2}\, m\, r^2 + m\, e^2$$

Für beliebige Körper gilt bei Drehachsen außerhalb des Schwerpunkts der STEINERsche[2] Satz:

$$J_0 = J_S + m\, e^2, \qquad e: \text{ Exzentrizität} \tag{I.23}$$

mit

[2] Jakob Steiner 1796 bis 1863, Schweizer Mathematiker

J_0: Trägheitsmoment um feste Achse bei 0,

J_S: Trägheitsmoment um Achse bei S,

e: Abstand feste Achse zum Schwerpunkt.

Der Impulsmomentensatz für Drehung um den Schwerpunkt lautet

$$\sum M_{i\,[S]} = J_S\,\ddot{\varphi} = J_S\,\dot{\omega}. \tag{I.24}$$

mit

$\sum M_{i\,[S]}$: Summe aller Momente um S,

J_S: Massenträgheitsmoment um den selben Punkt S.

$\ddot{\varphi}$: Winkelbeschleunigung.

Gültig für frei bewegliche Körper (Puck auf dem Eis) und im Schwerpunkt gelagerte Körper.

Bei fester Lagerung außerhalb des Schwerpunkts im Punkt 0 lautet der Impulsmomentensatz

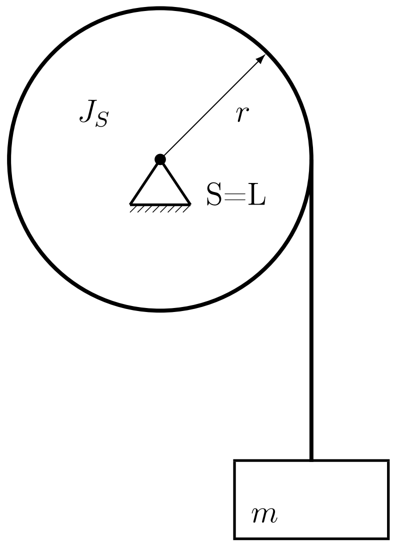
$$\sum M_{i\,[0]} = J_0\,\ddot{\varphi} = J_0\,\dot{\omega}. \tag{I.25}$$

Der Index bei J und der Momentenbezugspunkt müssen immer gleich sein. Die Bezeichnungen können variieren, z.B 0 wie Koordinatenursprung, P wie Punkt oder L wie Lager.

Hinweis: Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz müssen bei ausgedehnten Körpern erfüllt werden. Die Kräfte- und Momentengleichgewichte der Statik sind die „beschleunigungslosen“ Sonderfälle von Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz. ■

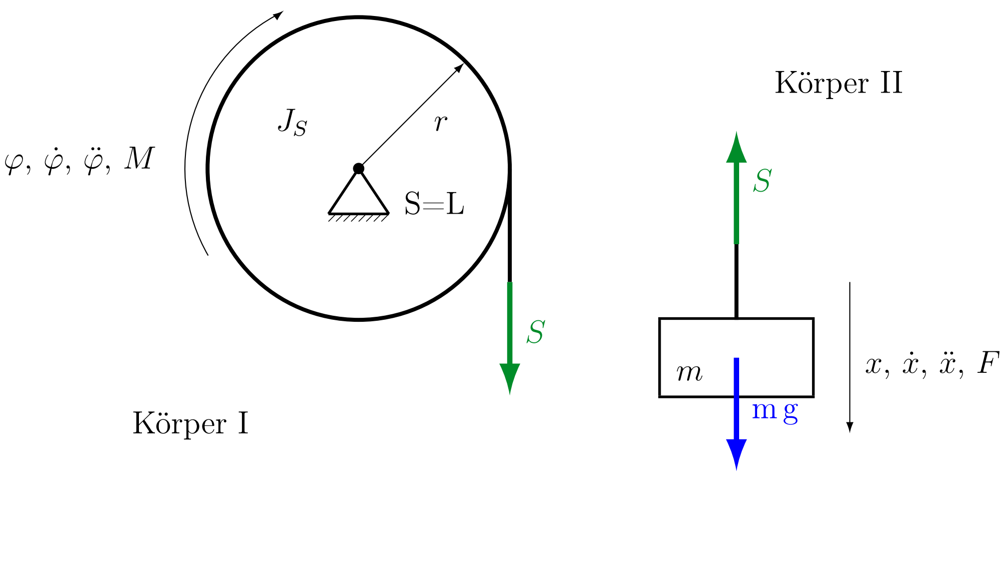
3.2.1. Übung, Zweikörpersystem

Gegeben ist eine reibungsfrei gelagerte Seiltrommel mit masselosem Seil und einer Last, ferner $J_S,\ m,\ r$.



Gesucht: Beschleunigung der Masse m und die Winkelbeschleunigung der Scheibe J_S.

Zerschneiden



Wichtig ist bei Mehrkörpersystemen, dass die zu erwartenden Bewegungsrichtungen kompatibel eingezeichnet werden. Die Masse wird sich nach unten bewegen, infolgedessen die Seiltrommel im Uhrzeigersinn. Erneut müssen die kinematischen Größen und die kinetischen Größen in jeweils gleicher Richtung positiv angenommen werden. Hier ist dies erkennbar an der Beschriftung x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, F und φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, M.

Verabschieden müssen wir uns von einer Vereinbarung aus der ebenen Statik, in der Momente gegen den Uhrzeigersinn positiv sind. Hier gilt etwas anderes: Momente in Bewegungsrichtung sind positiv.

Hauptsätze der Körperdynamik, SwS, IMS

Körper I, IMS

$$\begin{aligned} \sum M_i[L] &= J_S\,\ddot{\varphi}, \\ S\,r &= J_S\,\ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Körper II, SwS

$$\begin{aligned} \sum F_i &= m\,\ddot{x}, \\ m\,g - S &= m\,\ddot{x}. \end{aligned}$$

Kinematische Koppelung

Mehrkörpersysteme können sich nicht unabhängig voneinander bewegen. Wenn die Masse ein bestimmtes Stück Weg x zurücklegt, wird ein genau so langes Stück Seil abgewickelt. Die Scheibe muss sich also um einen dazugehörigen Winkel φ weiterdrehen. Der Zusammenhang zwischen Weg und Winkel ist die kinematische Koppelung. Sie lautet

$$\begin{aligned} x &= r\,\varphi \\ \dot{x} &= r\,\dot{\varphi} \\ \ddot{x} &= r\,\ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Die erste Zeile kann an Hand des Umfangs eines Kreises gut veranschaulicht werden. $U = r \cdot 2\pi$. Die zwei weiteren Zeilen werden durch formales Ableiten erzeugt.

Unerwünschte Größen eliminieren, gesuchte Größen bestimmen

Nach der Seilkraft S wird nicht gefragt, sie ist zu eliminieren. Eine der beiden Beschleunigungen (hier $\ddot{\varphi}$) wird auch zunächst eliminiert. Die andere Beschleunigung $\ddot{x}$ wird berechnet.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{J_S\,\ddot{\varphi}}{r} \\
m\,g - \frac{J_S\,\ddot{\varphi}}{r} &= m\,\ddot{x} \\
m\,g - \frac{J_S\,\ddot{x}}{r^2} &= m\,\ddot{x} \\
m\,g &= \ddot{x}\left(m + \frac{J_S}{r^2}\right) \\
\ddot{x} &= \frac{m\,g}{m + \frac{J_S}{r^2}} = \frac{m\,g\,r^2}{m\,r^2 + J_S}.
\end{aligned}
$$

Es ist auch nach der Winkelbeschleunigung gefragt. Mit der kinematischen Koppelung in der Form $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$ geht das leicht vonstatten.

$$
\ddot{\varphi} = \frac{m\,g\,r}{m\,r^2 + J_S}.
$$

■

3.2.2. Übung, gebremster Förderkorb

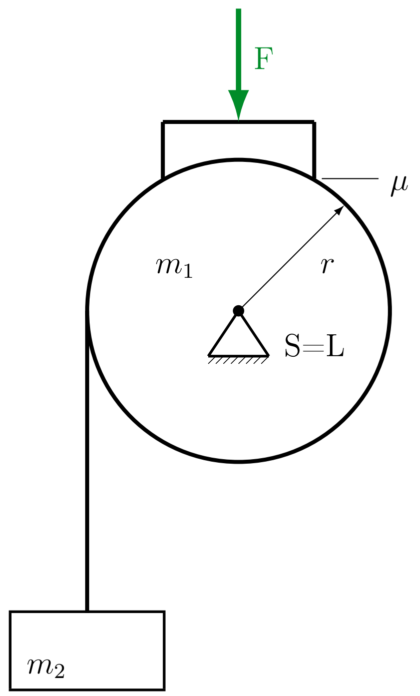
Bei Abwärtsfahrt soll ein Förderkorb (Masse m_2) mit bekannter Beschleunigung a aus der Ruhe auf die Endgeschwindigkeit v_e gebracht werden. Dabei wird die Seiltrommel (Vollzylinder, Masse m_1) gebremst.

