

Anwendung von AGETON's Tables in der Astronomische Navigation

Joachim Venghaus*

www.venghaus.eu

28. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	AGETON's Tables	4
3	Knapper Überblick über sphärische Trigonometrie	6
4	Nautisch-astronomisches Grunddreieck	8
4.1	AGETONs sphärische Dreiecke	9
4.2	AGETONs Gleichungen	11
5	Berechnung von h_r und α_{Az} nach AGETON	14
5.1	Gleichung 10	15
5.2	Gleichung 11	15
5.3	Gleichung 12	16
5.4	Gleichung 13	17
5.5	Höhendifferenz Δh	17
5.6	Gleichung 14	17
5.7	Azimut α_{Az}	18
6	Grenzen des Verfahrens	20

*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund, ansprechbar unter [segeln\(at\)venghaus.eu](mailto:segeln(at)venghaus.eu)

1 Einleitung

Die Astronomische Navigation ist seit der Verfügbarkeit des Global Positioning System (GPS) zu einem Notverfahren geworden, für den Fall, dass die Elektronik an Bord unbrauchbar geworden ist. Auch sind Szenarien denkbar, in denen die Betreiber des GPS die Verfügbarkeit unterbinden, wozu sie jederzeit in der Lage sind. Mit der Betriebsaufnahme von GLONASS und demnächst GALILEO dürfte – geeignete Empfangsgeräte vorausgesetzt – die Nichtverfügbarkeit von Satellitensignalen immer unwahrscheinlicher werden.

Sollte trotzdem, aus welchem Grund auch immer, auf hoher See die elektronische Standortbestimmung versagen, werden Sextant, Nautisches Jahrbuch und Taschenrechner zum Einsatz gebracht und die alte Kunst des Konstruierens von Standlinien aus Gestirnsbeobachtung praktiziert. Erneut sind wir dabei auf ein elektronisches Gerät angewiesen – den Taschenrechner. Gehen wir davon aus, dass auch er durch das Schadensereignis unbrauchbar geworden ist, sonderlich wasserresistent sind solche Geräte bekanntlich nicht.

Eine Vielzahl von Verfahren sind in der astronomischen Navigation bekannt, die ohne elektronische Rechner auskommen.

1. Logarithmentafeln nach [FULST] oder [NORIE's],
2. Sight Reduction Tables for Air Navigation Pub. No. 249 (früher HO 249)
3. A. P. 3270 (weitgehend identisch mit HO 249)
4. NAO Sight Reduction Tables
5. Record Tables nach LIEUWEN

Die Anwendung der Logarithmentafeln wird häufig als sperrig, umständlich und zudem fehleranfällig angesehen. Insbesondere das zweidimensionale Interpolieren in den ABC-Tafeln wird von manchem Anwender gefürchtet.

Die anderen erwähnten Methoden beruhen darauf, dass für eine Vielzahl von Eingangsgrößen mit „runden“ Werten die Rechenergebnisse vorliegen und aus telefonbuchdicken Büchern herausgesucht werden können. Da der Koppelort ohnehin nur eine Vermutung darstellt, kann er ohne Weiteres so verlagert werden, dass die Eingangsgrößen Breite des Koppelorts φ_k und Ortsstundenwinkel t ganzgradige Werte annehmen. Statt des Koppelorts O_k kommt ein Rechenort zum Einsatz, der etliche Seemeilen vom Koppelort entfernt liegen kann. Zunächst ist das nicht von großem Nachteil. Jedoch geht bei allen rechenortbasierenden Verfahren ein wertvolles Indiz verloren. Die Größe der Höhendifferenz Δh ist ein Merkmal für die Güte von Koppelort und Sextantmessung. Große Werte für Δh sind immer ein Alarmsignal bei koppelortbasierenden Verfahren. Bei Rechenortverfahren sind große Werte Δh hingegen an der Tagesordnung.

2 AGETON's Tables

ARTHUR AINSLIE AGETON (25. Oktober 1900 – 23. April 1971) entwickelte eine überraschend einfache Methode, Höhenstandlinien aus Gestirnsbeobachtungen zu berechnen, wobei lediglich addiert und subtrahiert werden muss, was bekanntlich sehr gut „zu Fuß“ gemacht werden kann. Das Konstrukt eines Rechenorts ist nicht notwendig, es wird vom Koppelort ausgegangen. Zudem kommen AGETON's Tables mit einem Umfang von lediglich 90 Seiten überraschend schlank daher.

AGETON's Tables, zeitweise auch H.O. 211 genannt, sind nur noch antiquarisch zu erhalten; jedoch hat ERIK DE MAN sich dieses Themas angenommen, AGETON's Tables in C programmiert und auf seiner Internetpräsentation <http://www.siranah.de> verfügbar gemacht. Ebenso stellt HENNING UMLAND auf seiner Internetpräsentation <http://www.celnav.de> die Tafel bereit.

Die hier vorliegenden AGETON's Tables [VENAGT] wurden vom Autor dieser Schrift in L^AT_EX neu berechnet und gesetzt. Sie sind, ebenso wie diese Schrift und ein Rechenchema auf www.venghaus.eu abrufbar. Obwohl mit großer Sorgfalt programmiert, kann keine Garantie auf Fehlerfreiheit gegeben werden. Die Benutzung dieser Tafel erfolgt auf eigene Gefahr.

Die Tatsache, dass dieses Verfahren vom Koppelort ausgeht und mit einer sehr überschaubaren Tafel auskommt, prädestiniert es als Mittel der Wahl, wenn alle Elektronik versagt¹.

Letztendlich sind nur die Sinus- und Cosinuswerte der Winkel von 0° bis 180° vertafelt. Da jedoch bei jeder Anwendung die Funktionswerte zweier Winkel miteinander multipliziert (dividiert) werden müssen, sind die Funktionswerte von Sinus und Cosinus logarithmiert. Aus der Multiplikation (Division) zweier trigonometrischer Funktionen wird so eine Addition (Subtraktion) zweier Logarithmen. Um gut handhabbare Tafelwerte zu erhalten, werden die Kehrwerte der trigonometrischen Funktionen benutzt. Ausreichend große Vorfaktoren sorgen dafür, dass Nachkommastellen ohne Belang werden.

$$A(x) = 10^5 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{|\sin x|} \right], \quad B(x) = 10^5 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{|\cos x|} \right].$$

Die Tafel für die Winkel 29° und 150° sei auf der nächsten Seite beispielhaft dargestellt.

