Sporthochseeschifferschein
Terrestrische Navigation

Joachim Venghaus*
www.venghaus.eu

11. März 2017

Inhaltsverzeichnis

*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund, ansprechbar unter segeln(at)venghaus.eu

1 Einleitung

Mit Wirkung zum 1. September 2015 gab es eine weitreichende Änderung bezüglich der zugelassenen Hilfsmittel bei der Prüfung zum Sportsee- und Sporthochseeschifferschein. Laut Lenkungsausschuss nach SportSeeSchiffV sind programmierte [sic!][1] und programmierbare Taschenrechner seitdem nicht mehr zugelassen. Stattdessen hat der Lenkungsausschuss eine Liste der zugelassenen Taschenrechner herausgegeben. Es steht zu befürchten, dass Taschenrechner, die nicht auf dieser Liste geführt sind, als unerlaubtes Hilfsmittel gewertet werden.

Das einzig verfügbare Buch, das die Prüfungsinhalte zum SHS zusammenträgt, ist das im Delius Klasing Verlag erschienene Werk *Sporthochseeschifferschein* von den Autoren Damm, Irminger, Schultz, Wand [DISW]. In dem von Christoph Wand darin erstellten Kapitel I *Navigation* [Wand] wird empfohlen, die anfallenden Berechnungen mit einem programmierbaren Taschenrechner durchzuführen. Auch wird dort versucht, mathematische Zusammenhänge mittels BASIC-Quellcode zu vermitteln. Es sei der Hinweis erlaubt, dass es wenig ansprechend ist, mathematische Ausdrücke in Form von Programmcode darzustellen, zumal BASIC kaum noch zu den gängigen Programmiersprachen gezählt werden kann.

Diese kurze Schrift macht es sich zur Aufgabe, die mathematischen Zusammenhänge zu den Themen Besteckrechnung und Großkreisnavigation kurz zusammenzufassen und in ein gut handhabbares Rechenschema zu überführen, welches mit Hilfe eines DSV-gebilligten Taschenrechners abarbeitbar ist. Hierbei wird auch auf den Personenkreis Rücksicht genommen, der eher mathematikfernen Professionen zuzurechnen ist. Leider sind die Rechenschemata bei der Prüfung nicht zugelassen.

2 Wahl des Taschenrechners

Bei der Auswahl des Taschenrechners sollte darauf geachtet werden, dass eine gewisse Anzahl von Speichern verfügbar ist. Bei HP- und CASIO-Rechnern sind sie mit den in rot aufgedruckten Großbuchstaben A bis F, X, Y und M bezeichnet. Alle neun Speicher werden benötigt. Hilfreich ist auch, wenn eine Taste vorhanden ist, die die Zeichenfolge $\boxed{\;°\,'\,''\;}$ aufweist. Hiermit können Winkel in der nautischen Form Grad, Minuten, Dezimalminuten (GMdez)[2] direkt eingegeben werden. Andere, in der Nautik weniger gebräuchliche Darstellungsformen sind Grad, Minuten, Sekunden (GMS)[3] oder Grad und Dezimalgrad (Gdez)[4]. Gelegentlich wird die letzte Form als Rechenergebnis auftauchen.

[1] Jeder Taschenrechner, der trigonometrische Funktionen beherrscht ist ein „programmierter Taschenrechner“. Durch fest programmierte Reihenentwicklungen werden die Werte von trigonometrischen Funktionen angenähert. Nicht programmierte Taschenrechner zu fordern ist Unfug, denn das liefe auf Holzkugel-Abakus und Rechenschieber hinaus. Es geht um nicht programmierbare Taschenrechner.

[2] GMdez: Nautische Form der Winkelangabe in Grad, Minuten und Dezimalminuten. Beispiel 54°48,3’ N

[3] GMS: Winkelangabe in Grad, Minuten, Sekunden. Beispiel 54°48’18” N

[4] Gdez: Winkelangabe in Grad und Dezimalgrad. Beispiel 54,805° N

Sie muss anschließend in GMdez umgerechnet werden.

Personen, denen die Mathematik eher fremd ist, sei noch empfohlen, einen Taschenrechner zu wählen, der Brüche im Display direkt darstellen kann. CASIO-Rechner tragen in solchen Fällen die rote Aufschrift „natural“. Die hier entwickelten Rechenschemata können mit solchen Rechnern schlicht abgetippt werden.

Der Autor hat sich zu diesem Zweck den Rechner CASIO fx-86DE plus zugelegt. Für den Bordgebrauch ist er recht gut geeignet, da eine Solarzelle einen Notbetrieb mit schwacher Batterie ermöglicht, außerdem kann eine Vielzahl von nichtmetrischen Einheiten in metrische umgerechnet werden und umgekehrt. Sollte eine Seekarte auftauchen, bei der die Wassertiefe in Fuß angegeben wird, muss nicht lange gesucht werden. Rechner anderer Hersteller mit den beschriebenen Eigenschaften sind selbstverständlich ebenfalls geeignet.

3 Besteckrechnung

Der Begriff Besteck leitet sich von einem Futteral ab, welches mit nautischen Werkzeugen wie Bleistift, Zirkel, Lineal bestückt oder *besteckt* wird. Die Begrifflichkeit ging auf die Gegenstände selbst über, siehe Messer und Gabel, und bezieht sich auch auf die Ergebnisse, die mit den Gegenständen erzeugt werden [Mestemacher] S. 188. In der Regel handelt es sich dabei um einen Ort oder um Kurs und Distanz zu einem Ort. Damit sind auch schon die beiden Fragestellungen bei der Besteckrechnung umrissen.

1. Aufgabe: Gegeben ist ein Ausgangsort mit Länge und Breite sowie Kurs und Distanz, jeweils über Grund. Gesucht ist der Zielort mit Länge und Breite.

2. Aufgabe: Gegeben ist ein Ausgangs- und ein Zielort jeweils mit Länge und Breite. Gesucht ist der zu steuernde Kurs und die zurückzulegende Entfernung jeweils über Grund.

Es bietet sich folgende Eselsbrücke an: Erste Aufgabe, ein Ort ist gegeben. Zweite Aufgabe, zwei Orte sind gegeben.

Bei der Besteckrechnung wird immer von konstanten Kursen ausgegangen. Mathematisch werden diese Linien Loxodrome genannt. Es gibt bekanntlich noch eine andere Art, von A nach B zu reisen, insbesondere, wenn diese Punkte weit auseinander liegen. Man folgt einem Großkreis. Auf einer Seekarte in Mercator-Projektion sind Großkreise leicht polwärts gekrümmte Linien (mit wenigen Ausnahmen, welche sind das?)[5]. Sie werden Orthodrome genannt, wir werden sie in Kapitel 4 auf Seite 20 kennenlernen.

Grundsätzlich gibt es für die Besteckrechnung zwei Lösungswege. Eine exakte Lösung, die jedoch etwas schwerfällig zu handhaben ist und eine Näherungslösung die wesentlich

[5] Alle Meridiane und auch der Äquator sind Großkreise, sie sind die einzigen, die in einer Mercator-Karte als gerade Linien erscheinen.

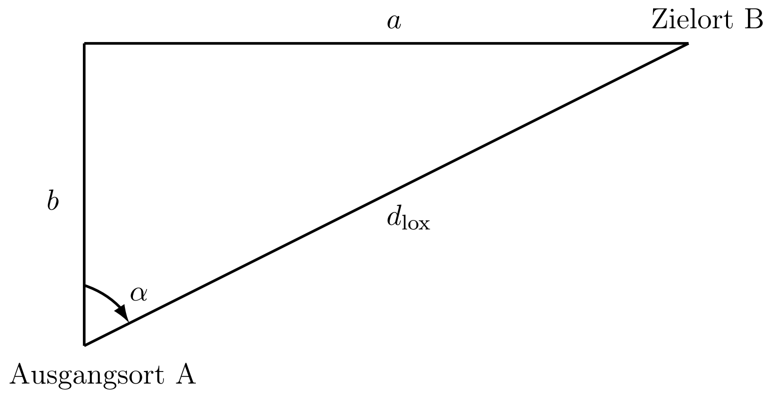
leichter durchführbar ist, jedoch bei großen Distanzen, bei bestimmten Kursen und insbesondere in hohen Breiten ungenau wird. Diese Näherungslösung wird zuerst behandelt.

3.1 Besteckrechnung nach Mittelbreite

Diese Näherungslösung ist für beide Aufgabentypen anwendbar. Laut [DISW] S.19, grüner Kasten, sollen die Distanzen kleiner als 500 sm sein, in hohen Breiten müssen die Distanzen noch geringer sein. Ferner soll dieses Verfahren ungenauer werden, wenn der Äquator überquert wird. Letzteres ist falsch; das Verfahren ist bei Kursen, die den Äquator überqueren vergleichsweise genau. Es ist leider nicht sicher, dass jeder Prüfer diese Erkenntnis hat, da der gleiche Fehler sich in die Musterlösungen eingeschlichen haben könnte. Es spricht im wahren Leben also nichts dagegen, dieses Verfahren anzuwenden, auch wenn der Äquator überquert wird. Die Vorzeichen der Breiten und Längen müssen selbstverständlich richtig eingegeben und ausgewertet werden, hierzu später mehr.

Die Bezeichnung Mittelbreite beruht darauf, dass bei unserer Reise von A nach B sich auch unsere Breite ändert, es sei denn, wir führen auf reinen Ost- oder Westkursen. Aus der Ausgangs- und der Zielbreite wird die Mittelbreite, also die Breite auf halbem Weg als Hilfsgröße benötigt.

Beide Aufgaben der Besteckrechnung sind mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks lösbar.