Gegeben: $a = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\ v_e = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ m_1 = 500\,\mathrm{kg},\ m_2 = 2000\,\mathrm{kg},\ r = 1{,}5\,\mathrm{m},\ \mu = 0,35$

a) Wie groß muss die Kraft F sein?

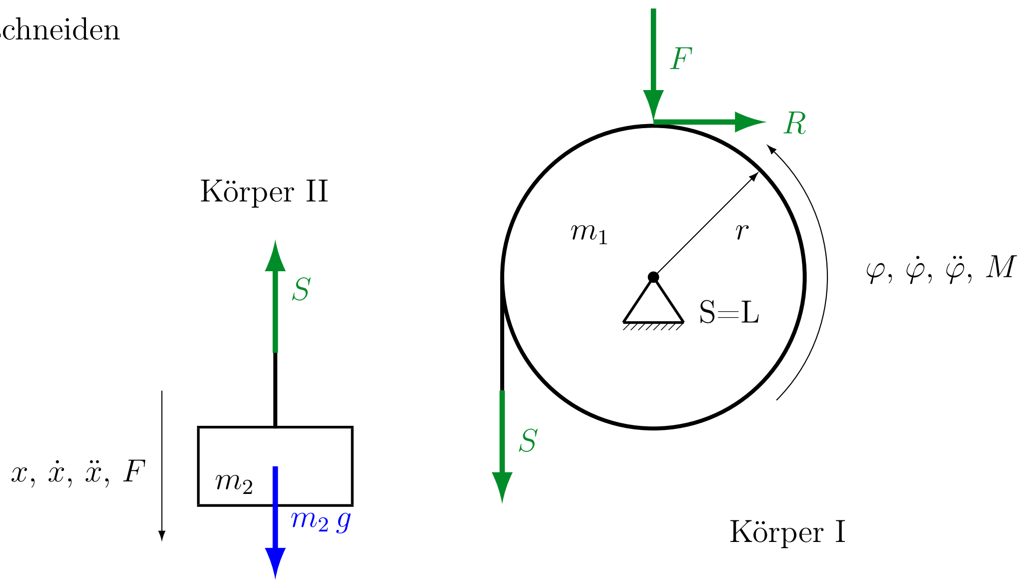
b) Wie lange dauert die beschleunigte Fahrt?

c) Wie groß muss die Kraft F sein, wenn anschließend mit v_e = const. weitergefahren wird?



Lösung

Zerschneiden



Hauptsätze der Körperdynamik, SwS, IMS

$$\text{Körper I, IMS} \qquad \sum M_i[L] = J_S\,\ddot\varphi,$$
$$S\,r - R\,r = J_S\,\ddot\varphi$$
$$\text{Körper II, SwS} \qquad \sum F_i = m_2\,\ddot x,$$
$$m_2\,g - S = m_2\,\ddot x$$
$$\text{Kinematische Koppelung} \qquad x = r\,\varphi, \qquad \ddot x = r\,\ddot\varphi$$
$$\text{Reibung} \qquad R = \mu\,F$$
$$\text{Massenträgheitsmoment} \qquad J_S = \frac{1}{2}\,m_1\,r^2$$

Da translatorische Größen ($a,\ v_e$) gegeben sind, wird $\ddot\varphi$ eliminiert, ebenso die Seilkraft S, da sie uninteressant ist. Hierzu lösen wir den SwS von Körper II nach S auf.

$$S = m_2\,(g - \ddot x)$$

Diese Seilkraft S und die Kinematik in der Form $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$ wird in den IMS von Körper I eingesetzt

$$(S - \mu\, F)\, r = \frac{1}{2}\, m_1\, r^2\, \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$S - \mu\, F = \frac{1}{2}\, m_1\, \ddot{x}$$

$$m_2\, g - m_2\, \ddot{x} - \mu\, F = \frac{1}{2}\, m_1\, \ddot{x}$$

a) Wie groß ist F bei $\ddot{x} = a = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

$$\mu\, F = m_2\, g - \ddot{x}\left(\frac{1}{2}\, m_1 + m_2\right)$$

$$F = \frac{m_2\, g}{\mu} - \frac{\ddot{x}}{\mu}\left(\frac{1}{2}\, m_1 + m_2\right)$$

$$F = 36{,}7\,\mathrm{kN}.$$

b) Wie lange dauert die beschleunigte Fahrt?

$$\begin{aligned}
& & \ddot{x} &= a = \text{const.} \\
&\text{1 mal int. reicht} & \dot{x} &= a\, t + c_1 \\
&\text{AB} & \dot{x}(t=0) &= 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \\
&\text{tats. BewGl.} & \dot{x} &= a\, t \\
&\text{EB} & \dot{x}(t=T) &= v_e \\
&T \text{ best.} & T &= \frac{v_e}{a} \\
& & T &= 4\,\mathrm{s}.
\end{aligned}$$

c) Wie groß ist F bei Fahrt mit $\dot{x} = v_e = \text{const}$?

Was glauben Sie, wird die Kraft größer oder kleiner werden?

Wenn mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird, ist die Beschleunigung $\ddot{x} = 0$.

$$F = \frac{m_2\, g}{\mu} - \frac{\ddot{x}}{\mu}\left(\frac{1}{2}\, m_1 + m_2\right)$$

$$F = \frac{m_2\, g}{\mu}$$

$$F = 56{,}1\,\mathrm{kN}.$$

Na klar, wenn der Förderkorb nicht noch schneller werden soll, muss stärker gebremst werden, F wird größer.

■

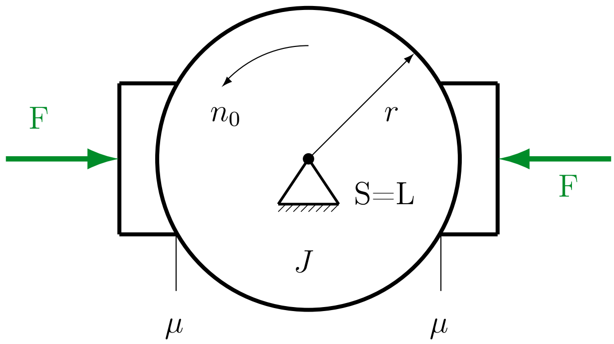
3.2.3. Übung, Wäscheschleuder

Aus Sicherheitsgründen wird eine Wäscheschleuder so abgebremst, dass sie nach einer Sekunde zum Stillstand kommt.

a) Wie groß muss F bei einer Drehzahl n_0 sein?

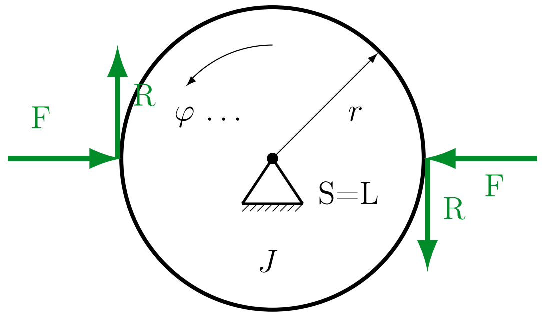
b) Wieviele Umdrehungen werden beim Bremsvorgang ausgeführt?

Gegeben: $n_0 = 1000\,\mathrm{U/min}$, $r = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $J = 0{,}4\,\mathrm{kg\,m^2}$, $\mu = 0,35$.



Lösung

Freischneiden



a) Wie groß ist F?