¹Es bleibt die Achillesferse, dass die Zeit sekundengenau bereitstehen muss. Ein mechanischer Chronometer ist ebenfalls wenig wasserresistent und könnte in der zu Grunde liegenden Notsituation zu Schaden gekommen sein. Die oft empfohlene digitale Quarz-Armbanduhr ist wiederum ein elektronisches Gerät. Gehen wir davon aus, dass eine Uhr überlebt, da ein vorausschauender Skipper die gesamte Crew mit einem Sammelsurium von verschiedenen und verschieden alten Quarzuhren ausgestattet hat.

29°													
↓	0'		10'		20'		30'		40'		50'		
	A(x)	B(x)											
00,0	31443	5818	31216	5888	30990	5959	30766	6030	30544	6102	30323	6174	10,0
00,2	31438	5819	31211	5890	30986	5961	30762	6032	30539	6103	30318	6176	09,8
00,4	31434	5821	31207	5891	30981	5962	30757	6033	30535	6105	30314	6177	09,6
00,6	31429	5822	31202	5893	30977	5963	30753	6035	30530	6106	30309	6179	09,4
00,8	31425	5824	31198	5894	30972	5965	30748	6036	30526	6108	30305	6180	09,2
01,0	31420	5825	31193	5895	30968	5966	30744	6037	30521	6109	30301	6181	09,0
01,2	31416	5826	31189	5897	30963	5968	30739	6039	30517	6111	30296	6183	08,8
01,4	31411	5828	31184	5898	30959	5969	30735	6040	30513	6112	30292	6184	08,6
01,6	31406	5829	31180	5900	30954	5970	30730	6042	30508	6114	30287	6186	08,4
01,8	31402	5831	31175	5901	30950	5972	30726	6043	30504	6115	30283	6187	08,2
02,0	31397	5832	31171	5902	30945	5973	30721	6045	30499	6116	30279	6189	08,0
02,2	31393	5833	31166	5904	30941	5975	30717	6046	30495	6118	30274	6190	07,8
02,4	31388	5835	31161	5905	30936	5976	30713	6047	30490	6119	30270	6192	07,6
02,6	31384	5836	31157	5907	30932	5978	30708	6049	30486	6121	30265	6193	07,4
02,8	31379	5838	31152	5908	30927	5979	30704	6050	30482	6122	30261	6195	07,2
03,0	31375	5839	31148	5910	30923	5980	30699	6052	30477	6124	30257	6196	07,0
03,2	31370	5841	31143	5911	30918	5982	30695	6053	30473	6125	30252	6197	06,8
03,4	31365	5842	31139	5912	30914	5983	30690	6055	30468	6127	30248	6199	06,6
03,6	31361	5843	31134	5914	30909	5985	30686	6056	30464	6128	30243	6200	06,4
03,8	31356	5845	31130	5915	30905	5986	30681	6058	30459	6129	30239	6202	06,2
04,0	31352	5846	31125	5917	30900	5988	30677	6059	30455	6131	30235	6203	06,0
04,2	31347	5848	31121	5918	30896	5989	30672	6060	30451	6132	30230	6205	05,8
04,4	31343	5849	31116	5919	30891	5990	30668	6062	30446	6134	30226	6206	05,6
04,6	31338	5850	31112	5921	30887	5992	30664	6063	30442	6135	30221	6208	05,4
04,8	31334	5852	31107	5922	30882	5993	30659	6065	30437	6137	30217	6209	05,2
05,0	31329	5853	31103	5924	30878	5995	30655	6066	30433	6138	30213	6211	05,0
05,2	31325	5855	31098	5925	30873	5996	30650	6068	30428	6140	30208	6212	04,8
05,4	31320	5856	31094	5926	30869	5997	30646	6069	30424	6141	30204	6213	04,6
05,6	31315	5857	31089	5928	30865	5999	30641	6070	30420	6142	30199	6215	04,4
05,8	31311	5859	31085	5929	30860	6000	30637	6072	30415	6144	30195	6216	04,2
06,0	31306	5860	31080	5931	30856	6002	30632	6073	30411	6145	30191	6218	04,0
06,2	31302	5862	31076	5932	30851	6003	30628	6075	30406	6147	30186	6219	03,8
06,4	31297	5863	31071	5934	30847	6005	30624	6076	30402	6148	30182	6221	03,6
06,6	31293	5864	31067	5935	30842	6006	30619	6078	30398	6150	30177	6222	03,4
06,8	31288	5866	31062	5936	30838	6007	30615	6079	30393	6151	30173	6224	03,2
07,0	31284	5867	31058	5938	30833	6009	30610	6080	30389	6153	30169	6225	03,0
07,2	31279	5869	31053	5939	30829	6010	30606	6082	30384	6154	30164	6227	02,8
07,4	31275	5870	31049	5941	30824	6012	30601	6083	30380	6155	30160	6228	02,6
07,6	31270	5871	31044	5942	30820	6013	30597	6085	30375	6157	30156	6229	02,4
07,8	31266	5873	31040	5943	30815	6015	30592	6086	30371	6158	30151	6231	02,2
08,0	31261	5874	31035	5945	30811	6016	30588	6088	30367	6160	30147	6232	02,0
08,2	31257	5876	31031	5946	30806	6017	30584	6089	30362	6161	30142	6234	01,8
08,4	31252	5877	31026	5948	30802	6019	30579	6091	30358	6163	30138	6235	01,6
08,6	31247	5878	31022	5949	30797	6020	30575	6092	30353	6164	30134	6237	01,4
08,8	31243	5880	31017	5951	30793	6022	30570	6093	30349	6166	30129	6238	01,2
09,0	31238	5881	31013	5952	30788	6023	30566	6095	30345	6167	30125	6240	01,0
09,2	31234	5883	31008	5953	30784	6025	30561	6096	30340	6168	30121	6241	00,8
09,4	31229	5884	31004	5955	30780	6026	30557	6098	30336	6170	30116	6243	00,6
09,6	31225	5886	30999	5956	30775	6027	30552	6099	30331	6171	30112	6244	00,4
09,8	31220	5887	30995	5958	30771	6029	30548	6101	30327	6173	30107	6245	00,2
10,0	31216	5888	30990	5959	30766	6030	30544	6102	30323	6174	30103	6247	00,0
	A(x)	B(x)	↑										
	50'		40'		30'		20'		10'		0'		
150°													