Das Dreieck ist beschrieben durch die Größen:

b Breitenunterschied,

a Abweitung,

d_{lox} Loxodromische Distanz über Grund (DüG),

α Kurs über Grund (KüG),

A Ausgangsort mit der Breite φ_{A} und der Länge λ_{A},

B Zielort mit der Breite φ_{B} und der Länge λ_{B},

Die Dreiecksseite b oder mathematisch korrekt, die Ankathete b, hier Breitenunterschied genannt, berechnet sich zu

$$b = \varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{A}}.$$

Die Dreiecksseite a oder Gegenkathete a, hier Abweitung genannt, kann in zwei verschiedenen Maßstäben und damit Zahlenwerten angegeben werden. Sie kann in Seemeilen angegeben werden, was für die Abweitung auch zutreffend ist oder als Längenunterschied ℓ, für den gilt

$$\ell = \lambda_{\mathrm{B}} - \lambda_{\mathrm{A}}.$$

Nun ist bekannt, dass Längenminuten keineswegs Seemeilen sind, wie es bei Breitenminuten der Fall ist (eine Ausnahme, wo?)[6]. Demzufolge muss es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen den beiden Größen Abweitung a und Längenunterschied ℓ geben. Grundsätzlich gilt:

$$a = \ell \cos\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad \ell = \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Nur welche Breite φ sollte hier benutzt werden, die des Ausgangsorts φ_{A} oder die des Zielorts φ_{B}? Weder noch, hier kommt als Kompromiss die Näherungslösung der Mittleren Breite φ_{m} ins Spiel:

$$\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{A}}}{2}.$$

3.1.1 Erste Aufgabe der Besteckrechnung

Gegeben sind bei der ersten Aufgabe Ausgangsort mit φ_{A} und λ_{A} sowie KüG α und DüG d_{lox}. Gesucht ist der Zielort mit φ_{B} und λ_{B}.

Es gilt für die gesuchte Breite φ_{B}:

$$\varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}} + b \qquad \text{mit} \qquad b = d_{\mathrm{lox}} \cos\alpha.$$

Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Breiten φ in Grad anzugeben sind, Distanzen hingegen in Seemeilen und damit Breitenminuten. 60 Minuten ergeben wie üblich ein Grad. Somit ergibt sich die direkt verwendbare Gleichung:

$$\varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}} + \frac{d_{\mathrm{lox}} \cos\alpha}{60}. \tag{1}$$

Der Kosinus sorgt übrigens bei Kursen mit Südkomponente ($90^o < \alpha < 270^o$) durch sein Vorzeichen dafür, dass φ_{B} kleiner als φ_{A} wird.

Es gilt für die gesuchte Länge λ_{B}:

[6] Nur auf dem Äquator ist eine Längenminute eine Seemeile

$$\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{A}} + \ell \qquad \text{mit} \qquad \ell = \frac{a}{\cos\varphi_{\mathrm{m}}}.$$

Die Abweitung a kann aus dem rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden durch

$$a = d_{\mathrm{lox}} \sin\alpha.$$

Die benötigte Mittlere Breite φ_{m} wird indirekt bestimmt durch Breite des Ausgangsorts zuzüglich des halben Breitenunterschieds b. Erneut muss darauf geachtet werden, dass manche Größen in Grad, andere hingegen in Minuten notiert werden. Somit ergibt sich die direkt verwendbare Gleichung:

$$\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{A}} + \frac{d_{\mathrm{lox}} \sin\alpha}{60 \cdot \cos\left(\varphi_{\mathrm{A}} + \frac{d_{\mathrm{lox}} \cos\alpha}{120}\right)}. \tag{2}$$

Rechenschema

Am Beispiel der ersten Aufgabe nach Mittelbreite soll die Vorgehensweise mit Taschenrechner und Rechenschema näher erläutert werden. Wir befinden uns am Westausgang der Magellanstraße und haben folgende Größen gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{A}} &= 52°\,47,5'\,\mathrm{S}, \\ \lambda_{\mathrm{A}} &= 075°\,09,8'\,\mathrm{W}, \\ \text{KüG} &= 320°, \\ \text{DüG} &= 120\,\mathrm{sm}. \end{aligned}$$

Die gegebenen Größen werden künftig vor der Berechnung in die Speicher des Taschenrechners eingegeben. Es empfiehlt sich grundsätzlich, fehleranfällige Tätigkeiten nacheinander und nicht gleichzeitig auszuführen. Zahlenwerte eingeben ist die eine, gesuchte Größen ausrechnen ist die andere fehleranfällige Tätigkeit.

Mathematisch bewanderte Leser werden gebeten, die folgenden Absätze zu überspringen und sich gleich dem Rechenschema auf Seite 9 zuzuwenden.

Die Ausgangsbreite φ_{A} ist 52° 47,5' S. Wir müssen berücksichtigen, dass südliche Breiten mit negativem Vorzeichen einzugeben sind, nördliche Breiten hingegen mit positivem, also ohne Vorzeichen. Mit Hilfe der Taste [° ' "] kann die nautische Notierung GMdez direkt eingegeben werden. Die folgende Tastenkombination lädt die Ausgangsbreite in den Speicher X:

[(-)] 52 [° ' "] 47,5 [° ' "] [SHIFT] [STO] [X] .

Die Ausgangslänge λ_A ist 075° 09,8' W. Auch hier muss ein negatives Vorzeichen berücksichtigt werden. Westliche Längen sind negativ, östliche Längen positiv[7]. Diese Größe kommt in den Speicher Y wie folgt:

$\boxed{\text{(-)}}$ 075 $\boxed{\circ\,'\,''}$ 09,8 $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{Y}}$.

Führende Nullen können eingegeben werden, sie können natürlich auch weggelassen werden.

Der gegebene Kurs über Grund wird vollkreisig ($0 \leq \alpha_\mathrm{voll} \leq 360$) in Grad eingegeben und ganz analog in Speicher A abgelegt.

320 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$,

ebenso die gegebene Distanz über Grund von 120 sm in Speicher D

120 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{D}}$.

Mit diesen vier Größen wird nun zunächst mit Gleichung 1 auf Seite 6 die gesuchte Breite des Zielorts φ_B berechnet. Im Rechenschema auf Seite 9 ist diese Gleichung einmal mit den mathematisch korrekten Formelzeichen und ein zweites mal mit den vereinbarten Speicheradressen aufgeführt. Letztere muss jetzt abgetippt werden.

Bei der Benutzung des vom Autor gewählten Taschenrechners ist folgendes zu beachten:

- Die Taste $\boxed{\frac{\blacksquare}{\square}}$ ermöglicht es, Brüche einzugeben. Um zwischen Zähler und Nenner navigieren zu können und um den Bruch zu verlassen, werden die Cursorbefehle $\boxed{\triangledown}$ und $\boxed{\triangleright}$ benötigt. Die große Taste unter dem Display wird hierfür verwendet.
- Wenn die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan oder die Logarithmusfunktion ln benutzt werden, ist zu beachten, dass der Taschenrechner mit Betätigung der Taste immer auch eine Klammer öffnet, die nach Eingabe des Arguments wieder geschlossen werden muss.
- Wenn ein Speicherplatz aufgerufen werden soll, muss dies mit der rot beschrifteten Taste $\boxed{\text{ALPHA}}$ angekündigt werden.

Es kann losgehen:

$\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\frac{\blacksquare}{\square}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{)}$

$\boxed{\triangledown}$ 60 $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{=}$.

Der Taschenrechner kennt die mathematische Gepflogenheit, Größen, die ohne Verknüpfungszeichen nebeneinander stehen, miteinander zu multiplizieren
(Beispiel: $d\cos\alpha = d \cdot \cos\alpha$).

[7]Eselsbrücke: W wie weniger (verbeamtete Professoren können das bestätigen). Andere erinnern sich an den Mobilfunkbetreiber e-plus, der allerdings inzwischen abgewickelt ist.

Der Taschenrechner liefert das Ergebnis $-51,25957\ldots$, was mit drei Nachkommastellen im Rechenschema notiert wird: $-51,260$. Diese Angabe in Gdez muss nun in die nautische Form GMdez gebracht werden. Das negative Vorzeichen signalisiert eine südliche Breite, wir markieren den Buchstaben S. Die vollen Grade – hier 51 – werden auch notiert und anschließend aus dem Rechenergebnis entfernt. Wir geben ein $\boxed{+}$ 51 $\boxed{=}$. Übrig bleiben nur die Nachkommastellen $-0,25957\ldots$, die wir mit 60 multiplizieren. $\boxed{\times}$ 60 $\boxed{=}$. Das angezeigte Ergebnis lautet $-15,574\ldots$ Das Minuszeichen ist schon berücksichtigt (S) und wir tragen, gerundet auf eine Nachkommastelle, 15,6 Minuten in das Rechenschema ein.

Mit prinzipiell gleicher Vorgehensweise wird λ_B berechnet, wenngleich die Gleichung 2 auf Seite 7 etwas umfangreicher ist.

Erste Aufgabe, Zielort berechnen		
Ausgangsbreite φ_A	$\rightarrow$ X	$\pm$ __ ° __ , _ '
Ausgangslänge λ_A	$\rightarrow$ Y	$\pm$ ___ ° __ , _ '
KüG α_{voll}	$\rightarrow$ A	___ , _ °
DüG d_{lox}	$\rightarrow$ D	___ , _ sm

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{d\,\cos\alpha}{60}$$

$$\varphi_B = \mathsf{X} + \frac{\mathsf{D}\,\cos\mathsf{A}}{60}$$

φ_B in Gdez	$\pm$ __ , ___ °
φ_B Zielbreite in G-Mdez	N S __ ° __ , _ '

$$\lambda_B = \lambda_A + \frac{d\,\sin\alpha}{60\cdot\cos\left(\varphi_A + \frac{d\,\cos\alpha}{120}\right)}$$

$$\lambda_B = \mathsf{Y} + \frac{\mathsf{D}\,\sin\mathsf{A}}{60\cdot\cos\left(\mathsf{X} + \frac{\mathsf{D}\,\cos\mathsf{A}}{120}\right)}$$

λ_B in Gdez	$\pm$ ___ , ___ °
λ_B Ziellänge in G-Mdez	E W ___ ° __ , _ '

Wir stellen fest, dass der Zielort der ersten Aufgabe nach Mittelbreite wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= 51°\,15,6'\,\mathrm{S}, \\ \lambda_B &= 077°\,15,2'\,\mathrm{W}. \end{aligned}$$

3.1.2 Zweite Aufgabe der Besteckrechnung

Gegeben sind bei der zweiten Aufgabe Ausgangsort mit φ_A und λ_A sowie Zielortort mit φ_B und λ_B. Gesucht sind KüG α und DüG d_lox.