Hauptsatz der Körperdynamik, IMS

$$\sum M_i[L] = J_S\,\ddot{\varphi},$$

$$-\,2\,R\,r = J_S\,\ddot{\varphi} \qquad \text{mit} \qquad R = \mu\,F$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\,\mu\,F\,r}{J_S} = \alpha$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\,\mu\,F\,r}{J_S} = \text{const.}$$

2 mal int. $$\dot{\varphi} = -\frac{2\,\mu\,F\,r}{J_S}\,t + c_1$$

$$\varphi = -\frac{\mu\,F\,r}{J_S}\,t^2 + c_1\,t + c_2$$

AB1 $$\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 = 2\pi\,\frac{n_0}{60}$$

AB2 $$\varphi(t=0) = 0$$

$c_{1,2}$ best. $$c_1 = \frac{\pi\,n_0}{30}, \qquad c_2 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \qquad \dot{\varphi} = -\frac{2\,\mu\,F\,r}{J_S}\,t + \frac{\pi\,n_0}{30}$$

$$\varphi = -\frac{\mu\,F\,r}{J_S}\,t^2 + \frac{\pi\,n_0}{30}\,t$$

$$\text{EB1} \qquad \dot{\varphi}(t = T) = 0$$

$$\text{EB2} \qquad \varphi(t = T) = \varphi_e = ?$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \qquad 0 = -\frac{2\,\mu\,F\,r}{J_S}\,T + \frac{\pi\,n_0}{30}$$

$$T = \frac{\pi\,n_0\,J_s}{60\,\mu\,F\,r}$$

$$F \text{ ist gesucht, bei } T = 1\,\mathrm{s} \qquad F = \frac{\pi\,n_0\,J_s}{60\,\mu\,T\,r}$$

$$F = 300\,\mathrm{N}.$$

b) Wieviele Umdrehungen werden zurückgelegt? Wir fragen zunächst nach dem zurückgelegten Winkel φ_e.

$$\varphi_e = -\frac{\mu\,F\,r}{J_S}\,T^2 + \frac{\pi\,n_0}{30}\,T$$

$$F \text{ eingesetzt} \qquad \varphi_e = -\frac{\mu\,r\,\pi\,n_0\,J_S}{60\,\mu\,T\,r\,J_S}\,T^2 + \frac{\pi\,n_0}{30}\,T$$

$$\varphi_e = -\frac{\pi\,n_0}{60}\,T + \frac{\pi\,n_0}{30}\,T$$

$$\varphi_e = \frac{\pi\,n_0}{60}\,T$$

$$\varphi_e = 52,3 \qquad \text{Bogenmaß!}$$

Die Zahl der Umdrehungen ist

$$\frac{52,3}{2\pi} = 8,3 \text{ Umdrehungen}$$

■

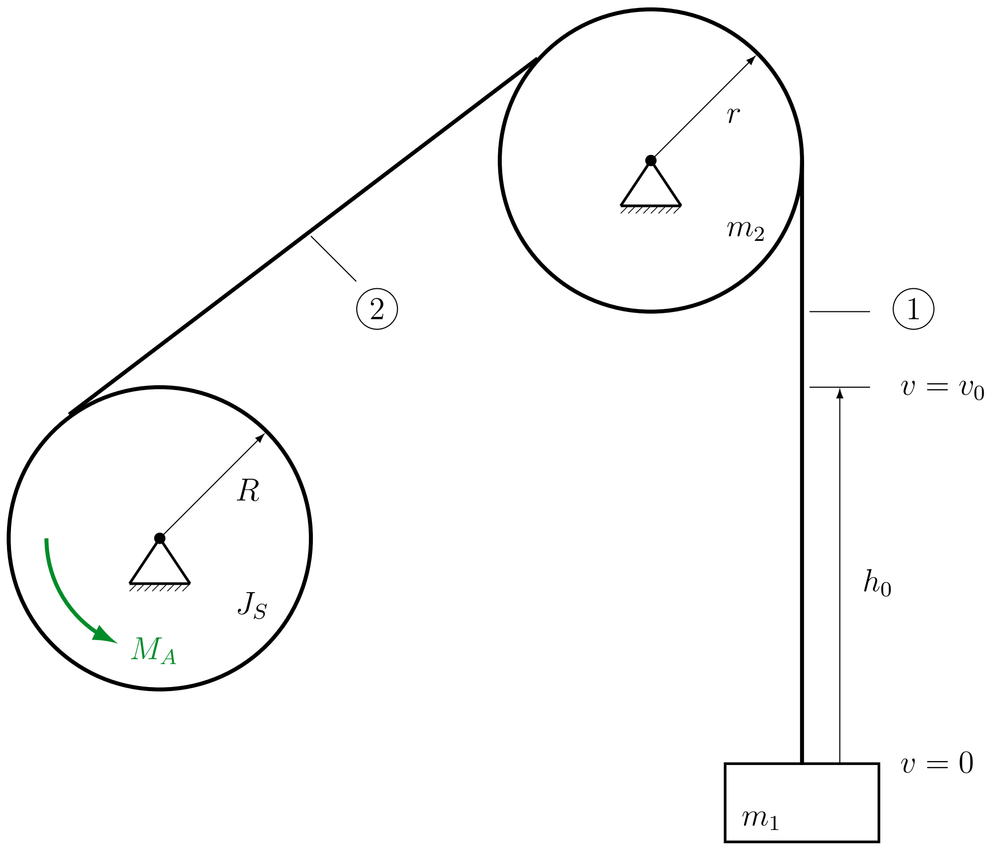
3.2.4. Übung, Förderkorb, Seilkräfte

Ein Förderkorb fährt zu Tage. Er wird mit konstanter Beschleunigung auf einer Strecke h_0 auf v_0 beschleunigt.

Gegeben: $h_0,\ v_0,\ m_1,\ m_2$ (Vollscheibe), $r,\ R,\ J_S$

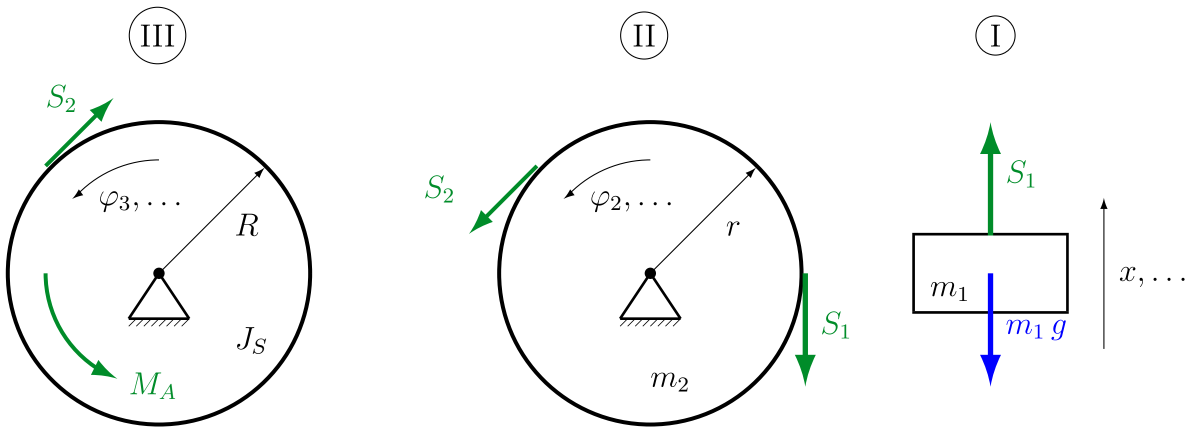
a) Wie groß ist die Seilkraft 1

b) Wie groß ist die Seilkraft 2



Lösung

Freischneiden



Hauptsätze der Körperdynamik

$$
\begin{aligned}
&\text{Körper I, SwS} && S_1 - m_1\, g = m_1\, \ddot{x} \\
&\text{Körper II, IMS} && S_2\, r - S_1\, r = \frac{1}{2}\, m_2\, r^2\, \ddot{\varphi}_2 \\
&\text{Körper III, IMS} && M_A - S_2\, R = J_S\, \ddot{\varphi}_3
\end{aligned}
$$

Kinematische Koppelung

$$x = r\,\varphi_2 = R\,\varphi_3; \qquad \ddot{x} = r\,\ddot{\varphi}_2 = R\,\ddot{\varphi}_3$$

Um die Seilkräfte angeben zu können müssen die (Winkel-)Beschleunigungen bekannt sein. Informationen über translatorische Wege und Geschwindigkeiten liegen vor, daher ist $\ddot{x}$ von primärem Interesse.