Winkel finden mit gradzahligen Zehntelminuten Eingang in die Tafel, ungradzahlige Zehntelminuten müssen interpoliert werden. Hierzu folgendes Beispiel:

$$x = 29^\circ 34,8'; \quad A(x) = 30\,659; \quad B(x) = 6\,065.$$

Für eine verbesserte Genauigkeit könnten AGETON's Tables auch mit dem Vorfaktor 10^6 berechnet werden.

$$A(x) = 10^6 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{|\sin x|} \right], \quad B(x) = 10^6 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{|\cos x|} \right].$$

Der Genauigkeitsgewinn ist jedoch unerheblich und muss mit Erschwernissen beim Interpolieren erkauft werden. Das gleiche Beispiel würde in einer solchen Tafel folgendes liefern:

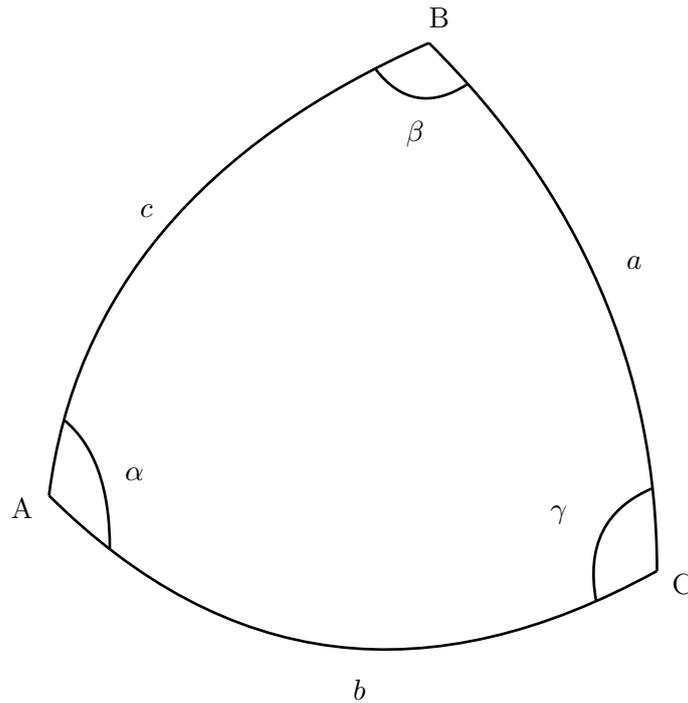
$$x = 29^\circ 34,8'; \quad A(x) = 306\,591; \quad B(x) = 60\,647.$$

3 Knapper Überblick über sphärische Trigonometrie

Die Berechnungen der Astronomischen Navigation beruhen auf der Mathematik der sphärischen Trigonometrie. Auf der Oberfläche der Erdkugel liegt ein Dreieck mit den Eckpunkten Nordpol, Koppelort und Bildpunkt des Gestirns. Ein ebensolches Dreieck, allerdings mit den allgemeinverständlicheren Eckpunkten A, B, C, sei zunächst auf einer beliebigen Kugel betrachtet. An den Eckpunkten sind die Winkel α , β und γ angeordnet. Die Dreiecksseiten werden mit a , b und c bezeichnet, sie liegen den ähnlich lautenden Ecken gegenüber. In der ebenen Trigonometrie sind die Dreiecksseiten naturgemäß Strecken. Das wäre in der sphärischen Trigonometrie, dort als Bogenlänge, auch möglich, jedoch ausgesprochen unpraktisch. Die Dreiecksseiten a , b und c werden stattdessen als sog. Zentriwinkel beschrieben.

Am Beispiel der Dreiecksseite c sei dies erläutert. Der Kugelmittelpunkt (das Zentrum) bildet zusammen mit den Punkten A und B, die auf der Kugeloberfläche liegen, den Zentriwinkel c .

Durch die Beschreibung der Dreiecksseiten als Zentriwinkel werden die Seiten vom Radius der Kugel unabhängig. Für die Anwendung in der Astronomischen Navigation ist das ein großer Vorteil, da wir Dreiecke behandeln, deren Eckpunkte teils auf der Erdoberfläche angeordnet sind (Bildpunkt, Koppelort, Nordpol), teils an der Himmelskugel (Gestirn, Zenit, Himmelsnordpol). Wir können gedanklich frei zwischen diesen beiden Kugeln wandeln, ohne dass sich Größen unseres sphärischen Dreiecks ändern.



In einem sphärischen Dreieck gelten zwei fundamentale mathematische Zusammenhänge. Sie heißen *Sinussatz der sphärischen Trigonometrie*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (1)$$

und *Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (2)$$

Durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen kann der Cosinussatz für jede der drei Dreiecksseiten angeschrieben werden. Auf eine Herleitung dieser Zusammenhänge wird hier verzichtet. Interessierten sei das exzellente Buch MESTEMACHER, *Astronomische Navigation ... nicht nur zum Ankommen* empfohlen.