Erneut wird das rechtwinklige Dreieck auf Seite 5 zu Hilfe genommen. Für den gesuchten Kurs α gilt

$$\alpha = \arctan \frac{a}{b},$$

mit

> a: Abweitung, $a = \ell \cos \varphi_\mathrm{m}$,
>
> ℓ: Längenunterschied, $\ell = \lambda_\mathrm{B} - \lambda_\mathrm{A}$,
>
> $\varphi_\mathbf{m}$: Mittelbreite, $\varphi_\mathrm{m} = \frac{\varphi_\mathrm{B}+\varphi_\mathrm{A}}{2}$,
>
> b: Breitenunterschied, $b = \varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A}$.

Für Nichtmathematiker sei kurz auf die Umkehrfunktion des Tangens, arctan, gesprochen „Arcus-Tangens“, eingegangen. Zu jeder Winkelfunktion sin, cos, tan gibt es eine Umkehrfunktion namens arcsin, arccos, arctan. Diese Umkehrfunktionen liefern als Ergebnis einen Winkel (eigentlich ein Bogenmaß, lat. arcus), den wir hier als KüG auch gerne hätten. Leider machen fast alle Hersteller von Taschenrechnern, so auch CASIO, den gleichen Fehler, sie nennen die Umkehrfunktion nicht arctan sondern „$\tan^{-1}$“. Das ist schlichtweg falsch. Die Umkehrfunktion des Tangens, arctan, ist durch die Tastenfolge $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{tan}}$ anzusprechen.[8]

Ein weiteres Problem kommt bei der Funktion arctan hinzu. Die Ergebnisse liegen ausschließlich im Wertebereich $-90° < \alpha_\mathrm{q} < 90°$. Wir werden dieses Ergebnis mit α_q bezeichnen, was für viertelkreisiger Kurs oder *quadrantaler Kurs* steht, da das Vorzeichen für uns ohne Belang ist. Das entspricht nicht der von Seeleuten geschätzten vollkreisigen Kursangabe im Wertebereich $0° \leq \alpha_\mathrm{voll} \leq 360°$. Hierzu später mehr.

Alle obigen Zusammenhänge, ineinander eingesetzt, ergeben die direkt nutzbare Gleichung für den viertelkreisgen Kurs α_q:

$$\alpha_\mathrm{q} = \arctan \left[\frac{(\lambda_\mathrm{B} - \lambda_\mathrm{A}) \cos\left(\frac{\varphi_\mathrm{B}+\varphi_\mathrm{A}}{2}\right)}{\varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A}} \right]. \tag{3}$$

Die noch zu berechnende loxodromische Distanz, d_lox ist aus dem rechtwinkligen Dreieck auf Seite 5 zu bestimmen:

[8] Da der Autor, wenn er nicht auf See ist, Studierenden an der Hochschule Stralsund die Technische Mechanik beibringt, weigert er sich, diesen Unfug mitzumachen. Es gilt: $\tan^{-1} x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$. Das ist nicht die Umkehrfunktion, das ist der Kehrwert!

$$d_{\text{lox}} = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Da der Breitenunterschied $b = \varphi_{\text{B}} - \varphi_{\text{A}}$ in Grad notiert wird, die Distanz jedoch in Seemeilen gesucht ist, lautet die nutzbare Gleichung

$$d_{\text{lox}} = 60\,\frac{\varphi_{\text{B}} - \varphi_{\text{A}}}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

Hierbei ist es unerheblich, ob für α der vollkreisige Kurs α_{voll} oder der viertelkreisige Kurs α_{q} eingesetzt wird. Auch ein negatives Vorzeichen bei α_{q} stört nicht. Sollte d_{lox} mit einem negativen Vorzeichen auftauchen, so ist es zu ignorieren. Distanzen sind immer positiv.

Rechenschema

Zweite Aufgabe, KüG, DüG berechnen		
Ausgangsbreite φ_{A}	→ X	± __°__,_'
Ausgangslänge λ_{A}	→ Y	± ___°__,_'
Zielbreite φ_{B}	→ E	± __°__,_'
Ziellänge λ_{B}	→ F	± ___°__,_'
$\alpha_{\text{q}} = \arctan\left[\frac{(\lambda_{\text{B}}-\lambda_{\text{A}})\,\cos\left(\frac{\varphi_{\text{B}}+\varphi_{\text{A}}}{2}\right)}{\varphi_{\text{B}}-\varphi_{\text{A}}}\right]$ $\alpha_{\text{q}} = \arctan\left[\frac{(\mathsf{F}-\mathsf{Y})\,\cos\left(\frac{\mathsf{E}+\mathsf{X}}{2}\right)}{\mathsf{E}-\mathsf{X}}\right]$		
α_{q}	→ A	± __,_°
N/S $\lvert\alpha_{\text{q}}\rvert$ E/W		N/S __,_° E/W
α_{voll} = KüG		___,_°
$d_{lox} = 60\,\frac{\varphi_{\text{B}}-\varphi_{\text{A}}}{\cos\alpha}$ $d_{lox} = 60\,\frac{\mathsf{E}-\mathsf{X}}{\cos \mathsf{A}}$		
d_{lox} = DüG		___,_ sm

Zunächst werden die vier gegebenen Größen eingegeben. Wie bisher steht der Ausgangsort in den Speichern X und Y. Die Breite des Zielorts φ_{B} wird in Speicher E geschrieben, die Länge λ_{B} in Speicher F.

Der viertelkreisige Kurs α_q wird nach Gleichung 8 auf Seite 16 berechnet und sofort mit der Tastenfolge $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ im Speicher A abgelegt. Er wird in der nächsten Berechnung noch benötigt. Dieses Ergebnis wird ins Rechenschema auf der vorherigen Seite zwei mal eingetragen. Einmal mit Vorzeichen, ein weiteres mal ohne. Es handelt sich dabei um $|\alpha_q|$, den Betrag von α_q, der immer positiv ist.

Dieser viertelkreisige Kurs soll nun in den vollkreisgen Kurs α_{voll} umgewandelt werden. Hierzu muss anhand der Koordinaten von Ausgangs- und Zielort herausgefunden werden, ob nach Norden oder Süden gefahren wird und nach Osten oder Westen. Die Buchstaben N oder S bzw. E oder W werden markiert. Vier Fälle sind möglich, die entsprechend der nachfolgenden Tabelle behandelt werden.

Beispiele zur Umrechnung des viertelkreisigen Kurses $\|\alpha_q\|$ in den vollkreisigen Kurs α_{voll}	
N $\|\alpha_q\|$ E:	$\alpha_{voll} = \|\alpha_q\|$
N $\|\alpha_q\|$ W:	$\alpha_{voll} = 360° - \|\alpha_q\|$
S $\|\alpha_q\|$ W:	$\alpha_{voll} = 180° + \|\alpha_q\|$
S $\|\alpha_q\|$ E:	$\alpha_{voll} = 180° - \|\alpha_q\|$

Abschließend muss mit Gleichung 4 auf der vorherigen Seite die Distanz über Grund d_{lox} berechnet werden, womit die zweite Aufgabe erledigt ist.

Singulärer Fall

Die Berechnung der zweiten Aufgabe misslingt, wenn der Breitenunterschied Null ist ($\varphi_B = \varphi_A$). In diesem Fall wird versucht, durch Null zu teilen, was nicht zulässig ist. Ohne Breitenunterschied wird ein reiner Ost- oder Westkurs befahren. Das Problem ist in diesem Fall durch Anschauung leicht zu lösen. Wem die Anschauung fehlt, rechne mit einem minimal verfälschten Zielort durch Hinzufügen einer Hundertstelminute. Je geringer der Breitenunterschied ist, desto wichtiger wird es, dass mathematisch korrekt vorgegangen wird. Numerische Zwischenergebnisse sind auf jeden Fall zu vermeiden. Die hier vorgestellte Methode mit Speichernutzung ist korrekt und vermeidet numerische Zwischenergebnisse.

3.2 Besteckrechnung nach vergrößerter Breite

Wenn der Breitenunterschied zu groß wird, ist das Verfahren nach Mittelbreite nur noch bedingt geeignet, da die Fehler auf Grund der Näherung zu groß werden. Der Schwachpunkt ist die Tatsache, dass die Seite a (Gegenkathete) des rechtwinkligen Kursdreiecks auf Seite 5 in zwei Maßstäben anzugeben ist. Einmal als Abweitung a, ein anderes mal als Längenunterschied ℓ. Bei der Umrechnung dieser beiden Größen wird ein Kompromiss eingegangen.

Das Verfahren nach vergrößerter Breite kennt keinen Unterschied zwischen Abweitung und Längenunterschied. Daher werden grundsätzlich präzise Ergebnisse geliefert. Auch bei diesem Rechenverfahren wird davon ausgegangen, dass Kursgleiche, also Loxodrome befahren werden.

3.2.1 Was ist die vergrößerte Breite?

Unser rechtwinkliges Kursdreieck soll diesmal auf einer besonderen Seekarte in Mercator-Projektion gezeichnet werden. Es handelt sich dabei um eine Weltkarte, bei der der Äquator auf halber Blatthöhe eingezeichnet ist. Jeden Punkt der Erde, mit Ausnahme der Pole, können wir auf der Karte einzeichnen; das sollte für unsere Zwecke ausreichen. Das besondere an dieser Karte ist die Tatsache, dass sie am Äquator den Maßstab 1:1 hat. Diese Karte – wenn es sie denn gäbe – wäre extrem unhandlich. Wir könnten damit die Erde wie ein Bonbon verpacken. Die „Schnerpsel“ befänden sich dabei an den Polen. In diese gigantische, jetzt wieder glattgestrichene Karte wollen wir Ausgangs- und Zielort eintragen. Es interessiert zunächst nur die Breite. Wie viele Seemeilen nördlich oder südlich des Äquators muss der jeweilige Ort auf der Karte eingezeichnet werden? Da auf unserer gigantischen Karte kein Randmaßstab vorhanden ist, müssen wir diesen Abstand selbst berechnen. Als Maßstab wählen wir entgegen der sonstigen Gepflogenheiten eine Längenminute auf dem Äquator als eine Seemeile, was dort zutreffend ist. Dieser Trick hebt den Unterschied zwischen Abweitung a und Längenunterschied ℓ auf, führt jedoch dazu, dass ein Ort auf der gigantischen Karte weiter entfernt vom Äquator erscheint, als in Wirklichkeit. Daher kommt der Begriff der *vergrößerten Breite*. Die Pole sind sogar unendlich weit vom Äquator entfernt, weshalb sie nicht darstellbar sind.