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= a = \text{const.} \\
\dot{x} &= a\, t + c_1 \\
x &= \frac{a}{2}\, t^2 + c_1\, t + c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{AB1} \qquad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \\
&\text{AB2} \qquad x(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{tats. BewGl.} \qquad & \dot{x} = a\,t \\
& x = \frac{a}{2}\,t^2 \\
\text{EB1} \qquad & \dot{x}(t=T) = v_0 \\
\text{EB2} \qquad & x(t=T) = h_0 \\
\text{T best. EB1} \qquad & T = \frac{v_0}{a} \\
\text{ges. Größe } a \text{ bestimmen} \qquad & h_0 = \frac{a}{2}\,T^2 \\
& h_0 = \frac{a}{2}\,\frac{v_0^2}{a^2} \\
& a = \frac{v_0^2}{2\,h_0} = \ddot{x}
\end{aligned}$$

Aus Körper I ist die Seilkraft S_1 berechenbar.

$$\begin{aligned}
S_1 &= m_1\,(\ddot{x} + g) \\
S_1 &= m_1\,\left(\frac{v_0^2}{2\,h_0} + g\right)
\end{aligned}$$

Aus Körper II ist die Seilkraft S_2 berechenbar. Hierzu muss $\ddot{\varphi}_2$ eliminiert werden.

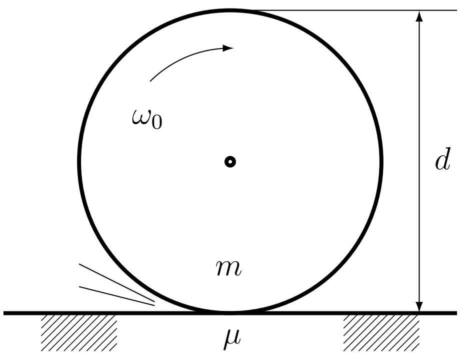
$$\begin{aligned}
S_2\,r - S_1\,r &= \frac{1}{2}\,m_2\,r^2\,\ddot{\varphi}_2 \\
S_2 - S_1 &= \frac{1}{2}\,m_2\,r\,\frac{\ddot{x}}{r} \\
S_2 &= \frac{1}{2}\,m_2\,\ddot{x} + m_1\,(\ddot{x} + g) \\
S_2 &= \left(\frac{1}{2}\,m_2 + m_1\right)\,\ddot{x} + m_1\,g \\
S_2 &= \left(\frac{1}{2}\,m_2 + m_1\right)\,\frac{v_0^2}{2\,h_0} + m_1\,g.
\end{aligned}$$

Aus Körper III könnte das noch unbekannte Antriebsmoment M_A berechnet werden. Danach ist aber nicht gefragt. ■

3.2.5. Übung, Grinding disk goes berserk

Eine homogene Schleifscheibe (Durchmesser d) löst sich bei einer Kreisfrequenz ω_0 von der Welle und fällt senkrecht zu Boden. Wir nehmen an, dass die Scheibe beim Aufprall nicht springt (Gleitreibung μ). Gegeben: $d = 30\,\mathrm{mm}$, $\omega_0 = 90\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $\mu = 0,5$, Masse m beliebig.

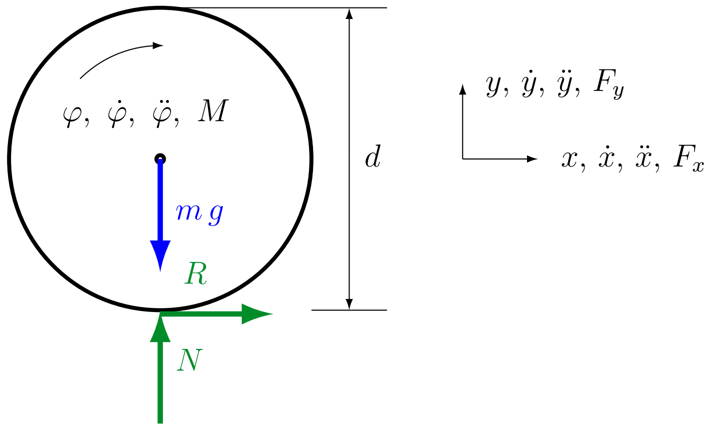
Welche Geschwindigkeit v_1 erreicht der Schwerpunkt der Scheibe auf horizontaler Ebene?



Lösung

Die Scheibe wird kurzzeitig auf der Stelle rotieren, Reibkräfte werden wirken und die Scheibe wird sich alsbald translatorisch beschleunigt bewegen. Gleichzeitig wird die Winkelgeschwindigkeit abnehmen. Zu einem späteren Zeitpunkt wird die Scheibe in reines Rollen übergehen. Dann ist die gesuchte Geschwindigkeit v_1 erreicht.

Freischneiden



Hauptsätze der Körperdynamik. In diesem Fall hat ein Körper sowohl eine translatorische als auch eine rotatorische Bewegung.

$$
\begin{aligned}
&y\text{-Richtung, SwS} && N - m\,g = m\,\ddot y = 0 \quad \text{(kein Springen)}\\
& && N = m\,g, \qquad R = \mu\,m\,g\\
&x\text{-Richtung, SwS} && R = m\,\ddot x\\
& && \mu\,m\,g = m\,\ddot x\\
& && \ddot x = \mu\,g\\
&\text{IMS} && -R\,\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\,m\,\frac{d^2}{4}\,\ddot\varphi\\
& && -\mu\,g = \frac{d}{4}\,\ddot\varphi\\
& && \ddot\varphi = -\frac{4\,\mu\,g}{d}
\end{aligned}
$$

Nicht zu fassen, eine Reibkraft treibt etwas an. Manchmal ist das wirklich der Fall.

Kinematik

$$
\begin{array}{lll}
 & \ddot{x} = \mu\, g & \ddot{\varphi} = -\dfrac{4\,\mu\, g}{d} \\[2ex]
 & \dot{x} = \mu\, g\, t + c_1 & \dot{\varphi} = -\dfrac{4\,\mu\, g}{d}\, t + c_3 \\[2ex]
 & x = \dfrac{\mu\, g}{2}\, t^2 + c_1\, t + c_2 & \varphi = -\dfrac{4\,\mu\, g}{2\, d}\, t^2 + c_3\, t + c_4 \\[2ex]
\text{AB1} & \dot{x}(t=0) = 0 \;\rightarrow\; c_1 = 0 & \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 \;\rightarrow\; c_3 = \omega_0 \\[1ex]
\text{AB2} & x(t=0) = 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0 & \varphi(t=0) = 0 \;\rightarrow\; c_4 = 0 \\[2ex]
\text{tats. BewGl.} & \dot{x} = \mu\, g\, t & \dot{\varphi} = -\dfrac{4\,\mu\, g}{d}\, t + \omega_0 \\[2ex]
 & x = \dfrac{\mu\, g}{2}\, t^2 & \varphi = -\dfrac{4\,\mu\, g}{2\, d}\, t^2 + \omega_0\, t
\end{array}
$$

Den Endbedingungen kommt nun eine besondere Bedeutung zu. Wenn ein rotierender Körper rollt (und nicht rutscht/durchdreht), haben translatorische Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit ein Verhältnis zueinander, das wir als kinematische Koppelung kennen.

$$\dot{x}(t=T) = \frac{d}{2}\,\dot{\varphi}(t=T) = v_1$$

Das erinnert ein wenig an eine Übergangsbedingung bei der Balkenbiegung. Es geht hier auch um einen Übergang, den vom Durchdrehen zum Rollen.

$$
\begin{array}{ll}
T \text{ bestimmen} & \mu\, g\, T = \dfrac{d}{2}\left(-\dfrac{4\,\mu\, g}{d}\, T + \omega_0\right) \\[2ex]
 & \mu\, g\, T + 2\,\mu\, g\, T = \dfrac{d}{2}\,\omega_0 \\[2ex]
 & T = \dfrac{\omega_0\, d}{6\,\mu\, g}
\end{array}
$$