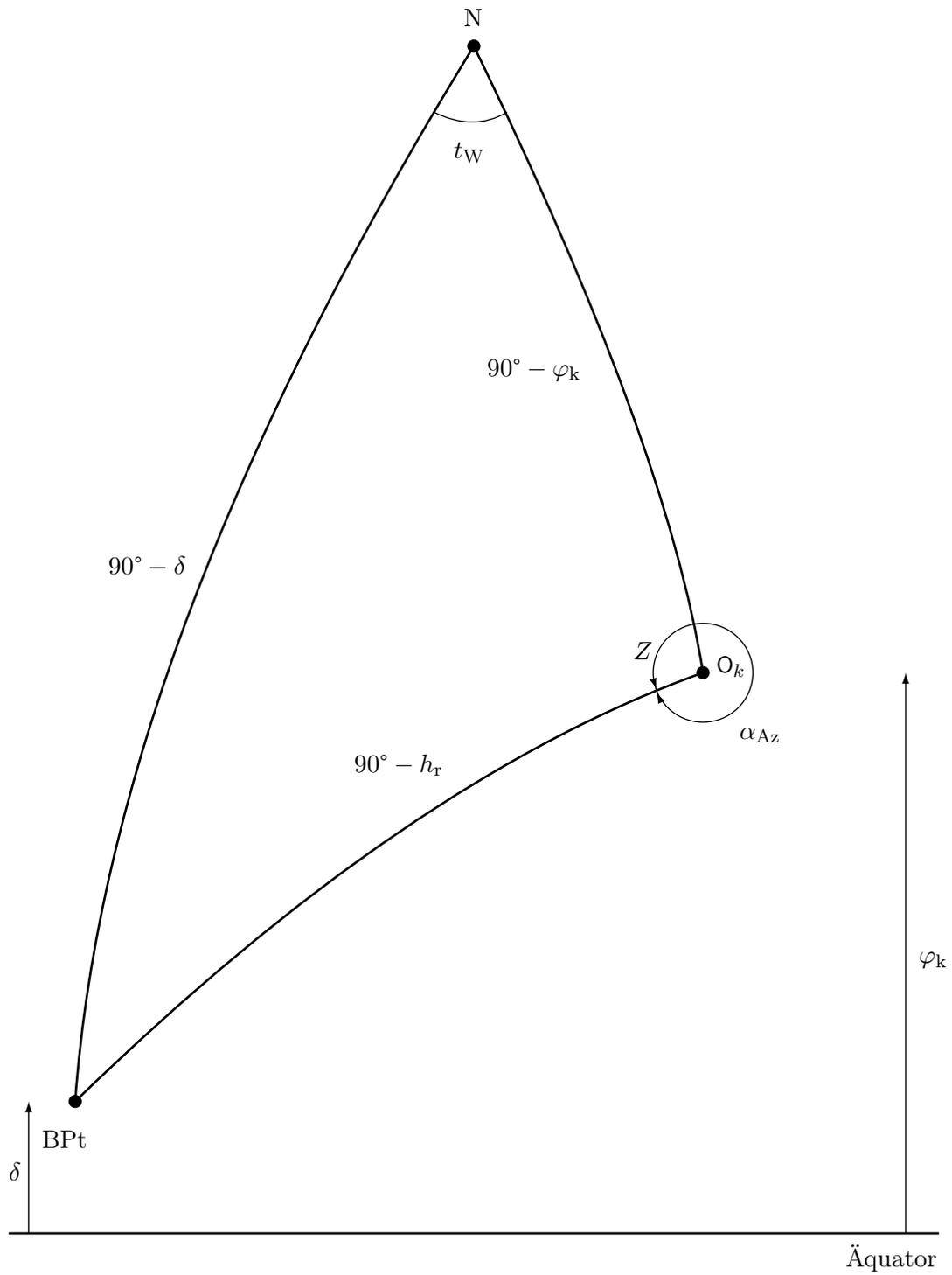
Für das Verständnis von AGETONS Gleichungen sind noch folgende elementare Zusammenhänge vonnöten:

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x, \quad (3)$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x, \quad (4)$$

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x. \quad (5)$$

4 Nautisch-astronomisches Grunddreieck



Abgebildet ist hier ein Fall, der Nord- und Ostseeseglern an einem Sommernachmittag geläufig sein dürfte. Die Sonne als beobachtetes Gestirn hat eine nördliche Deklination (Frühling, Sommer), sie steht westlich vom Beobachter (Nachmittag), der Koppelort liegt deutlich nördlicher als der Bildpunkt der Sonne (z. B. in der Nord- oder Ostsee).

Das nautisch-astronomische Grunddreieck besteht aus den Eckpunkten Nordpol N, Koppelort O_k und Bildpunkt des Gestirns BPt. Bekannt in diesem Dreieck sind zwei Seiten und ein Winkel $(90^\circ - \delta)$, $(90^\circ - \varphi_k)$ und t_W , da wir Deklination, Koppelbreite und Ortsstundenwinkel kennen.

Gesucht sind die Seite $(90^\circ - h_r)$ und der Winkel Z , um daraus die rechnerische Höhe h_r und den Azimut α_{Az} zu bestimmen.

Bekannt ist, dass die gesuchten Größen mit folgenden Gleichungen berechnet werden können

$$h_r = \arcsin [\sin \varphi_k \sin \delta + \cos \varphi_k \cos \delta \cos t], \quad (6)$$

$$Z = \arccos \left[\frac{\sin \delta - \sin h_r \sin \varphi_k}{\cos h_r \cos \varphi_k} \right]. \quad (7)$$

Die Berechnung von h_r und Z dürfte so ohne Taschenrechner kaum möglich sein. AGETON hatte keinen und wir wollen ohne auskommen.

4.1 Agetons sphärische Dreiecke

Sinussatz und Cosinussatz, die Gleichungen 1 und 2 auf Seite 7, werden sehr viel einfacher, wenn ein Winkel 90° einnimmt.

$$\text{Für } \gamma = 90^\circ \text{ gilt } \sin \gamma = 1, \quad \cos \gamma = 0.$$