3.2.2 Mathematischer Hintergrund

Mathematisch nicht wirklich interessierte Leser können dieses Kapitel getrost übergehen. Ein Ort wird auf der Karte mit den Koordinaten x und y eingetragen. Es gilt: x beschreibt den östlichen (pos.) oder westlichen (neg.) Abstand vom Nullmeridian in Seemeilen, y beschreibt den nördlichen (pos.) oder südlichen (neg.) Abstand vom Äquator, ebenfalls in Seemeilen. Wir wissen, dass der Maßstab auf Mercator-Karten nicht konstant ist. Je weiter wir vom Äquator entfernt sind, desto kleiner wird der Maßstab. Trotzdem bleibt bei unserer Vorgehensweise eine Seemeile eine Längenminute am Äquator

Auf der Karte berechnet sich der Äquatorabstand y unseres Ausgangsorts mit der geographischen Breiten φ_{A} zu

$$y = r \int_0^{\varphi_{\mathrm{A}}} \frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{5}$$

wobei der Erdradius r aus dem Erdumfang U leicht berechenbar ist.

$$r = \frac{U}{2\,\pi}.$$

Der Umfang der Erde, dargestellt in Seemeilen, also Längenminuten am Äquator, beträgt $360° \cdot 60\,\mathrm{sm}/° = 21\,600\,\mathrm{sm}$. Daraus ergibt sich der Radius zu $r = \frac{10\,800}{\pi}\,\mathrm{sm}$ oder $3437{,}75\,\mathrm{sm}$.

Die Lösung des Integrals in Gleichung 5 auf der vorherigen Seite lautet

$$y = \frac{10\,800}{\pi}\,\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_\mathrm{A}}{2}\right)\right]. \tag{6}$$

Hierbei erscheint die mathematisch korrekte Angabe von Winkeln im Bogenmaß (Beispiel $\frac{\pi}{4}$), was bei nautischen Berechnungen unüblich ist, weshalb in die gewohnten Grade umgerechnet wird.

Bei flüchtiger Betrachtung könnte der Eindruck entstehen, dass südliche, also negative Breiten φ_A nicht zu korrekten, negativen Äquatorabständen y führen. Die Sorge ist unbegründet, da der natürliche Logarithmus ln bei Argumenten kleiner eins negativ wird. Es gilt

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45° = 1 \quad \text{und} \quad \ln 1 = 0,$$

daher ist alles in bester Ordnung.

Abschließend bekommt der Äquatorabstand y auf unserer gedachten, gigantischen Karte die nautisch sinnvolle Bezeichnung *vergrößerte Breite* mit dem Formelzeichen Φ.

3.2.3 Berechnung der vergrößerten Breite

Nach einem kurzen mathematischen Ausflug ist festzustellen, dass sich die vergrößerten Breiten des Ausgangsorts Φ_A und des Zielorts Φ_B wie folgt berechnen:

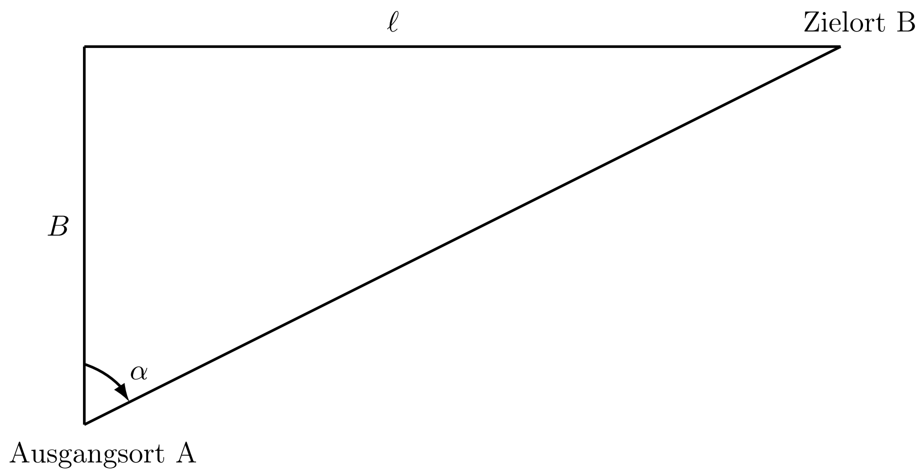
$$\Phi_\mathrm{A} = \frac{10\,800}{\pi}\,\ln\left[\tan\left(45° + \frac{\varphi_\mathrm{A}}{2}\right)\right], \qquad \Phi_\mathrm{B} = \frac{10\,800}{\pi}\,\ln\left[\tan\left(45° + \frac{\varphi_\mathrm{B}}{2}\right)\right]. \tag{7}$$

Bei den vergrößerten Breiten handelt es sich um Strecken, angegeben in Seemeilen[9].

[9] Es gibt Experten, die behaupten, bei den vergrößerten Breiten handele es sich um Winkel, angegeben in Winkelminuten. Diese Experten liegen falsch, ihnen wird empfohlen zu überlegen, ob der Erdradius r eine Strecke oder ein Winkel ist. Die Größe r ist als Vorfaktor einheitenbestimmend für die vergrößerten Breiten, da der nachfolgende Logarithmus keine Einheit aufweisen kann. Nur durch die geschickt gewählte Äquivalenz, dass eine Längenminute am Äquator (Winkel) einer Seemeile (Strecke) entspricht, können anschließend Winkel und Strecken miteinander verrechnet werden, sofern der Winkel in Winkelminuten eingesetzt wird, siehe Gleichung 8 auf Seite 16.

Das rechtwinklige Kursdreieck hat nun leicht veränderte Bezeichnungen. Die Ankathete wird mit B bezeichnet. Es handelt sich um die Differenz der vergrößerten Breiten von Zielort B und Ausgangsort A. Die Gegenkathete wird mit ℓ bezeichnet. Hierbei handelt es sich um die schon bekannte Längendifferenz. Es gilt:

$$B = \Phi_{\mathrm{B}} - \Phi_{\mathrm{A}}, \qquad \ell = \lambda_{\mathrm{B}} - \lambda_{\mathrm{A}}.$$



Der Winkel α ist unverändert der Kurs über Grund. Die loxodromische Distanz ist jedoch aus diesem Dreieck nicht bestimmbar, weshalb die Hypotenuse ohne Bezeichnung bleibt.

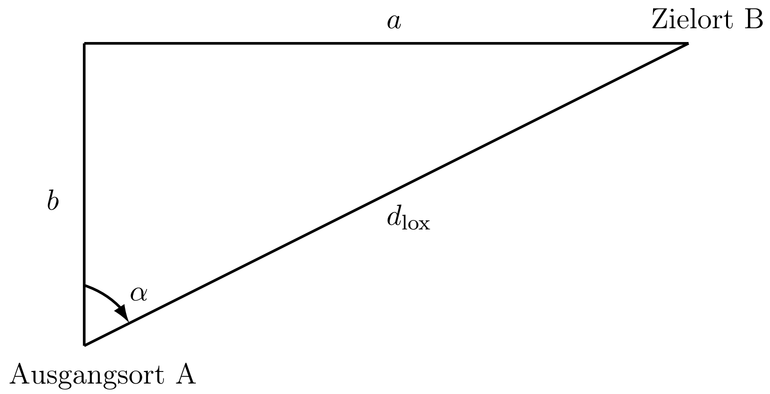
3.2.4 Zweite Aufgabe der Besteckrechnung nach vergrößerter Breite

Wenn nach vergrößerter Breite gerechnet werden muss, geht es üblicherweise um die zweite Aufgabe. Die Orte sind gegeben, Kurs und Distanz sind gesucht. Anhand des vergrößerten Kursdreiecks auf dieser Seite gilt für den viertelkreisigen Kurs α_{q}:

$$\alpha_{\mathrm{q}} = \arctan \frac{\ell}{B}.$$

Anhand des ursprünglichen Kursdreiecks gilt für die loxodromische Distanz

$$d_{\mathrm{lox}} = \frac{b}{\cos \alpha} \qquad \text{mit} \qquad b = \varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{A}}.$$



Die direkt verwendbaren Gleichungen lauten

$$\alpha_{\mathrm{q}} = \arctan\left(60\,\frac{\lambda_{\mathrm{B}} - \lambda_{\mathrm{A}}}{\Phi_{\mathrm{B}} - \Phi_{\mathrm{A}}}\right) \tag{8}$$

und

$$d_{\mathrm{lox}} = 60\,\frac{\varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{A}}}{\cos\alpha}. \tag{9}$$

Rechenschema

Zweite Aufgabe, KüG, DüG berechnen		
Ausgangsbreite φ_A	$\rightarrow$ X	$\pm$ _ _ ° _ _ , _ '
Ausgangslänge λ_A	$\rightarrow$ Y	$\pm$ _ _ _ ° _ _ , _ '
Zielbreite φ_B	$\rightarrow$ E	$\pm$ _ _ ° _ _ , _ '
Ziellänge λ_B	$\rightarrow$ F	$\pm$ _ _ _ ° _ _ , _ '
$\Phi(\varphi) = \frac{10800}{\pi} \ln \left[\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$		
Speicher M löschen: 0 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{M}}$		
$\Phi_B = 3437,75 \ln \left[\tan\left(45^\circ + \frac{\mathsf{E}}{2}\right)\right]$ $\boxed{\text{M+}}$ $\Phi_A = 3437,75 \ln \left[\tan\left(45^\circ + \frac{\mathsf{X}}{2}\right)\right]$ $\boxed{\text{M}-}$		
$\alpha_q = \arctan\left(60 \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\Phi_B - \Phi_A}\right)$ $\alpha_q = \arctan\left(60 \frac{\mathsf{F}-\mathsf{Y}}{\mathsf{M}}\right)$		
α_q	$\rightarrow$ A	$\pm$ _ _ , _ °
N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W		N/S _ _ , _ ° E/W
α_{voll} = KüG		_ _ _ , _ °
$d_{lox} = 60 \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos\alpha}$ $d_{lox} = 60 \frac{\mathsf{E}-\mathsf{X}}{\cos \mathsf{A}}$		
d_{lox} = DüG		_ _ _ , _ sm

Die Koordinaten des Ausgangs- und des Zielorts werden in die selben Speicher X, Y, E, F geschrieben, wie es bei der Berechnung nach Mittelbreite vorgesehen ist. Die vergrößerte Breitendifferenz B wird mit Hilfe des Speichers M ermittelt, der vorher gelöscht, also auf Null gesetzt werden muss. Wir berechnen zunächst Φ_B und addieren diese Größe zum Speicher M mit Hilfe der Taste $\boxed{\text{M+}}$. Anschließend berechnen wir Φ_A und subtrahieren diesen Wert vom Speicherinhalt M mit der Tastenfolge $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{M}-}$. Nun steht die Differenz der vergrößerten Breite B im Speicher M. Das weitere Vorgehen sollte schon bekannt sein.