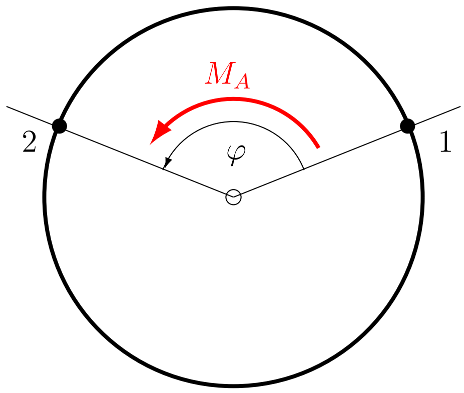
Mit der Zeit T kann mittels $\dot{x}(t=T) = v_1$ die gesuchte Größe v_1 ausgerechnet werden.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \mu\, g\, T \\
v_1 &= \mu\, g\, \frac{\omega_0\, d}{6\,\mu\, g} \\
v_1 &= \frac{\omega_0\, d}{6}, \qquad v_1 = 4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.
\end{aligned}
$$

■

3.3. Arbeit und Leistung bei rotatorischen Bewegungen

Zur Vereinfachung werden Bewegungen mit konstanten Antriebsmomenten betrachtet. In Analogie zu Gleichung I.15 auf Seite 25 berechnet sich die Arbeit bei einer rotatorischen Bewegung vom Zustand 1 zum Zustand 2



(I.26) $$W_{M\,1\to 2} = \pm M_A\,\varphi$$

mit

$$W_{M\,1\to 2} = +M_A\,\varphi, \text{ wenn } M_A \text{ und } \varphi \text{ gleichsinnig und}$$
$$W_{M\,1\to 2} = -M_A\,\varphi, \text{ wenn } M_A \text{ und } \varphi \text{ gegensinnig.}$$

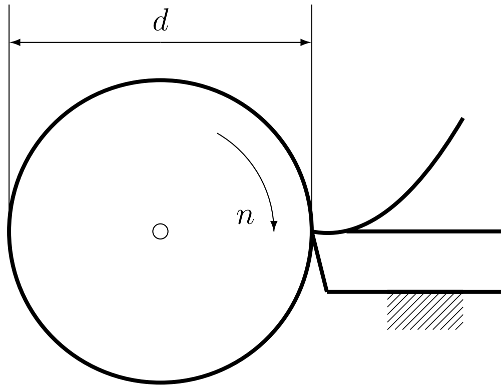
Die Leistung P berechnet sich bei konstanter Winkelgeschwindigkeit zu

(I.27) $$P = M\,\omega = M\,\frac{\pi\,n}{30} \approx \frac{M\,n}{10}.$$

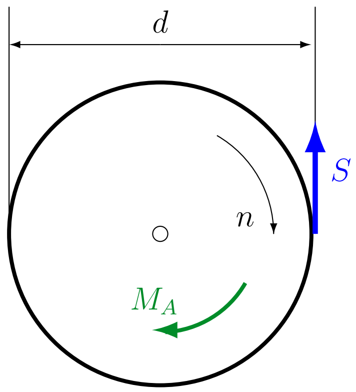
Siehe auch Gleichungen I.18 auf Seite 32 und I.9 auf Seite 8. ■

3.3.1. Übung, Schnittleistung

An einem Werkstück mit Durchmesser d wird gedreht. Die Schnittkraft beträgt 1,8 kN. Wie groß ist die Schnittleistung bei einer Drehzahl von $n = 250\ 1/\text{min}$?



Lösung



$$\text{IMS} \qquad M_A - S\,\frac{d}{2} = J\ddot{\varphi} = 0, \quad \text{da } n = \text{const.}$$

$$M_A = S\,\frac{d}{2}$$

$$\text{Leistung} \qquad P = M\,\omega = S\,\frac{d}{2} \cdot \frac{\pi\, n}{30}$$

$$P = \frac{1800 \cdot 0,06 \cdot \pi \cdot 250}{60}\ \frac{\text{N m}}{\text{s}} = \text{W}$$

$$P = 1{,}41\,\text{kW}$$

■

3.3.2. Übung, Arbeit an der Kurbel

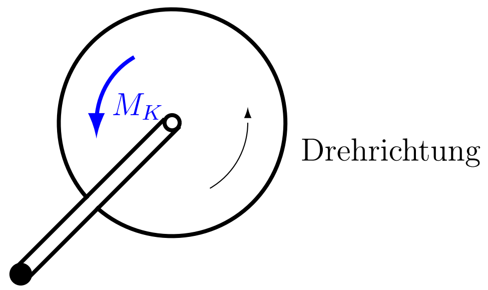
An einer Seilwinde mit Handkurbel wirkt ein Kurbelmoment M_K von 45 Nm. Es werden $m = 127{,}5$ Umdrehungen gemacht, dabei wird die Last um die Strecke $x = 25$ m angehoben. Es treten keine nennenswerten Beschleunigungen auf. Wie groß ist

a) die Dreharbeit an der Kurbel,

b) der Betrag der Seilkraft?

Lösung

a)

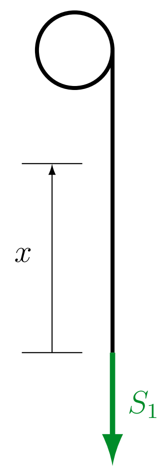


Kurbelarbeit

$$W_K = M_K\,\varphi = M_K\,m \cdot 2\pi$$
$$W_K = 45 \cdot 127,5 \cdot 2\pi \text{ N m}$$
$$W_K = 36{,}1\,\text{kJ}.$$

b)

$$W_{\text{Kurbel}} + W_{\text{Seil}} = 0$$
$$M_K\,\varphi + x\,(-S_1) = 0$$
$$S_1 = \frac{M_K\,\varphi}{x}$$
$$S_1 = \frac{M_K\,m \cdot 2\pi}{x}$$
$$S_1 = \frac{45 \cdot 127.5 \cdot 2\pi}{25} \text{ N}$$
$$S_1 = 1{,}44\,\text{kN}.$$



■

3.3.3. Übung, Lokschuppendrehscheibe

Eine Lokschuppendrehscheibe dreht sich in 40 s um 180°. Zur Überwindung der Reibung ist ein Drehmoment von 30 000 Nm nötig.

Wie groß ist die Antriebsleistung?

Lösung

$$\begin{aligned}
\text{Leistung} \qquad & P = M\,\omega \\
& \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \text{hier} \quad \omega = \frac{\varphi}{t} \\
& P = M\,\frac{\varphi}{t} \\
\text{Bogenmaß!} \qquad & P = 30 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{40}\ \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} \\
& P = 2{,}36\,\mathrm{kW}.
\end{aligned}$$

■

3.4. Arbeitssatz bei Drehung um eine feste Achse

Analog zu den Gleichungen I.19 auf Seite 35 kann der Arbeitssatz für Drehbewegungen hergeleitet werden.

$$W_{M\,1\to 2} = \frac{1}{2}\,J_D\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}\,J_D\,\omega_1^2. \tag{I.28}$$

mit

$W_{M\,1\to 2}$: Arbeit eines Moments bei einer Verdrehung um eine feste Achse von Zustand 1 zu Zustand 2,

ω_1: Winkelgeschwindigkeit beim Zusatand 1,

ω_2: Winkelgeschwindigkeit beim Zusatand 2.

oder kurz

$$W_{M\,1\to 2} = E_{\mathrm{kin\,rot2}} - E_{\mathrm{kin\,rot1}}. \tag{I.29}$$

■

3.4.1. Übung, Wäscheschleuder mit Arbeitssatz

Aus Sicherheitsgründen wird eine Wäscheschleuder so abgebremst, dass sie nach einer Umdrehung zum Stillstand kommt.

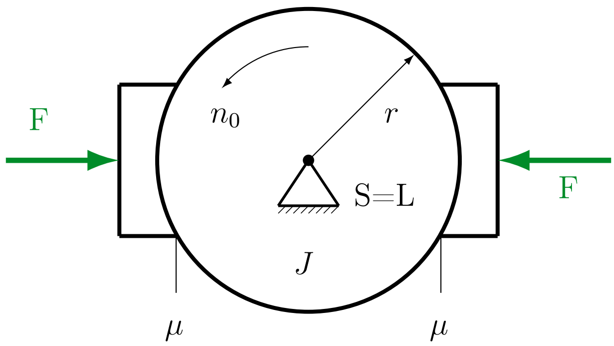
Wie groß muss F bei einer Drehzahl n_0 sein?

Eine ganz ähnliche Aufgabe wurde schon als Übungsaufgabe 3.2.3 auf Seite 49 mittels IMS gelöst.

Die damalige Forderung lautete, dass die Wäscheschleuder nach einer Sekunde zum Stillstand kommt. Da im Arbeitssatz keine Zeiten t auftauchen, wird die Fragestellung für den Arbeitssatz angepasst.