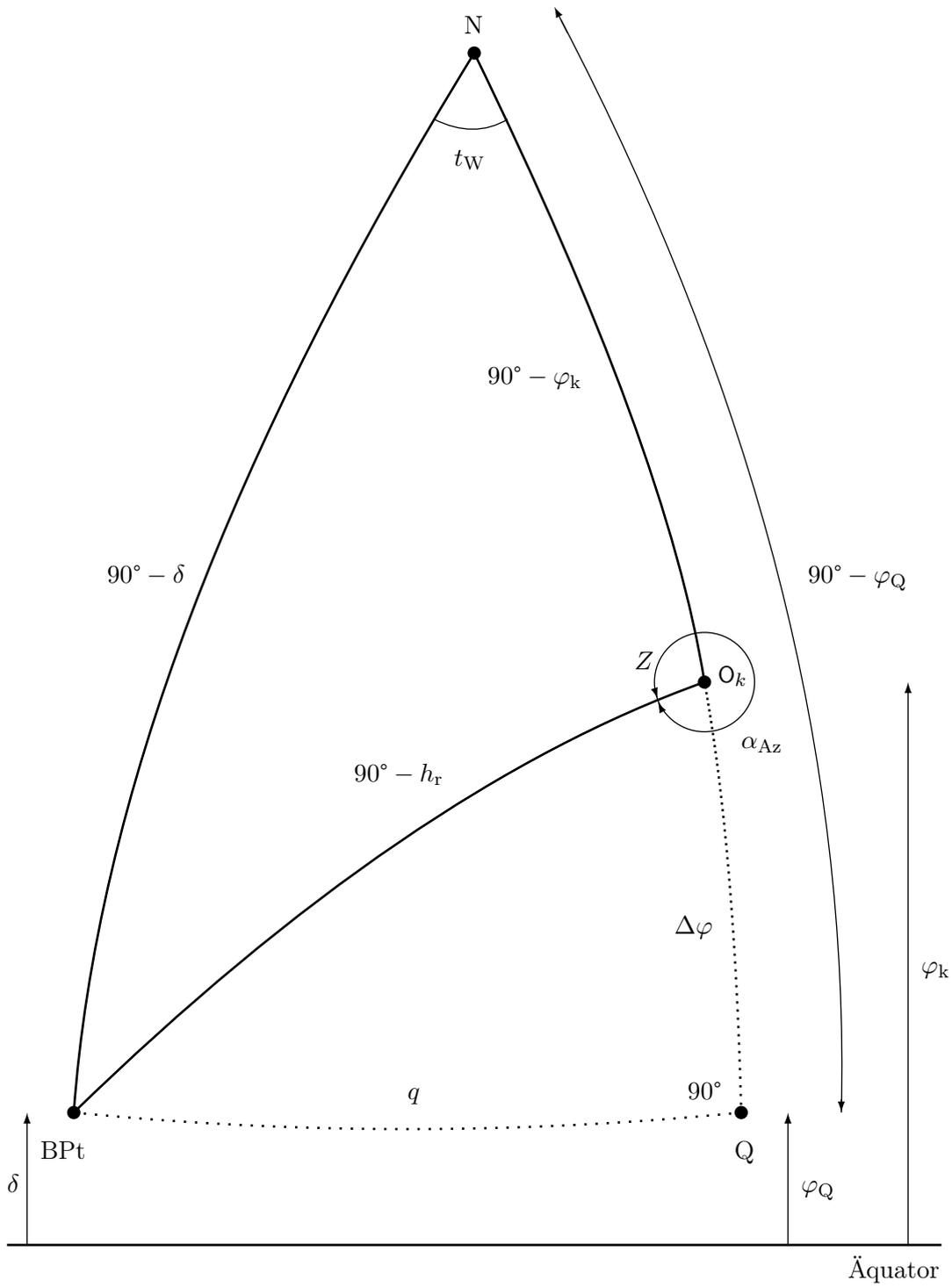
Aus dem Sinussatz wird so

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{1}{\sin c}, \quad (8)$$

aus dem Cosinussatz

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad (9)$$

Das kennengelernte nautisch-astronomische Grunddreieck weist jedoch üblicherweise keinen rechten Winkel auf. AGETON fügt zu diesem Zweck einen zusätzlichen Punkt Q ein, der auf dem Meridian des Koppelorts λ_k liegt. Seine (zunächst unbekannte) Breite φ_Q ist so gewählt, dass der Winkel bei Q einen Wert von 90° einnimmt.



Die Hinzufügung liefert zwei sphärische Dreiecke, die beide einen rechten Winkel aufweisen.

Dreieck Q, BPt, N mit den Seiten q , $(90^\circ - \delta)$, $(90^\circ - \varphi_Q)$ und dem Winkel t_W .

Dreieck Q, BPt, O_k mit den Seiten q , $(90^\circ - h_r)$, $\Delta\varphi$ und dem Winkel $(180^\circ - Z)$

4.2 Agetons Gleichungen

Wir beginnen mit dem Dreieck Q, BPt, N. Um den Sinussatz korrekt anzuschreiben, stellen wir die Größen des allgemeinen Dreiecks auf Seite 7 den Größen des betrachteten gegenüber.

Allgemeines Δ	b	β	c	γ
Δ (Q, BPt, N)	q	t_W	$90^\circ - \delta$	90°

Aus dem vereinfachten Sinussatz, Gleichung 8 auf Seite 9,

$$\sin b = \sin \beta \sin c$$

wird

$$\sin q = \sin t_W \sin (90^\circ - \delta).$$

Mit der Identität aus Gleichung 3 auf Seite 7 erhalten wir

$$\sin q = \sin t_W \cos \delta.$$

Mit der nun bekannten Dreiecksseite q kann im gleichen Dreieck φ_Q bestimmt werden. Hierzu stellen wir gegenüber

Allgemeines Δ	a	b	c	γ
Δ (Q, BPt, N)	$90^\circ - \varphi_Q$	q	$90^\circ - \delta$	90°

Der vereinfachte Cosinussatz, Gleichung 9 auf Seite 9 lautet

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}.$$

oder

$$\cos(90^\circ - \varphi_Q) = \frac{\cos(90^\circ - \delta)}{\cos q}.$$

Mit der Identität aus Gleichung 4 auf Seite 7 erhalten wir

$$\sin \varphi_Q = \frac{\sin \delta}{\cos q}.$$

Mit der nun bekannten Größe φ_Q kann durch einfache Differenzbildung die Dreiecksseite $\Delta\varphi$ bestimmt werden.

$$\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_Q$$

Im Dreieck Q, BPt, O_k sind nun die Seiten q und $\Delta\varphi$ bekannt. Wir stellen darin gegenüber

Allgemeines Δ	a	b	c	γ
$\Delta(Q, \text{BPt}, O_k)$	$\Delta\varphi$	q	$90^\circ - h_r$	90°

und wenden den vereinfachten Cosinussatz an.

$$\cos c = \cos a \cos b$$

oder

$$\cos(90^\circ - h_r) = \cos \Delta\varphi \cos q.$$

Mit der schon bekannten Identität erhalten wir

$$\sin h_r = \cos \Delta\varphi \cos q.$$

Die gesuchte rechnerische Höhe h_r ist nun bekannt. Im gleichen Dreieck kann abschließend die Hilfsgröße Z als Komplementärwinkel zum Azimut α_{Az} bestimmt werden. Wir stellen gegenüber

Allgemeines Δ	b	β	c	γ
$\Delta(Q, \text{BPt}, O_k)$	q	$180^\circ - Z$	$90^\circ - h_r$	90°

und wenden den vereinfachten Sinussatz an.

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

oder

$$\sin(180^\circ - Z) = \frac{\sin q}{\sin(90^\circ - h_r)}$$

Mit den Identitäten 3 und 5 auf Seite 7 erhalten wir abschließend

$$\sin Z = \frac{\sin q}{\cos h_r}.$$

Es ist festzustellen, dass in allen vier Gleichungen lediglich zwei Winkelfunktionen multipliziert oder dividiert werden müssen. Durch die vertafelten Funktionen

$$A(x) = 10^5 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{|\sin x|} \right], \quad B(x) = 10^5 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{|\cos x|} \right]$$

wird Multiplikation (Division) durch Addition (Subtraktion) ersetzt.