Singulärer Fall

Wie schon bei der Berechnung nach Mittelbreite, bereiten nahezu Ost- oder Westkurse Schwierigkeiten, weil durch sehr kleine Werte dividiert werden muss. Erneut ist eine mathematisch korrekte Vorgehensweise wichtig. Numerische Zwischenergebnisse sind unbedingt zu vermeiden bzw. wenn unvermeidlich, durch Speichernutzung zu „entschärfen“ (Beispiel: Speicher M). An dieser Stelle kann nur vor dem Formblatt des Lenkungsausschuss nach SportSeeSchiffV gewarnt werden, welches als Hilfsmittel bei der Prüfung zugelassen ist. Insgesamt 14 numerische Zwischenergebnisse sollen erzeugt und anschließend wieder in den Taschenrechner eingegeben werden. Entsprechend hilflos sind die Hinweise darauf, dass mit genügend Nachkommastellen gearbeitet werden soll. Eine Lösung des Problems kann an dieser Stelle nicht angeboten werden. Der Lenkungsausschuss sollte weitere Formblätter – z.B. das hier vorgestellte – zulassen oder selbst eines zur Verfügung stellen, das eine mathematisch korrekte Vorgehensweise nicht verhindert. Vorstöße des Autors in dieser Sache waren bisher erfolglos.

3.3 Genauigkeit des Verfahrens nach Mittelbreite, Sinn der vergrößerten Breite

Es wurde schon angedeutet, dass die Genauigkeitshinweise in [DISW] nicht korrekt sind. Interessierten seien deshalb hier nähere Informationen gegeben.

Wenn nach Mittelbreite gerechnet wird, machen sich Fehler bei der loxodromischen Distanz bemerkbar. Die Ergebnisse sind etwas zu groß. Wie groß der Fehler ist, hängt davon ab, welcher Kurs sich aus der Problemstellung ergibt. Wenn sich Kurse von 045° ergeben, entsprechend 135°, 225°, 315°, werden die Fehler maximal. Bei sich ergebenden Kursen von 000°, 090°, 180°, 270° gehen die Fehler auf Null zurück. Zusätzlich gilt: Mit zunehmender Breite nehmen die Fehler zu. Das bedeutet, dass sie in Äquatornähe – entgegen anderslautenden Behauptungen – ein Minimum haben.

Beispielrechnungen mit Ausgangs- und Zielorten, die so gewählt werden, dass der ungünstige Kurs von 045° und eine loxodromische Distanz von 500 sm berechnet werden, zeigen dies. Wir stellen gegenüber die Breite des Ausgangsorts φ_{A} und die Strecke um die die loxodromische Distanz nach Mittelbreite zu groß berechnet wird, also den Fehler. Der erste Eintrag beschreibt den günstigsten Fall, bei dem der Äquator auf halber Strecke gequert wird.

Breite φ_A	Fehler
02°56,8’ S	0,1 sm
30°00,0’ N	0,2 sm
40°00,0’ N	0,3 sm
50°00,0’ N	0,5 sm
60°00,0’ N	1,0 sm
70°00,0’ N	2,5 sm
80°00,0’ N	15,0 sm

Die Fehler bei zurückgelegten Strecken von 500 sm sind durchaus überschaubar.

Es stellt sich heraus, dass das Verfahren nach vergrößerter Breite überbewertet wird, insbesondere, wenn wir uns daran erinnern, dass die händische Besteckrechnung dann zum Einsatz kommt, wenn die GPS-Empfänger versagen. Zweifelsohne ist es präzise. In Lehrbüchern vorgestellt wird dieses Verfahren nur als zweite Aufgabe, also bei zwei gegebenen Orten. Kaum ein Seefahrer braucht ein hochpräzises Notverfahren für dieses Problem, welches typischerweise bei der Reiseplanung anfällt. Wenn bei der Reiseplanung kein funktionsfähiger Navigationsrechner vorhanden ist, so besorge man sich einen. Ein einfacher GPS-Empfänger, der Wegepunkte beherrscht, genügt.

Der Gedanke liegt nahe, dass ein präzises Verfahren für die erste Aufgabe wünschenswert sein könnte. Ohne funktionierenden GPS-Empfang kann es schon passieren, dass nach mehreren Tagen Fahrt ein Zielort präzise gesucht wird. Das Verfahren nach vergrößerter Breite so umzustricken, dass die erste Aufgabe genau lösbar ist, verursacht ein wenig Aufwand, ist aber gut möglich. Gelehrt wird es nicht, weshalb es hier nur kurz angedeutet wird.

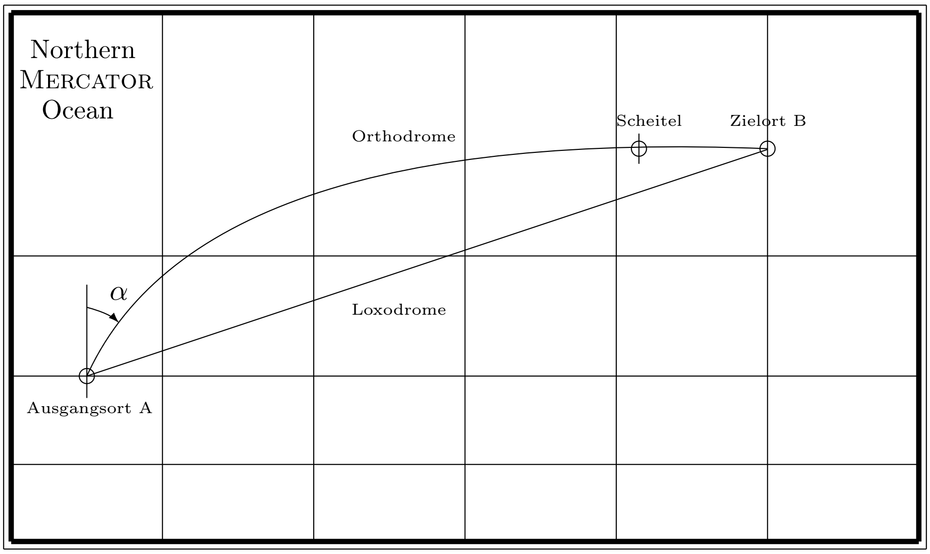
Mit Hilfe von Gleichung 1 auf Seite 6 ist die Breite des Zielorts φ_B präzise bestimmbar. Mit Hilfe von Gleichung 7 auf Seite 14 kann daraus die vergrößerte Breite Φ_B berechnet werden. Schlussendlich muss Gleichung 8 auf Seite 16 nach λ_B aufgelöst werden und die Koordinaten des Zielorts sind bekannt.

Dieser Zielort, nennen wir ihn lieber Koppelort, kommt bei der astronomischen Ortsbestimmung zum Einsatz. Wir mögen zwar hochpräzise rechnen, genauso hochpräzise tagelang Kurs und Geschwindigkeit beibehalten und das bei unsicherem Versatz durch Wind und Strom, das können wir nicht. Die Astronavigation verzeiht unscharfe Koppelorte ohnehin überaus gnädig, so dass auch hier kein Bedarf für ein hochpräzises Rechenverfahren besteht. Die Notwendigkeit der Besteckrechnung nach vergrößerter Breite als Notverfahren darf also getrost hinterfragt werden. Mathematisch interessant ist sie aber allemal und bereitet in erster Linie Ausbildern und Autoren große Freude.

4 Großkreisrechnung

Von A nach B mit konstantem Kurs zu fahren ist zwar der einfachste aber keineswegs der kürzeste bzw. schnellste Weg. Der auf diese Weise zurückgelegte Weg ist zwar auf einer Mercator-Karte eine gerade Linie, in Wirklichkeit ist ein solcher Weg – Loxodrome genannt – eine Spiralbahn auf der Kugeloberfläche der Erde, die in einem der Pole mündet. Bei großen Längenunterschieden zwischen A und B und insbesondere wenn der Weg in höheren Breiten zurückgelegt werden muss, ist es überlegenswert, ob einem Großkreis gefolgt werden soll, um Zeit und/oder Treibstoff einzusparen. Großkreise sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten auf der Erdoberfläche. Die dabei abgefahrenen Kurslinien werden Orthodrome genannt.

Großkreisen gemein ist die Tatsache, dass ihr Kreismittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt übereinstimmen. Bekannt ist, dass jeder Meridian und auch der Äquator ein Großkreis ist. Tatsache ist auch, dass durch zwei beliebige Punkte auf der Oberfläche der Erde ein Großkreis definiert ist. Einen Teilabschnitt davon gilt es abzufahren, wenn die kürzeste bzw. schnellste Route zwischen den Punkten gewählt werden soll.



Orthodrome sind mit wenigen Ausnahmen polwärts gekrümmte Linien auf Mercator-Karten, mit denen wir üblicherweise unseren Kurs festlegen. Nun sieht es so aus, als würde bei einer Großkreis-Reise ständig der Kurs ein wenig verändert, um der Krümmung zu folgen. Das ist wenig sinnvoll, da die Kursänderungen minimal sind. Üblich ist es, bei einer Großkreisreise einmal täglich an Hand der ermittelten Position zu berechnen, unter welchem Kurs die Orthodrome zum Ziel beginnt, um diesen Kurs dann 24 h lang beizubehalten. Wir werden diesen Kurs als Anfangskurs α kennenlernen. Natürlich interessiert uns auch die Ersparnis, dazu müssen wir in der Lage sein, die orthodromische Distanz d_{orth}, die Großkreisentfernung zu berechnen, um sie mit der loxodromischen d_{lox} zu vergleichen.