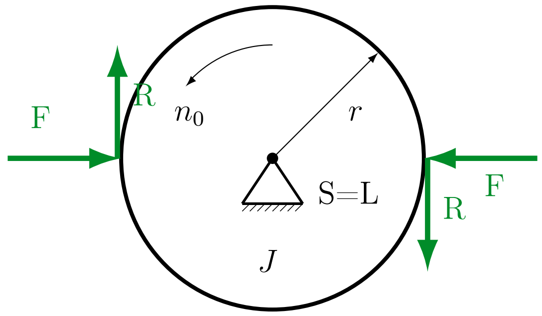
Merke: SwS und IMS gelingen immer und liefern Ergebnisse für alle Lebenslagen. Wenn nach Wegen/Winkeln, Kräften/Momenten und/oder (Winkel-)Geschwindigkeiten gefragt wird, liefert der Arbeitssatz einen schnelleren Rechenweg.

Gegeben: $n_0 = 1000\,\mathrm{U/min},\ r = 0{,}2\,\mathrm{m},\ J = 0{,}4\,\mathrm{kg\,m^2},\ \mu = 0,35.$



Lösung

Freischneiden



$$\text{Arbeitssatz} \qquad W_{M\,1\to2} = E_{\text{kin rot2}} - E_{\text{kin rot1}}.$$

$$M\,\varphi = \frac{1}{2}\,J\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}\,J\,\omega_1^2$$

Es wirken die Momente $R\,r$ an zwei Stellen, entgegen der Drehrichtung. Es wird eine Umdrehung ($\varphi = 2\pi$) zurückgelegt.

$$W_{M\,1\to2} = -2\,R\,r\cdot 2\pi$$

$$R = \mu\,N = \mu\,F$$

$$W_{M\,1\to2} = -4\,\mu\,F\,r\,\pi$$

$$\text{Position 1:} \qquad \omega_1 = \frac{\pi\,n_0}{30}$$

$$\text{Position 2:} \qquad \omega_2 = 0 \quad \text{(Stillstand)}$$

$$E_{\text{kin rot2}} = \frac{1}{2}J\cdot 0 = 0$$

$$E_{\text{kin rot1}} = \frac{1}{2}J\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\,J\,\frac{\pi^2\,n_0^2}{30^2}$$

$$\text{in Arbeitssatz} \qquad -4\,\mu\,F\,r\,\pi = 0 - \frac{1}{2}\,J\,\frac{\pi^2\,n_0^2}{30^2}$$

$$F = \frac{J\,\pi^2\,n_0^2}{4\,\mu\,r\,\pi\cdot 2\cdot 30^2}$$

$$F = \frac{0,4\cdot\pi\cdot 1000^2}{4\cdot 0,35\cdot 0,2\cdot 2\cdot 30^2}\ \mathrm{N}$$

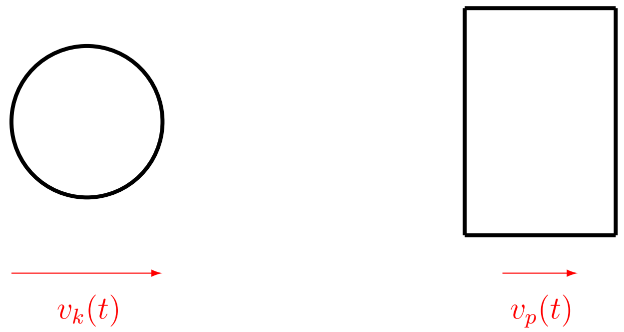
$$F = 2493\,\mathrm{N}$$

■

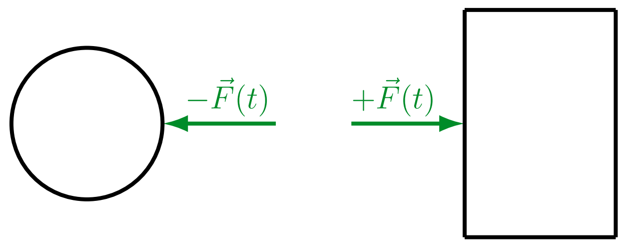
4. Stoßvorgänge

Beim Zusammenprall zweier Körper entstehen sehr schnell Deformationen, die vorübergehend oder bleibend sein können. Dabei treten erheblich Kräfte auf, deren zeitliche Verläufe i. A. nicht bekannt sind.

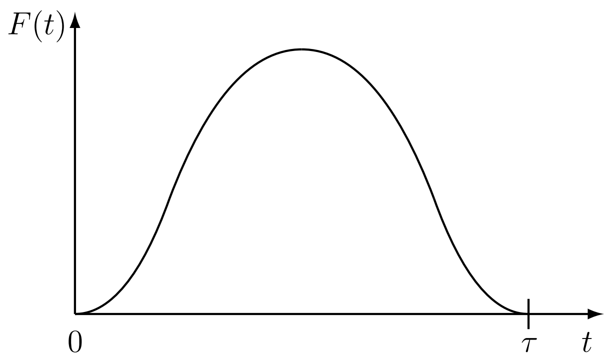
Beispiel: Eine Kugel prallt auf eine Platte. Beide Körper können Geschwindigkeiten v haben.



Während des Kontakts wird das System zerschnitten.



Kraftverlauf von $|\vec{F}(t)| = F(t)$:



$t = 0$: Zeitpunkt unmittelbar vor dem Stoßkontakt

$t = \tau$: Zeitpunkt unmittelbar nach Ablauf des Stoßvorgangs. Die Körper können sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten oder mit einer gemeinsamen weiterbewegen (noch zu klären). Die Fläche unter der Stoßkurve berechnet sich zu

$$S = \int_0^\tau F(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{mit } \tau\text{: Stoßzeit.}$$

$F(t)$ bzw. $\vec{F}(t)$ sind i.A. nicht bekannt. Es genügt das Integral der Kraft zu betrachten. Hierzu wird die vektorielle Größe Stoßantrieb $\vec{S}$ vereinbart

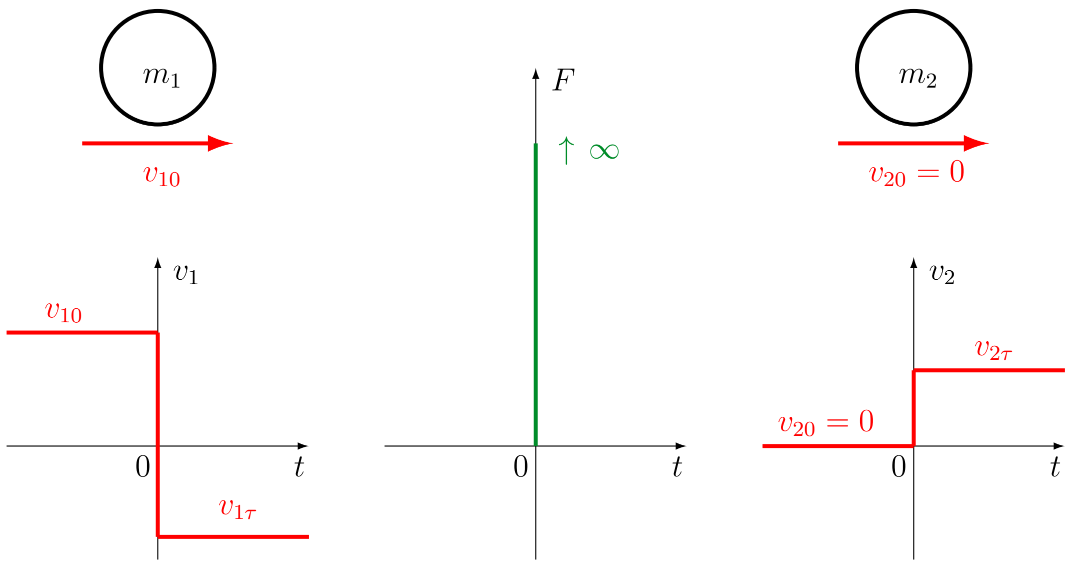
$$\vec{S} = \int_0^\tau \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \tag{I.30}$$

τ ist typischerweise sehr klein, die Kräfte $F(t)$ bzw. $\vec{F}(t)$ sehr groß. Es wird vereinfachend angenommen dass τ gegen Null strebt und die Größe

$$\lim_{\tau\to 0} \int_0^\tau \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{endlich ist.}$$

Bei dem hier angesprochenen Problem „Null mal Unendlich“ sind prinzipiell alle Ergebnisse möglich. Von Null über endliche Werte bis Unendlich. Hier ist ein endlicher Wert zu erwarten.