Wir fassen zusammen:

$$\sin q = \sin t_W \cos \delta, \quad A(q) = A(t_W) + B(\delta), \quad (10)$$

$$\sin \varphi_Q = \frac{\sin \delta}{\cos q}, \quad A(\varphi_Q) = A(\delta) - B(q), \quad (11)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_Q, \quad (12)$$

$$\sin h_r = \cos \Delta\varphi \cos q, \quad A(h_r) = B(\Delta\varphi) + B(q), \quad (13)$$

$$\sin Z = \frac{\sin q}{\cos h_r}, \quad A(Z) = A(q) - B(h_r). \quad (14)$$

5.1 Gleichung 10

$$A(q) = A(t_{W,E}) + B(\delta)$$

Mit $\delta = +22^\circ 17,6'$ und $t_W = 60^\circ 44,4'$ gilt

Berechnung nach AGETON			
B(δ)	(auch A)		3 374
+A($t_{W,E}$)	(—)	+	5 928
= A(q)	(auch B)	=	9 302

Etwaige südliche Deklinationen werden betragsmäßig (ohne Vorzeichen) behandelt. Der Ausdruck „(auch A)“ weist uns darauf hin, dass im weiteren Verlauf der Berechnung auch $A(|\delta|)$ benötigt wird. Es ist eine gute Idee den Wert hierfür gleich abzulesen und vier Zeilen tiefer einzutragen: $A(|\delta|) = 42\,096$

Östliche und westliche Ortsstundenwinkel werden gleich behandelt. Der Hinweis „(—)“ besagt, dass $t_{W,E}$ nicht andernorts verwendet wird.

= A(q)	(auch B)	=	9 302
q			$53^\circ 49,4'$

Durch Aufsuchen der Zahl 9 302 in einer A-Spalte finden wir den Winkel $q = 53^\circ 49,4'$. Dieser Wert wird nicht weiter benötigt, weil wir durch den Hinweis „(auch B)“ aufgefordert werden, den daneben stehenden Wert $B(q) = 22\,894$ zwei Zeilen tiefer zu notieren. Sollten wir diesen Schritt vergessen, so kann jederzeit mit dem bekannten Wert für q nachgebessert werden. Es erübrigen sich dabei Überlegungen, ob q auch größer als 90° werden kann (ja), weil nur die Tafelwerte $A(q)$ und $B(q)$ verwendet werden.

5.2 Gleichung 11

$$A(\varphi_Q) = A(\delta) - B(q)$$

Die Werte für diese Gleichung stehen schon bereit:

$A(\delta)$		42 096
$-B(q)$	—	22 894
$= A(\varphi_Q)$	(—)	= 19 202
φ_Q	$ t < 90$ same as δ $ t > 90$ contrary	\pm +39°59,4' N S

Mit dem Wert $A(\varphi_Q)$ kann der Winkel $\varphi_Q = 39^\circ 59,4'$ bestimmt werden. Die Breite des Punktes Q kann keine Werte größer 90° annehmen. Jedoch muss mit einer Fallunterscheidung festgestellt werden, ob Q auf der Nord- oder Südhalbkugel liegt. Wenn der halbkreisige Ortsstundenwinkel, egal ob ost- oder westwärts gerichtet kleiner 90° ist, [was hier zutreffend ist](#), sind φ_Q und δ gleichnamig, andernfalls ungleichnamig. Wir markieren N und ergänzen ein + Zeichen, weil eine [nördliche Deklination](#) vorliegt. Läge Q auf der Südhalbkugel würden wir S und – ergänzen².

Die Fallunterscheidung bei $t_{W,E} \geq 90^\circ$ erscheint aus nautischer Sicht zunächst ungewöhnlich. Sie liegt darin begründet, dass bei der Bestimmung von $A(t_{W,E})$ die Information verloren geht, ob $t_{W,E}$ kleiner oder größer als 90° ist.

5.3 Gleichung 12

$$\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_Q$$

φ_k	\pm	+54°10,0' N S
$-\varphi_Q$	$-\pm$	-39°59,4' N S
$= \Delta\varphi$	\pm	+14°10,6'

Die Werte müssen vorzeichenkorrekt miteinander verrechnet werden. Das Ergebnis lautet $\Delta\varphi = +14^\circ 10,6'$.

²Formal ist die Doppelbezeichnung nicht korrekt. Wir verwenden immer nur eine der beiden Information „S“ oder „-“, nie beide zusammen.

5.4 Gleichung 13

$$A(h_r) = B(\Delta\varphi) + B(q)$$

$= \Delta\varphi$		\pm	$+14^\circ 10, 6'$
$B(\Delta\varphi)$	(—)		1343
$+B(q)$	(s.o.)	+	22 894
$= A(h_r)$	(auch B)	=	24 237
h_r			$34^\circ 54, 7'$

Der Hinweis „(s.o.)“ erinnert, dass dieser Wert nicht erneut nachgeschlagen werden muss. Die Summe ergibt $A(h_r) = 24\,237$. Wir werden aufgefordert den Wert $B(h_r)$ weiter unten zu notieren, außerdem wird der Winkel $h_r = 34^\circ 54, 7'$ ermittelt. Rechnerische Höhen h_r können keine Werte oberhalb von 90° annehmen.

5.5 Höhendifferenz Δh

Aus der Sextantbeobachtung liegt nach Beschickung $h_b = 34^\circ 52, 1'$ vor.

h_b			$34^\circ 52, 1'$
$-h_r$		—	$34^\circ 54, 7'$
$\Delta h \geq 0$	hin zum weg vom	BPkt.	\pm $-2, 6'$

5.6 Gleichung 14

$$A(Z) = A(q) - B(h_r)$$

$A(q)$	(s.o.)		9 302
$-B(h_r)$		—	8 616
$= A(Z)$		=	686

5.7 Azimut α_{Az}

Zunächst muss aus $A(Z) = 686$ der Winkel Z bestimmt werden, wobei eine geschachtelte Fallunterscheidung notwendig wird. In Abhängigkeit davon, ob $t_{W,E}$ kleiner oder größer 90° ist und ob $\Delta\varphi$ positiv oder negativ ist, entscheidet sich, ob Z größer oder kleiner 90° ist.

Fallunterscheidung für Z				
$t_{W,E}$	$t_{W,E} < 90$		$t_{W,E} > 90$	
$\Delta\varphi$	-	+	-	+
Z	< 90	> 90	> 90	< 90
Z	oben/unten		100, 2°	

Im vorliegenden Fall mit $t_W = 60^\circ 44, 4' < 90^\circ$ und $\Delta\varphi = +14^\circ 10, 6'$ (positiv) gilt $Z > 90^\circ$. Um Werte größer 90° zu finden, muss in AGETON's Tables der untere Eintrag der Gradzahl und demzufolge die rechte Spalte für die zugehörigen Minuten benutzt werden.