4.1 Orthodromische Distanz und Anfangskurs

Nach den bisherigen Bezeichnungen der Besteckrechnung handelt es sich hierbei um die *zweite Aufgabe auf Großkreisen*. Ausgangsort und Zielort sind gegeben, die Orthodromische Distanz d_{orth} und der Kurs zu Reisebeginn, der Anfangskurs α sind gesucht.

Auf eine Herleitung der mathematischen Zusammenhänge, wie sie bei der Besteckrechnung noch angedeutet ist, wird hier wegen des sonst notwendigen Umfangs verzichtet. Es handelt sich dabei um die gleiche sphärische Trigonometrie, wie sie in der astronomischen Navigation verwendet wird. Astro-bewanderte Leser werden die Ähnlichkeit der Gleichungen erkennen.

Für die orthodromische Distanz d_{orth} gilt:

$$d_{\text{orth}} = 60 \arccos\left(\sin\varphi_{\text{A}}\ \sin\varphi_{\text{B}} + \cos\varphi_{\text{A}}\ \cos\varphi_{\text{B}}\ \cos\ell\right). \tag{10}$$

Für den Anfangskurs gilt:

$$\alpha_{\text{q}} = \arctan\left(\frac{\sin\ell}{\tan\varphi_{\text{B}}\ \cos\varphi_{\text{A}} - \sin\varphi_{\text{A}}\ \cos\ell}\right) \qquad \text{mit} \qquad \ell = \lambda_{\text{B}} - \lambda_{\text{A}}. \tag{11}$$

Wie üblich bei Kursen, erhalten wir zunächst den viertelkreisigen Wert α_{q}, der in den vollkreisigen α_{voll} verwandelt werden muss.

Rechenschema

Großkreisdistanz		
Ausgangsbreite φ_A	$\rightarrow \mathsf{X}$	$\pm$ _ _ ° _ _ ,_ '
Ausgangslänge λ_A	$\rightarrow \mathsf{Y}$	$\pm$ _ _ _ ° _ _ ,_ '
Zielbreite φ_B	$\rightarrow \mathsf{E}$	$\pm$ _ _ ° _ _ ,_ '
Ziellänge λ_B	$\rightarrow \mathsf{F}$	$\pm$ _ _ _ ° _ _ ,_ '
$d_{\text{orth}} = 60 \arccos[\sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos\ell]$ $d_{\text{orth}} = 60 \arccos[\sin\mathsf{X} \sin\mathsf{E} + \cos\mathsf{X} \cos\mathsf{E} \cos(\mathsf{F} - \mathsf{Y})]$		
d_{orth} = Großkreisdistanz		_ _ _ ,_ sm
Anfangskurs		
$\alpha_q = \arctan\left[\frac{\sin\ell}{\tan\varphi_B \cos\varphi_A - \sin\varphi_A \cos\ell}\right]$ $\alpha_q = \arctan\left[\frac{\sin(\mathsf{F}-\mathsf{Y})}{\tan\mathsf{E} \cos\mathsf{X} - \sin\mathsf{X} \cos(\mathsf{F}-\mathsf{Y})}\right]$		
N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W		N/S _ _ ,_ ° E/W
α_{voll} = Anfangskurs	$\rightarrow \mathsf{A}$	_ _ _ ,_ °

Die Speicherbelegung ist identisch mit der bisher verwendeten. So kann sehr einfach ohne Änderung der Speicherbelegung zum Vergleich die loxodromische Distanz d_{lox} berechnet werden.

Es empfiehlt sich, den errechneten Anfangskurs in Speicher A abzulegen, da möglicherweise in weiteren Fragestellungen darauf zurückgegriffen werden muss.

Der Lenkungsausschuss hat auch für die Großkreisrechnung ein Formblatt erstellt, es ist das einzige, das bei der Prüfung verwendet werden darf. Auch dieses Formblatt sollte gemieden werden, denn es verhindert eine mathematisch korrekte Vorgehensweise und provoziert unnötig Fehler. Insgesamt 15 numerische Zwischengrößen sollen berechnet, notiert und wieder eingegeben werden. Erneut kann nur der Lenkungsausschuss das Problem lösen.

4.2 Scheitelpunkt eines Großkreises

Jeder Großkreis, mit Ausnahme des Äquators, hat einen Punkt der dem Nord- bzw. Südpol am nächsten ist. Dieser Punkt wird Scheitelpunkt genannt. Je nach Lage des Ausgangsorts und des Zielorts kann es sein, dass der Scheitelpunkt bei der Großkreisreise passiert wird. Es ist allerdings auch möglich, dass der Scheitelpunkt jenseits des Zielortes liegt oder bei Fahrtbeginn am Ausgangsort schon hinter einem liegt.

Der Scheitelpunkt, wenn er denn passiert wird, liefert wichtige Informationen darüber, bis zu welcher geographischen Breite wir auf unserer Großkreisreise geraten. Möglicherweise sollen bestimmte planetarische Windsysteme nicht verlassen oder nicht befahren werden, weshalb in solchen Fällen mit Kenntnis der Lage des Scheitelpunkts die Entscheidung getroffen werden kann, ggf. von einer Großkreisreise abzusehen.

Auch für andere Fragestellungen ist die Lage des Scheitelpunkts von Interesse und sei es nur als Hilfsgröße für weitere Berechnungen. Es ist dabei unerheblich, ob der Scheitelpunkt passiert wird oder nicht.

Die Lage des Scheitelpunkts wird durch seine Breite φ_S und seine Länge λ_S festgelegt. Aus der Position des Ausgangsorts und dem Anfangskurs α ist sie berechenbar.

Es gilt für die Breite des Scheitelpunkts φ_S:

$$|\varphi_\mathrm{S}| = |\arccos\left(\sin\alpha\,\cos\varphi_\mathrm{A}\right)|. \tag{12}$$

Wegen der Betragsstriche werden auftauchende negative Vorzeichen ignoriert. Ob es sich um eine nördliche oder südliche Scheitelbreite handelt, können wir daran festmachen ob unser Ausgangsort eine nördliche oder südliche Breite hat. Sie sind gleichnamig.

Für die Länge des Scheitelpunkts λ_S gilt:

$$\lambda_\mathrm{S} = \lambda_\mathrm{A} + \arctan\left(\frac{1}{\sin\varphi_\mathrm{A}\,\tan\alpha}\right). \tag{13}$$

Rechenschema

Scheitelpunkt des Großkreises		
Ausgangsbreite φ_A	$\rightarrow$ X	± __°__,_'
Ausgangslänge λ_A	$\rightarrow$ Y	± ___°__,_'
Anfangskurs α_voll	$\rightarrow$ A	___,_°
$\lvert\varphi_\mathrm{S}\rvert = \lvert \arccos(\sin\alpha\ \cos\varphi_\mathrm{A}) \rvert$ $\lvert\varphi_\mathrm{S}\rvert = \lvert \arccos(\sin\mathsf{A}\ \cos\mathsf{X}) \rvert$		
$\lvert\varphi_\mathrm{S}\rvert$ Scheitelbr. in Gdez		__,___°
φ_S in G-Mdez, $\substack{\mathrm{N}\\\mathrm{S}}$ wie φ_A		__°__,_' $\substack{\mathrm{N}\\\mathrm{S}}$
$\lambda_\mathrm{S} = \lambda_\mathrm{A} + \arctan\left(\frac{1}{\sin\varphi_\mathrm{A}\ \tan\alpha}\right)$ $\lambda_\mathrm{S} = \mathsf{Y} + \arctan\left[(\sin\mathsf{X}\ \tan\mathsf{A})^{-1}\right]$		
λ_S Scheitellänge in Gdez		± ___,___°
λ_S in G-Mdez		___°__,_' $\substack{\mathrm{E}\\\mathrm{W}}$

4.3 Meridianschnittpunkt bei bekanntem Scheitel

Bei der Planung einer Großkreisreise auf einem Übersegler in Mercator-Projektion besteht eine gewisse Unsicherheit über den tatsächlichen Verlauf. Der genaue Weg kann nicht oder nur mit erheblichem Aufwand eingezeichnet werden. Es stellt sich natürlich die Frage, ob die Großkreisreise einen gefährlich nahe an ein natürliches Hindernis wie Riff, Insel oder Kap führen wird.

Bei bekanntem Scheitelpunkt des Großkreises ist es möglich, auszurechnen, in welcher Breite φ_M der Großkreis einen gegebenen Meridian λ_M schneidet.

$$\varphi_\mathrm{M} = \arctan\left[\tan\varphi_\mathrm{S}\ \cos(\lambda_\mathrm{M} - \lambda_\mathrm{S})\right]. \tag{14}$$

Bei der Frage, ob wir einem Hindernis gefährlich nahe kommen, entnehmen wir die Position des Hindernisses nach Länge und Breite der Karte. Zur Längenposition des Hindernis – sie sei λ_M genannt – bestimmen wir die Breite φ_M unter der der Großkreis die Länge, (den Meridian) λ_M schneidet. Im Vergleich mit der Breitenposition der Insel wird klar, ob wir die Insel nördlich bzw. südlich passieren oder an ihr scheitern.

Fleißige Navigatoren können mit dieser Methode den genauen Verlauf des Großkreises in eine Mercator-Karte einzeichnen, indem zu regelmäßig festgelegten Längen (Meridianen) λ_M der Meridianschnittpunkt φ_M des Großkreises berechnet wird.

Rechenschema

Meridianschnittpunkt bei bekannt. Scheitel: In welcher Breite φ_M schneidet der GK den gegebenen Meridian λ_M		
Scheitelbreite φ_S	$\rightarrow$ X	$\pm$ __°__,_'
Scheitellänge λ_S	$\rightarrow$ Y	$\pm$ ___°__,_'
Meridianlänge λ_M	$\rightarrow$ F	$\pm$ ___°__,_'

$$\varphi_M = \arctan\left[\tan\varphi_S\,\cos(\lambda_M - \lambda_S)\right]$$

$$\varphi_M = \arctan\left[\tan \mathsf{X}\,\cos(\mathsf{F} - \mathsf{Y})\right]$$

φ_M Breite des Schnitts $\pm$	__°__,_' N/S

Zu beachten ist bei dieser Berechnung, dass die Position des Scheitels φ_S, λ_S in die Speicher X und Y geschrieben wird. Diese Speicherorte sind bisher dem Ausgangsort vorbehalten.