Folge: Die Körper behalten während des Stoßes ($0 \leq t \leq \tau$) ihre Lage bei, ihre Geschwindigkeiten ändern sich unstetig.



Indizierung der Geschwindigkeiten v_{10}, $v_{1\tau}$, v_{20}, $v_{2\tau}$.

erster Index: Körper

zweiter Index: 0 unmittelbar vor dem Stoß, τ unmittelbar nach dem Stoß.

Zur weiteren Betrachtung wird der Impulssatz (s. Gleichung I.22 auf Seite 39) benötigt.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{I}}{\mathrm{d}t}$$

Nebenbemerkung: Bei starren Körpern mit konstanter Masse wird daraus

$$\vec{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_S}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a}_S$$

$$\dim\,[I,\,\vec{I}] = \frac{\text{Masse}\cdot\text{Länge}}{\text{Zeit}}, \qquad \text{Einheit: } 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{Ns}$$

Durch formale Integration über die Stoßdauer τ folgt

$$\int\limits_0^\tau \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\tau \frac{\mathrm{d}\vec{I}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\tau \mathrm{d}\,\vec{I} = \vec{I}(t=\tau) - \vec{I}(t=0).$$

Mit der Definition des Stoßantriebs s. Gl. I.30 auf der vorherigen Seite gilt

$$\vec{S} = \int\limits_0^\tau m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_S}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m\left[\vec{v}_S(t=\tau) - \vec{v}_S(t=0)\right].$$

Zusammengefasst

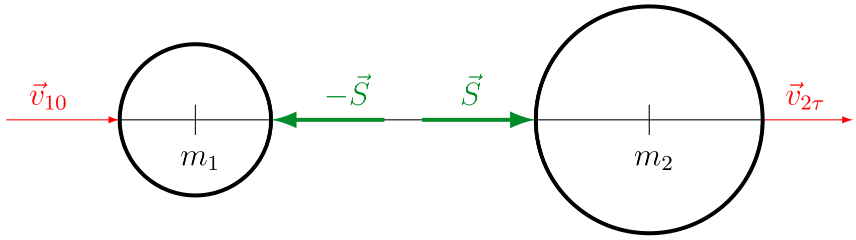
$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{I}(\tau) - \vec{I}(0) \\ \vec{S} &= m\left[\vec{v}_S(\tau) - \vec{v}_S(0)\right]. \end{aligned} \tag{I.31}$$

v_S beschreibt die Schwerpunktgeschwindigkeit eines Körpers. Der Hinweis auf den Schwerpunkt wird, weil selbstverständlich, alsbald weggelassen.

Stoßantriebe $\vec{S}$ zwischen zwei Körpern werden mit der gleichen Methodik freigelegt, wie Kräfte. Es gilt:

$$\begin{aligned} -\vec{S} &= m_1\left(\vec{v}_{1\tau} - \vec{v}_{10}\right) \qquad \text{Körper 1} \\ \vec{S} &= m_2\left(\vec{v}_{2\tau} - \vec{v}_{20}\right) \qquad \text{Körper 2} \end{aligned} \tag{I.32}$$

Vereinfachend wird hierbei angenommen, dass die Wirkungslinien der Stoßantriebe $\vec{S}$ und die Richtungen der von Null verschiedenen Geschwindigkeiten $\vec{v}_{xy}$ mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte zusammenfällt.



Bei einem solchen geraden, zentrischen Stoß können keine Drehbewegungen entstehen.

Die Gleichungen I.32 auf der vorherigen Seite können zu einer Gleichung, der Impulserhaltung zusammengefasst werden

(I.33) $$m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = m_1\, v_{1\tau} + m_2\, v_{2\tau}.$$

4.1. Völlig elastischer Stoß

Die kinetischen Energien der beiden Körper bleiben erhalten

(I.34) $$E_{\text{kin}1\tau} + E_{\text{kin}2\tau} = E_{\text{kin}10} + E_{\text{kin}20}$$

Ein vollkommen elastischer Flummi erreicht nach dem Stoß exakt die Höhe, aus der er losgelassen wurde. Die Realität ist ein wenig anders.

4.2. Völlig unelastischer Stoß

Die Körper trennen sich nach dem Stoß nicht mehr, ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind gleich.

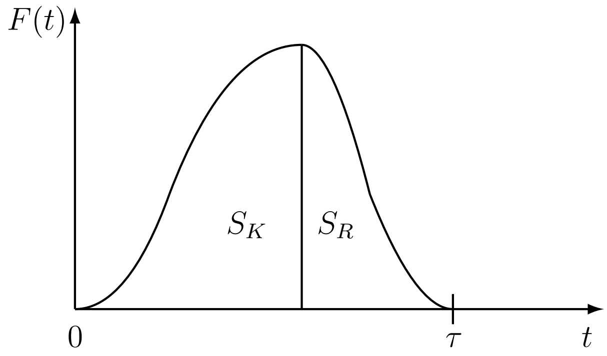
(I.35) $$v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

Ein fallengelassener Klumpen aus Plastilin (Knetgummi) spring gar nicht hoch. Die Erde und der Klumpen haben nach dem Stoß eine gemeinsame Geschwindigkeit.

4.3. Teilelastischer (realer) Stoß

Definition einer experimentell zu ermittelnden Stoßzahl κ (kappa).

$$\kappa = \frac{S_R}{S_K}, \qquad 0 \leq \kappa \leq 1$$



S_K: Stoßantrieb der Kompressionsphase,

S_R: Stoßantrieb der Restitutionsphase,

Es gilt

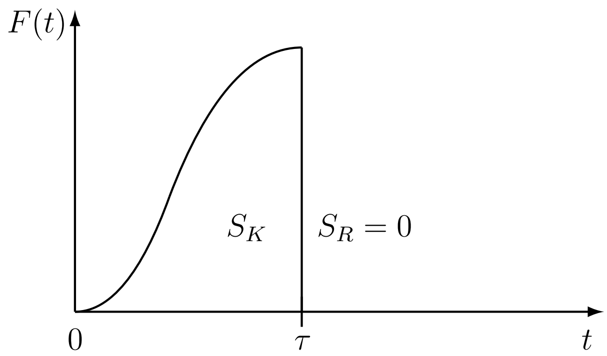
$$S_K + S_R = S = \int_0^\tau F(t)\,\mathrm{d}t$$

Bei einem vollkommen elastischen Stoß gilt

$$\kappa = 1; \qquad S_K = S_R$$

Bei einem vollkommen unelastischen Stoß gilt

$$\kappa = 0; \qquad S_R = 0$$



Es gilt beim geraden zentrischen Stoß

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \qquad 0 \leq \kappa \leq 1. \tag{I.36}$$

Reale Stöße sind immer teilelastisch. Die beiden idealen Stoßarten können mit diesem Kalkül auch abgebildet werden.

4.4. Zusammenfassung

Beim geraden, zentrischen Stoß gilt immer:

1) Die Impulserhaltung

$$m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2\, v_{2\tau}$$

sowie eine zweite Bedingung, die von der Stoßart abhängig ist.

2a) Vollkommen elastischer Stoß: Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}\, m_1\, v_{10}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{20}^2 = \frac{1}{2}\, m_1\, v_{1\tau}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{2\tau}^2$$

2b) Vollkommen unelastischer Stoß: Die Körper bleiben beieinander

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

2c) Teilelastischer (realer) Stoß: Stoßzahl κ

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \qquad 0 \leq \kappa \leq 1$$

Wer die Energieerhaltung des vollkommen elastischen Stoßes scheut, kann die Bedingung des teilelastischen Stoßes anwenden. Es gilt dann $\kappa = 1$. ■

4.4.1. Übung, Stoß zweier Klötze

Gegeben: $v_{10} = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ m_1 = 100\,\mathrm{g},\ m_2 = 20\,\mathrm{g}$.

Gesucht: v_{20} damit Körper 1 nach dem Stoß zum Stillstand kommt ($v_{1\tau} = 0$) bei

a) vollkommen unelastischem Stoß,

b) vollkommen elastischem Stoß,

c) realem Stoß mit $\kappa = 0,7$.