Es ist übrigens nicht nötig, Z und im Weiteren α_{Az} sonderlich genau anzugeben. Bei der Konstruktion der Standlinie können ohnehin Bruchteile eines Grads kaum berücksichtigt werden. Bruchteile unterhalb von $30'$ werden abgerundet, ab $30'$ ist aufzurunden. Hier wird nur aus Gründen der Vergleichbarkeit mit anderen Rechenwegen die Größe Z mit einer Stelle nach dem Komma angegeben.

Eine abschließende Fallunterscheidung ermittelt aus der halbkreisigen Größe Z den vollkreisigen Azimut.

wenn t_W , $\alpha_{Az} = 360^\circ - Z$	
360°	360,0°
-Z	- 100, 2°
Azimut α_{Az}	259, 8°
wenn t_E , $\alpha_{Az} = Z$	

Zusammenfassung

Berechnung nach AGETON		
$B(\delta)$	(auch A)	3 374
$+A(t_{W,E})$	(—) +	5 928
$= A(q)$	(auch B) =	9 302
q		$53^{\circ}49,4'$
$A(\delta)$		42 096
$-B(q)$	—	22 894
$= A(\varphi_Q)$	(—) =	19 202
φ_Q	$ t < 90$ same as δ $ t > 90$ contrary	$\pm +39^{\circ}59,4' \begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$
φ_k		$\pm +54^{\circ}10,0' \begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$
$-\varphi_Q$		$-\pm -39^{\circ}59,4' \begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$
$= \Delta\varphi$		$\pm +14^{\circ}10,6'$
$B(\Delta\varphi)$	(—)	1343
$+B(q)$	(s.o.) +	22 894
$= A(h_r)$	(auch B) =	24 237
h_r		$34^{\circ}54,7'$
h_b		$34^{\circ}52,1'$
$-h_r$	—	$34^{\circ}54,7'$
$\Delta h \geq 0$	hin zum BPkt. weg vom	$\pm -2,6'$

$A(q)$	(s.o.)				9 302
$-B(h_r)$				-	8 616
$= A(Z)$				=	686
Fallunterscheidung für Z					
$t_{W,E}$	$t_{W,E} < 90$		$t_{W,E} > 90$		
$\Delta\varphi$	-	+	-	+	
Z	< 90	> 90	> 90	< 90	
Z	oben/unten		100, 2°		
wenn $t_W, \alpha_{Az} = 360^\circ - Z$					
360°			360,0°		
$-Z$			-	100, 2°	
Azimut	α_{Az}		259, 8°		
wenn $t_E, \alpha_{Az} = Z$					

6 Grenzen des Verfahrens

Es ist festzustellen, dass die Größen $A(0^\circ)$, $A(180^\circ)$ und $B(90^\circ)$ nicht definiert sind. Zudem ist festzustellen, dass im Nahbereich der Grenzen $0^\circ/180^\circ$ bzw. 90° sich die Werte $B(x)$ bzw. $A(x)$ nur wenig ändern und daher scheinbar zu großen Ungenauigkeiten führen. Tatsächlich ändern sich die Funktionswerte des Cosinus in der Nähe von 0° und die des Sinus in der Nähe von 90° kaum vom Wert 1. Durch Kehrwertbildung und Logarithmierung wird daraus der Wert 0, der sich nun seinerseits im Nahbereich kaum ändert. Trotzdem sei abschließend untersucht, inwieweit Eingangsgrößen in der Nähe dieser Grenzwerte die Rechenergebnisse verfälschen.

Gegenübergestellt werden im Folgenden Ergebnisse aus Berechnungen nach AGENTON den Ergebnissen gemäß der Gleichungen 6 und 7 auf Seite 9 (Taschenrechnerlösung).

Problemfall $\delta = 0^\circ$

Annahme:

$$\delta = 0^\circ; \quad t_W = 45^\circ; \quad \varphi_k = +54^\circ.$$

	h_r	Z	α_{Az}
Gleichungen 6 und 7	$24^\circ 33,5'$	$129,0^\circ$	$231,0^\circ$
AGETON	—	—	—

Zum exakten Zeitpunkt der Tag- und Nachtgleiche im März und September versagt das Verfahren nach AGETON. Bereits eine Stunde vor oder nach der Tag- und Nachtgleiche beträgt die Deklination $\pm 1'$

Veränderte Annahme:

$$\delta = +0^\circ 01,0'; \quad t_W = 60^\circ; \quad \varphi_k = +54^\circ.$$

	h_r	Z	α_{Az}
Gleichungen 6 und 7	$17^\circ 06,3'$	$115,0^\circ$	$245,0^\circ$
AGETON	$17^\circ 06,3'$	$115,0^\circ$	$245,0^\circ$

Problemfall $t_{W,E} = 0^\circ$

Annahme:

$$\delta = +22^\circ; \quad t_W = 0^\circ; \quad \varphi_k = +54^\circ.$$

	h_r	Z	α_{Az}
Gleichungen 6 und 7	$58^\circ 00,0'$	$180,0^\circ$	$180,0^\circ$
AGETON	—	—	—

Zum exakten Zeitpunkt des Ortsmittags versagt das Verfahren nach AGETON. Sollte zufällig dieser Zeitpunkt getroffen werden, so ist das Verfahren der Mittagsbreite ohnehin viel einfacher anzuwenden. Bereits vier Sekunden vor oder nach Ortsmittag beträgt der Ortsstundenwinkel $\pm 1'$

Veränderte Annahme:

$$\delta = +22^\circ; \quad t_W = 0^\circ 01,0'; \quad \varphi_k = +54^\circ.$$

	h_r	Z	α_{Az}
Gleichungen 6 und 7	$58^\circ 00,0'$	$180,0^\circ$	$180,0^\circ$
AGETON	$58^\circ 00,0'$	$180,0^\circ$	$180,0^\circ$

Weitere Überlegungen

Beobachtete Höhen sowohl im Bereich um 0° als auch um 90° sind messtechnisch wenig sinnvoll. Daher sind rechnerische Höhen in ähnlicher Größenordnung nicht zu erwarten.