4.4 Mischsegeln

Großkreisreisen führen in manchen Fällen in so hohe Breiten, dass unerwünschte Wetterbedingungen oder gar Eisgang zu befürchten sind. Aus langfristigen Wetterprognosen kann abgeleitet werden bis zu welcher maximalen nördlichen bzw. südlichen Breite φ_M sicher navigiert werden kann. Durch Bestimmung des Scheitelpunkts kann festgestellt werden, ob der Großkreis teilweise jenseits der maximal zulässigen Breite verläuft. Zwei Fragen sind zu klären:

- Liegt die Scheitelbreite φ_S jenseits der maximal zulässigen Breite φ_M?
- Liegt die Scheitellänge λ_S zwischen Ausgangslänge λ_A und Ziellänge λ_B?

Wenn beide Fragen mit ja beantwortet werden, ist die Königsdisziplin der Großkreisnavigation, das Mischsegeln, anzuwenden. Der ursprüngliche Großkreis wird verworfen. Stattdessen wird ein neuer gesucht, der durch den Ausgangsort führt und dessen Scheitel auf der maximal zulässigen Breite φ_M liegt. Dort angekommen wird mit reinem Ost- bzw. Westkurs eine Loxodrome auf der maximalen Breite φ_M abgesegelt, bis in einen weiteren

Großkreis eingebogen wird. Diesen weiteren Großkreis bestimmen wir, indem wir vom Zielort den Anfang einer virtuelle Rückreise planen.

Zunächst interessiert den Navigator das verbleibende Einsparpotential an Zeit oder Treibstoff. Hierzu muss die zurückzulegende Gesamtdistanz der drei Teilabschnitte berechnet werden.

$$d = d_1 + d_2 + d_3$$

mit

d Gesamtdistanz,,

d_1 orthodromische Distanz auf dem ersten Großkreis,

d_2 loxodromische Distanz auf dem Ost- bzw. Westkurs,

d_3 orthodromische Distanz auf dem weiteren Großkreis.

Benötigt werden die Positionen von Ausgangs- und Zielort, φ_A, λ_A und φ_B, λ_B sowie die maximal zulässige Breite φ_M

Es gilt für d_1:

$$d_1 = 60 \cdot \arccos\left(\frac{\sin\varphi_\mathrm{A}}{\sin\varphi_\mathrm{M}}\right). \tag{15}$$

Es gilt für d_3:

$$d_3 = 60 \cdot \arccos\left(\frac{\sin\varphi_\mathrm{B}}{\sin\varphi_\mathrm{M}}\right). \tag{16}$$

Die Berechnung der loxodromischen Distanz auf dem Breitenparallel φ_M ist etwas sperrig, da Anfangs- und Endpunkt dieser Teilreise noch gar nicht bekannt sind.

Es gilt für d_2:

$$d_2 = 60 \cdot \cos\varphi_\mathrm{M} \left[\lambda_\mathrm{B} - \lambda_\mathrm{A} - \arccos\left(\frac{\tan\varphi_\mathrm{A}}{\tan\varphi_\mathrm{M}}\right) - \arccos\left(\frac{\tan\varphi_\mathrm{B}}{\tan\varphi_\mathrm{M}}\right)\right]. \tag{17}$$

Wenn das Endergebnis für die Gesamtdistanz d zufriedenstellend ausfällt, kann die Reise so erfolgen. Zwei einfache Gleichungen liefern uns den Anfangskurs α, mit dem wir losfahren und den Endkurs β, unter dem wir in den Zielort einlaufen.

$$|\alpha_\mathrm{q}| = |\arcsin\frac{\varphi_\mathrm{M}}{\varphi_\mathrm{A}}|, \qquad |\beta_\mathrm{q}| = |\arcsin\frac{\varphi_\mathrm{M}}{\varphi_\mathrm{B}}|. \tag{18}$$

Mit diesen Kursen, die wie üblich zunächst als quadrantale Kurse anfallen, können die beiden Übergangspunkte von Orthodrome 1 zur Loxodrome 2 bzw. von Loxodrome 2 zu Orthodrome 3 bestimmt werden.

Wir wissen, dass die Übergangspunkte Scheitelpunkte des jeweiligen Großkreises sind. Aus Ausgangsort φ_{A}, λ_{A} und Anfangskurs α_{voll} kann der erste Übergangspunkt = Scheitelpunkt berechnet werden.

Den zweiten Übergangspunkt berechnen wir so, als wären wir auf der virtuellen Rückreise. φ_{B} und λ_{B} werden als virtueller Ausgangsort behandelt. Aus dem vollkreisigen Endkurs β_{voll} bestimmen wir den virtuellen vollkreisigen Rückreise-Anfangskurs β_{vollR} durch Addition oder Subtraktion von 180° und berechnen erneut einen Scheitelpunkt, der den zweiten Übergangspunkt darstellt.

Rechenschema

Mischsegeln, GKe nur bis zu einer maximalen Breite φ_M		
Ausgangsbreite φ_A	$\rightarrow$ X	$\pm$ __°__,_'
Ausgangslänge λ_A	$\rightarrow$ Y	$\pm$ ___°__,_'
Zielbreite φ_B	$\rightarrow$ E	$\pm$ __°__,_'
Ziellänge λ_B	$\rightarrow$ F	$\pm$ __°__,_'
max. Breite φ_M	$\rightarrow$ C	$\pm$ ___°__,_'

$$d_1 = 60 \text{ arccos} \left(\frac{\sin \mathsf{X}}{\sin \mathsf{C}}\right)$$

$$d_3 = 60 \text{ arccos} \left(\frac{\sin \mathsf{E}}{\sin \mathsf{C}}\right)$$

$$d_2 = 60 \cos \mathsf{C} \left[\mathsf{F} - \mathsf{Y} - \text{arccos}\left(\frac{\tan \mathsf{X}}{\tan \mathsf{C}}\right) - \text{arccos}\left(\frac{\tan \mathsf{E}}{\tan \mathsf{C}}\right)\right]$$

d_1 Orthodrome 1	___,_ sm
d_3 Orthodrome 3	+ ___,_ sm
d_2 Loxodrome 2	+ ___,_ sm
d Gesamtdistanz	= ___,_ sm

$\lvert\alpha_q\rvert = \lvert \arcsin \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{X}} \rvert$, $\quad \lvert\beta_q\rvert = \lvert \arcsin \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{E}} \rvert$	
N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W	N/S __,_ ° E/W
α_{voll} = Anfangskurs	___,_°
N/S $\lvert\beta_q\rvert$ E/W	N/S __,_ ° E/W
β_{voll} = Endkurs	___,_°
β_{vollR} = Rückreise	___,_°

5 Übersegeln der Datumsgrenze

Wer das zulässige Fahrtgebiet des Sporthochseeschifferscheins gänzlich ausnutzen möchte wird früher oder später auch die Datumsgrenze bei $\lambda = 180°\,\mathrm{E}$ bzw. $\lambda = 180°\,\mathrm{W}$ überqueren.

Eine Reise von $\lambda_\mathrm{A} = 179°\,\mathrm{E}$ nach $\lambda_\mathrm{B} = 179°\,\mathrm{W}$, ist nicht sonderlich lang, wenn wir einen geringen Breitenunterschied annehmen. Besteckrechnung oder auch Großkreisrechnungen führen jedoch zu absurd großen Distanzen, da sie bei der vorgenommenen Vorzeichenvereinbarungen (W wie weniger) unweigerlich den langen Weg über den Nullmeridian von Greenwich berechnen. Aus einem Wochenendtörn wir so schnell eine Weltumsegelung. Immer dann, wenn eine errechnete Distanz größer als 10 800 sm ist, sollten wir hellhörig werden, denn das ist der halbe Erdumfang. Es gibt in solchen Fällen einen kürzeren Weg.

Wie verhindern wir solch absurde Rechenergebnisse? Ganz einfach: In unserem Fall behalten wir die Länge des Ausgangsort mit $\lambda_\mathrm{A} = 179°\,\mathrm{E}$ bei. Die Länge des Zielortes wandeln wir so um, dass wir in diesem Fall, in dem wir auf östlicher Länge starten, in östlicher Richtung weiter zählen. Aus $\lambda_\mathrm{B} = 179°\,\mathrm{W}$ wird so $\lambda_\mathrm{B} = 181°\,\mathrm{E}$. Nautiker stört eine solche Angabe ungemein, unserem Taschenrechner ist das aber egal, wir kommen so rechtzeitig ans Ziel.

Literatur

[Berking, Huth] Bernhard Berking, Werner Huth (Hrsg.): *Handbuch Nautik*. 2. Aufl. Hamburg: Seehafen, 2016.

[Bowditch] Nathanial Bowditch: *The American Practical Navigator*. Bethesda, Maryland: National Imagery and Mapping Agency, 2002.

[DISW] Damm, Irminger, Schultz, Wand: *Sporthochseeschifferschein*. Bielefeld: Delius Klasing, 1. Aufl. 2006.

[DISW-Ü] Damm, Irminger, Schultz, Wand: *Übungen und Aufgaben Sporthochseeschifferschein*. Bielefeld: Delius Klasing, 5. Aufl. 2013.

[Begleitheft] N. N.: *Begleitheft SSS + SHS*. Bielefeld: Delius Klasing, Ausgabe 2015.

[Fulst] Otto Steppes, Gerhard Zwiebeler, Walter Stern: *FULST Nautische Tafeln*. Bremen: Arthur Geist, 23. Aufl. 1963.

[Homburg] W. Homburg: *Leitfaden der Nautik Teil II*. Leipzig: Fachbuchverlag, 1955.

[Mestemacher] Frank Mestemacher: *Astronomische Navigation ... nicht nur zum Ankommen*. Hamburg: Kreuzer Yachtclub Deutschland e.V. (Hrsg.), 2. erw. Ausgabe 2013.

[Müller-Krauss] Joseph Krauß, Martin Berger: *Handbuch für die Schiffsführung, Erster Band*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 6. Aufl. 1961.

[Norie's] George Blance (Editor): *Norie's Nautical Tables*. St Ives, Cambridgeshire: Imray, Laurie, Norie & Wilson, 2007.

[Übungsaufgaben] N. N.: *Übungsaufgaben für die schriftliche Prüfung zum Sportsee- und Sporthochseeschifferschein*. DSV-Verlag (Hrsg.), Bielefeld: Delius Klasing, 4. Aufl. 2017.