Lösung

Bei Stoßvorgängen gilt immer die Impulserhaltung

$$m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2\, v_{2\tau}$$

In dieser Aufgabe gilt für alle drei Fragestellungen $v_{1\tau} = 0$. Somit vereinfacht sich die Impulserhaltung zu

$$m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = m_2 v_{2\tau}$$

a) vollkommen unelastischer Stoß

$$\begin{aligned}
\text{es gilt} \qquad & v_{1\tau} = v_{2\tau} \\
\text{hier daher} \qquad & v_{1\tau} = 0, \quad v_{2\tau} = 0 \\
\text{in Impulserhaltung} \qquad & m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = 0 \\
v_{20} \text{ ist gefragt} \qquad & v_{20} = -\frac{m_1}{m_2}\, v_{10} \\
& v_{20} = -2{,}5\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.
\end{aligned}$$

b) vollkommen elastischer Stoß

$$\begin{aligned}
\text{es gilt} \qquad & \frac{1}{2}\, m_1\, v_{10}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{20}^2 = \frac{1}{2}\, m_1\, v_{1\tau}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{2\tau}^2 \\
\text{hier mit } v_{1\tau} = 0 \qquad & m_1\, v_{10}^2 + m_2\, v_{20}^2 = m_2\, v_{2\tau}^2
\end{aligned}$$

Es bleiben die Unbekannten v_{20} und $v_{2\tau}$. Letztere ist uninteressant und wird daher eliminiert.

$$\begin{aligned}
\text{Impulserhaltung} \qquad & v_{2\tau} = \frac{m_1}{m_2}\, v_{10} + v_{20} \\
\text{Energieerhaltung} \qquad & m_1\, v_{10}^2 + m_2\, v_{20}^2 = m_2\, v_{2\tau}^2 \\
& \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}^2 + v_{20}^2 = v_{2\tau}^2 \\
v_{2\tau} \text{ einsetzen} \qquad & \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}^2 + v_{20}^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\, v_{10} + v_{20}\right)^2 \\
& \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}^2 + v_{20}^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}\, v_{10}^2 + v_{20}^2 + 2\, \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}\, v_{20} \\
& \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}\, v_{10}^2 + 2\, \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}\, v_{20} \qquad \Big| \cdot \frac{m_2}{m_1}
\end{aligned}$$

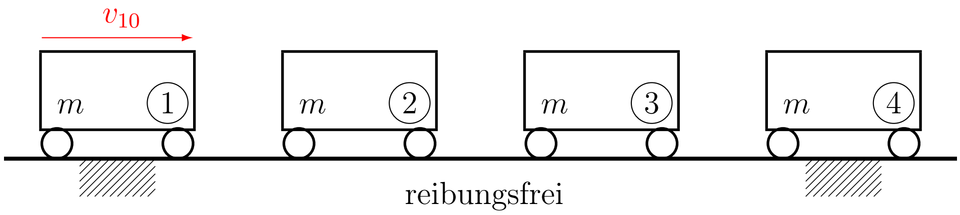
$$
\begin{aligned}
v_{10}^2 &= \frac{m_1}{m_2}\, v_{10}^2 + 2\, v_{10}\, v_{20} \qquad |:v_{10} \\
v_{10} &= \frac{m_1}{m_2}\, v_{10} + 2\, v_{20} \\
2\, v_{20} &= v_{10} - \frac{m_1}{m_2}\, v_{10} \\
v_{20} &= \frac{1}{2}\, v_{10} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \\
v_{20} &= -1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.
\end{aligned}
$$

c) realer Stoß, $\kappa = 0,7$

$$
\begin{aligned}
\text{erneut Impulserhaltung} \qquad & v_{2\tau} = \frac{m_1}{m_2}\, v_{10} + v_{20} \\
\text{realer Stoß} \qquad & \kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}} \\
\text{mit } v_{1\tau} = 0 \qquad & \kappa = -\frac{v_{2\tau}}{v_{20} - v_{10}} \\
\text{einsetzen} \qquad & \kappa = -\frac{\frac{m_1}{m_2}\, v_{10} + v_{20}}{v_{20} - v_{10}} \\
\text{nach } v_{20} \qquad & \kappa\,(v_{20} - v_{10}) = -\left(\frac{m_1}{m_2}\, v_{10} + v_{20}\right) \\
& \kappa\, v_{20} + v_{20} = -\frac{m_1}{m_2} v_{10} + \kappa\, v_{10} \\
& v_{20}\,(\kappa + 1) = v_{10} \left(\kappa - \frac{m_1}{m_2}\right) \\
& v_{20} = v_{10}\, \frac{\kappa - \frac{m_1}{m_2}}{\kappa + 1} \\
& v_{20} = -1{,}265\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.
\end{aligned}
$$

Die Aufgabenteile a) und b) sind bei vorhandener Lösung für c) ein Kinderspiel. Bei Aufgabenteil a) gilt $\kappa = 0$ und bei Aufgabenteil b) gilt $\kappa = 1$. Probieren Sie es aus! Wenn alle drei Fälle gefragt sind, so berechnen Sie den realen Stoß als erstes und wenden anschließend diesen Trick an. ■

4.4.2. Übung, vier Eisenbahnwagen



Vier gleiche Eisenbahnwagen stehen auf ebener Schiene. Wagen 1 stößt mit v_{10} auf den ruhenden Wagen 2. Weitere Stöße folgen. Wie groß ist zum Schluss $v_{4\tau}$, wenn alle Stöße

a) vollkommen unelastisch,

b) vollkommen elastisch,

c) teilelastisch mit Stoßzahl κ sind?

Auf Grund der schlechten Erfahrung in der letzten Aufgabe werden wir als erstes den Aufgabenteil c) behandeln. Wenn dieses Ergebnis vorliegt, werden die Aufgabenteile a) und b) im Handumdrehen erledigt.

Lösung

Bei Stoßvorgängen gilt immer die Impulserhaltung

$$m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2\, v_{2\tau}.$$

Bei teilelastischen (realen) Stößen gilt

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \qquad 0 \leq \kappa \leq 1.$$

Gesucht ist $v_{2\tau}$, uninteressant, daher zu eliminieren ist $v_{1\tau}$. Im vorliegenden Fall gilt $v_{20} = 0$, alle Massen sind gleich.

$$\begin{aligned}
\text{Impulserhaltung hier} \qquad & v_{10} = v_{1\tau} + v_{2\tau} \\
\text{teilelastisch hier} \qquad & \kappa = \frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{10}} \\
v_{1\tau} \text{ uninteressant} \qquad & v_{1\tau} = v_{10} - v_{2\tau} \\
\text{einsetzen} \qquad & \kappa = \frac{v_{2\tau} - v_{10} + v_{2\tau}}{v_{10}} \\
\text{nach } v_{2\tau} \qquad & 2\, v_{2\tau} - v_{10} = \kappa\, v_{10} \\
& v_{2\tau} = \frac{1}{2}\, v_{10}\, (1 + \kappa).
\end{aligned}$$

Jetzt stößt Wagen 2 auf 3. Aus der alten Geschwindigkeit $v_{2\tau}$ wird die neue v_{20}. Das vorherige Ergebnis wird angepasst

$$\begin{aligned}
& v_{3\tau} = \frac{1}{2}\, v_{20}\, (1 + \kappa) \\
\text{mit } v_{20} \qquad & v_{3\tau} = \frac{1}{4}\, v_{10}\, (1 + \kappa)^2
\end{aligned}$$

Wagen 3 auf 4. Dabei wird aus $v_{3\tau}$ ein neues v_{30}.

$$\begin{aligned}
& v_{4\tau} = \frac{1}{2}\, v_{30}\, (1 + \kappa) \\
\text{mit } v_{30} \qquad & v_{4\tau} = \frac{1}{8}\, v_{10}\, (1 + \kappa)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{a) vollkommen unelastisch, } \kappa = 0 \qquad & v_{4\tau} = \frac{1}{8}\, v_{10} \\
\text{b) vollkommen elastisch, } \kappa = 1 \qquad & v_{4\tau} = \frac{1}{8}\, v_{10}\, 2^3 = v_{10} \\
\text{c) teilelastisch, } \kappa = 0,7 \qquad & v_{4\tau} = \frac{1}{8}\, v_{10} \cdot 1,7^3 = 0,614 \cdot v_{10}
\end{aligned}$$

■