[Wand] Christoph Wand: *Navigation*. Kapitel I in [DISW]

Anhang

Alle vorgestellten Rechenschemata werden auf zwei Seiten zusammengefasst. Die hier im Anhang dargestellten Formblätter können unter `www.venghaus.eu` abgerufen, in beliebiger Anzahl vervielfältigt und weitergegeben werden, sofern sie unverändert sind. Die Benutzung geschieht auf eigene Gefahr, da eine Fehlerfreiheit nicht garantiert werden kann. Eine gewerbliche Nutzung bedarf der Genehmigung.

Besteckrechnung

Mittelbreite

Erste Aufgabe, Zielort berechnen

Ausgangsbreite φ_A	→ X	± __°__,_'
Ausgangslänge λ_A	→ Y	± ___°__,_'
KüG α_{voll}	→ A	___,_°
DüG d_{lox}	→ D	___,_sm

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{d\ \cos\alpha}{60}$$

$$\varphi_B = \mathsf{X} + \frac{\mathsf{D}\ \cos \mathsf{A}}{60}$$

φ_B in Gdez	± __,___°
φ_B Zielbreite in G-Mdez	N/S __°__,_'

$$\lambda_B = \lambda_A + \frac{d\ \sin\alpha}{60\ \cos\left(\varphi_A + \frac{d\ \cos\alpha}{120}\right)}$$

$$\lambda_B = \mathsf{Y} + \frac{\mathsf{D}\ \sin \mathsf{A}}{60\ \cos\left(\mathsf{X} + \frac{\mathsf{D}\ \cos \mathsf{A}}{120}\right)}$$

λ_B in Gdez	± ___,___°
λ_B Ziellänge in G-Mdez	E/W ___°__,_'

Zweite Aufgabe, KüG, DüG berechnen

Ausgangsbreite φ_A	→ X	± __°__,_'
Ausgangslänge λ_A	→ Y	± ___°__,_'
Zielbreite φ_B	→ E	± __°__,_'
Ziellänge λ_B	→ F	± ___°__,_'

$$\alpha_q = \arctan\left[\frac{(\lambda_B - \lambda_A)\ \cos\left(\frac{\varphi_B + \varphi_A}{2}\right)}{\varphi_B - \varphi_A}\right]$$

$$\alpha_q = \arctan\left[\frac{(\mathsf{F} - \mathsf{Y})\ \cos\left(\frac{\mathsf{E}+\mathsf{X}}{2}\right)}{\mathsf{E} - \mathsf{X}}\right]$$

α_q	→ A	± __,_°
N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W		N/S __,_° E/W
α_{voll} = KüG		___,_°

$$d_{lox} = 60\ \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos\alpha}$$

$$d_{lox} = 60\ \frac{\mathsf{E} - \mathsf{X}}{\cos \mathsf{A}}$$

d_{lox} = DüG	___,_sm

vergrößerte Breite

Zweite Aufgabe, KüG, DüG berechnen

Ausgangsbreite φ_A	→ X	± __°__,_'
Ausgangslänge λ_A	→ Y	± ___°__,_'
Zielbreite φ_B	→ E	± __°__,_'
Ziellänge λ_B	→ F	± ___°__,_'

$$\Phi(\varphi) = \frac{10800}{\pi}\ \ln\left[\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Speicher M löschen: 0 [SHIFT] [STO] [M]

$$\Phi_B = 3437,75\ \ln\left[\tan\left(45° + \frac{\mathsf{E}}{2}\right)\right]$$ [M+]

$$\Phi_A = 3437,75\ \ln\left[\tan\left(45° + \frac{\mathsf{X}}{2}\right)\right]$$ [M−]

$$\alpha_q = \arctan\left(60\ \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\Phi_B - \Phi_A}\right)$$

$$\alpha_q = \arctan\left(60\ \frac{\mathsf{F} - \mathsf{Y}}{\mathsf{M}}\right)$$

α_q	→ A	± __,_°
N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W		N/S __,_° E/W
α_{voll} = KüG		___,_°

$$d_{lox} = 60\ \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos\alpha}$$

$$d_{lox} = 60\ \frac{\mathsf{E} - \mathsf{X}}{\cos \mathsf{A}}$$

d_{lox} = DüG	___,_sm

Beispiele zur Umrechnung des viertelkreisigen Kurses $\lvert\alpha_q\rvert$ in den vollkreisigen Kurs α_{voll}

N $\lvert\alpha_q\rvert$ E:	$\alpha_{voll} = \lvert\alpha_q\rvert$
N $\lvert\alpha_q\rvert$ W:	$\alpha_{voll} = 360° - \lvert\alpha_q\rvert$
S $\lvert\alpha_q\rvert$ W:	$\alpha_{voll} = 180° + \lvert\alpha_q\rvert$
S $\lvert\alpha_q\rvert$ E:	$\alpha_{voll} = 180° - \lvert\alpha_q\rvert$

www.venghaus.eu

Großkreisrechnungen

Großkreisdistanz

Ausgangsbreite φ_A	$\to$ X	$\pm$	__°__,_'
Ausgangslänge λ_A	$\to$ Y	$\pm$	___°__,_'
Zielbreite φ_B	$\to$ E	$\pm$	__°__,_'
Ziellänge λ_B	$\to$ F	$\pm$	___°__,_'

$$d_{\text{orth}} = 60 \text{ arccos} [\sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos\ell]$$

$$d_{\text{orth}} = 60 \text{ arccos} [\sin \mathsf{X} \sin \mathsf{E} + \cos \mathsf{X} \cos \mathsf{E} \cos(\mathsf{F} - \mathsf{Y})]$$

d_{orth} = Großkreisdistanz	___,_sm

Anfangskurs

$$\alpha_q = \arctan\left[\frac{\sin\ell}{\tan\varphi_B \cos\varphi_A - \sin\varphi_A \cos\ell}\right]$$

$$\alpha_q = \arctan\left[\frac{\sin(\mathsf{F}-\mathsf{Y})}{\tan\mathsf{E} \cos\mathsf{X} - \sin\mathsf{X} \cos(\mathsf{F}-\mathsf{Y})}\right]$$

N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W		N/S __,_° E/W
α_{voll} = Anfangskurs	$\to$ A	___,_°

Scheitelpunkt des Großkreises

Ausgangsbreite φ_A	$\to$ X	$\pm$	__°__,_'
Ausgangslänge λ_A	$\to$ Y	$\pm$	___°__,_'
Anfangskurs α_{voll}	$\to$ A		___,_°

$$|\varphi_S| = |\arccos(\sin\alpha \cos\varphi_A)|$$

$$|\varphi_S| = |\arccos(\sin\mathsf{A} \cos\mathsf{X})|$$

$\lvert\varphi_S\rvert$ Scheitelbr. in Gdez	__,___°
φ_S in G-Mdez, N/S wie φ_A	__°__,_' N/S

$$\lambda_S = \lambda_A + \arctan\left(\frac{1}{\sin\varphi_A \tan\alpha}\right)$$

$$\lambda_S = \mathsf{Y} + \arctan\left[(\sin\mathsf{X} \tan\mathsf{A})^{-1}\right]$$

λ_S Scheitellänge in Gdez	$\pm$ ___,___°
λ_S in G-Mdez	___°__,_' E/W

Beispiele zur Umrechnung des viertelkreisigen Kurses $|\alpha_q|$ in den vollkreisigen Kurs α_{voll}

N $\lvert\alpha_q\rvert$ E:	$\alpha_{\text{voll}} = \lvert\alpha_q\rvert$
N $\lvert\alpha_q\rvert$ W:	$\alpha_{\text{voll}} = 360° - \lvert\alpha_q\rvert$
S $\lvert\alpha_q\rvert$ W:	$\alpha_{\text{voll}} = 180° + \lvert\alpha_q\rvert$
S $\lvert\alpha_q\rvert$ E:	$\alpha_{\text{voll}} = 180° - \lvert\alpha_q\rvert$

Meridianschnittpunkt bei bekannt. Scheitel: In welcher Breite φ_M schneidet der GK den gegebenen Meridian λ_M

Scheitelbreite φ_S	$\to$ X	$\pm$	__°__,_'
Scheitellänge λ_S	$\to$ Y	$\pm$	___°__,_'
Meridianlänge λ_M	$\to$ F	$\pm$	___°__,_'

$$\varphi_M = \arctan[\tan\varphi_S \cos(\lambda_M - \lambda_S)]$$

$$\varphi_M = \arctan[\tan\mathsf{X} \cos(\mathsf{F} - \mathsf{Y})]$$

φ_M Breite des Schnitts $\pm$	__°__,_' N/S

Mischsegeln, GKe nur bis zu einer maximalen Breite φ_M

Ausgangsbreite φ_A	$\to$ X	$\pm$	__°__,_'
Ausgangslänge λ_A	$\to$ Y	$\pm$	___°__,_'
Zielbreite φ_B	$\to$ E	$\pm$	__°__,_'
Ziellänge λ_B	$\to$ F	$\pm$	__°__,_'
max. Breite φ_M	$\to$ C	$\pm$	___°__,_'

$$d_1 = 60 \text{ arccos}\left(\frac{\sin\mathsf{X}}{\sin\mathsf{C}}\right)$$

$$d_3 = 60 \text{ arccos}\left(\frac{\sin\mathsf{E}}{\sin\mathsf{C}}\right)$$

$$d_2 = 60 \cos\mathsf{C} \left[\mathsf{F} - \mathsf{Y} - \arccos\left(\frac{\tan\mathsf{X}}{\tan\mathsf{C}}\right) - \arccos\left(\frac{\tan\mathsf{E}}{\tan\mathsf{C}}\right)\right]$$

d_1 Orthodrome 1	___,_sm
d_3 Orthodrome 3	+ ___,_sm
d_2 Loxodrome 2	+ ___,_sm
d Gesamtdistanz	= ___,_sm

$$|\alpha_q| = \left|\arcsin\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{X}}\right|, \qquad |\beta_q| = \left|\arcsin\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{E}}\right|$$

N/S $\lvert\alpha_q\rvert$ E/W	N/S __,_° E/W
α_{voll} = Anfangskurs	___,_°
N/S $\lvert\beta_q\rvert$ E/W	N/S __,_° E/W
β_{voll} = Endkurs	___,_°
β_{vollR} = Rückreise	___,_°

www.venghaus.eu