Bei der (hier nicht erläuterten) Beobachtung von Fixsternen tritt in einem Fall eine Deklination auf, die zu einem fehlerhaften Ergebnis führt. Polaris ist mit $\delta \approx 89^\circ$ N für das Verfahren nach AGETON ungeeignet. Kochab ist mit der zweitgrößten Deklination der 80 im Nautischen Jahrbuch tabellierten Fixsterne von $\delta \approx 74^\circ$ N schon wieder tauglich.

Ortsstundenwinkel von 180° sind zwar denkbar, jedoch ist ein Gestirn üblicherweise unter diesen Umständen nicht sichtbar³.

Eine Konstellation, die zu einer gewissen Unschärfe führt, ist zu finden, wenn der Fall $Z = 90^\circ$ eintritt. Es fallen dann die Punkte Q und O_k zusammen. In Folge dessen gilt $\Delta\varphi = 0$ und $q = 90^\circ - h_r$. Dieser singuläre Fall wird korrekt abgebildet. Wenn Z sich nur wenig von 90° unterscheidet, ist eine Unschärfe von wenigen Zehntelgraden beim Azimut festzustellen. Beispielrechnungen lassen nicht vermuten, dass Ergebnisse zu ungenau werden, zumal die Größe h_r von der Unschärfe nicht betroffen ist.

Kombinationen von ungünstigen Konstellationen sollten noch untersucht werden.

³Ausnahmen: Zirkumpolare Fixsterne können trotz $t_{W,E} = 180^\circ$ sichtbar sein. Bei Koppelorten jenseits der Polarkreise können auch Sonne, Mond und Planeten trotz $t_{W,E} = 180^\circ$ im Einzelfall sichtbar sein. In diesen Fällen dürfte der Kimmabstand jedoch so gering ausfallen, dass von einer Messung ohnehin abgesehen würde

Literatur

- [BERKING, HUTH] Bernhard Berking, Werner Huth (Hrsg.): *Handbuch Nautik*. 2. Aufl. Hamburg: Seehafen, 2016.
- [BOWDITCH] Nathaniel Bowditch: *The American Practical Navigator*. Bethesda, Maryland: National Imagery and Mapping Agency, 2002.
- [DE MAN] Erik De Man: *Tables for performing Sight Reduction according to A. A. Ageton*. <http://www.siranah.de>, aufgerufen 01/2016.
- [FULST] Otto Steppes, Gerhard Zwiebeler, Walter Stern: *FULST Nautische Tafeln*. Bremen: Arthur Geist, 23. Aufl. 1963.
- [MESTEMACHER] Frank Mestemacher: *Astronomische Navigation ... nicht nur zum Ankommen*. Hamburg: Kreuzer Yachtclub Deutschland e.V. (Hrsg.), 2. erw. Ausgabe 2013.
- [NORIE'S] George Blance (Editor): *Norie's Nautical Tables*. St Ives, Cambridgeshire: Imray, Laurie, Norie & Wilson, 2007.
- [UMLAND] Henning Umland: *Sight Reduction Tables*. <http://www.celnav.de>, aufgerufen 01/2016.
- [VENANW] Joachim Venghaus: *Anwendung von AGETON's Tables in der Astronomischen Navigation*. <http://www.venghaus.eu>, aufgerufen 01/2017.
- [VENAGT] Joachim Venghaus: *AGETON's Tables für die Astronomischen Navigation*. <http://www.venghaus.eu>, aufgerufen 01/2017.
- [VENASTRO] Joachim Venghaus: *Anleitung Astronomische Navigation*. <http://www.venghaus.eu>, aufgerufen 01/2017.
- [VENGEZ] Joachim Venghaus: *Anleitung Gezeitenrechnung*. <http://www.venghaus.eu>, aufgerufen 01/2017.
- [VENTERR] Joachim Venghaus: *Anleitung Terrestrische Navigation*. <http://www.venghaus.eu>, aufgerufen 01/2017.

Höhenstandlinie der Sonne mit AGETON's Tables und NJ					
Datum ___ . ___ . 20__	☉	Ah=___ m	$\varphi_k = \text{---}^\circ \text{---}' \text{---}'' \begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$	$\lambda_k = \text{---}^\circ \text{---}' \text{---}'' \begin{matrix} E \\ W \end{matrix}$	
Zeitpunkt der Beobachtung in UT1			Berechnung nach AGETON		
Chronometer Stop UT1		___ . ___ . ___	B(δ) (auch A)	___ . ___ . ___	
Stoppuhr	-	___ . ___	+A($t_{W,E}$) (-)	+ ___ . ___ . ___	
unber. Zeitpunkt UT1		___ . ___ . ___	= A(q) (auch B)	= ___ . ___ . ___	
Chr. Stand Std	\pm	___ . ___	q	___ . ___ . ___	
Zeitpunkt d. Beob. UT1		___ . ___ . ___	A(δ)	___ . ___ . ___	
Beobachtete Höhe h_b			- B(q)	- ___ . ___ . ___	
Sextantablesung		___ . ___ . ___	= A(φ_Q) (-)	= ___ . ___ . ___	
Indexbeschiekung Ib	\pm	___ . ___ . ___	φ_Q <small>$t < 90$ same as δ $t > 90$ contrary</small>	\pm ___ . ___ . ___ $\begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$	
Kimmabstand KA		___ . ___ . ___	φ_k	\pm ___ . ___ . ___ $\begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$	
Gesamtbeschiekung Gb	\pm	___ . ___ . ___	- φ_Q	- \pm ___ . ___ . ___ $\begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$	
Zusatzbeschiekung ☉ Zb	\pm	___ . ___ . ___	= $\Delta\varphi$	\pm ___ . ___ . ___	
beobachtete Höhe h_b		___ . ___ . ___	B($\Delta\varphi$) (-)	___ . ___ . ___	
Stundenwinkel t_{Gr}, t, t_W, t_E			+B(q) (s.o.)	+ ___ . ___ . ___	
t_{Gr} aus NJ für ___ h		___ . ___ . ___	= A(h_r) (auch B)	= ___ . ___ . ___	
Zw für ___ m ___ s	+	___ . ___ . ___	h_r	___ . ___ . ___	
Zw für ___ s	+	___ . ___ . ___	h_b	___ . ___ . ___	
t_{Gr}		___ . ___ . ___	- h_r	- ___ . ___ . ___	
geg. Länge λ_k ($\lambda_E + / \lambda_W -$)	\pm	___ . ___ . ___	$\Delta h \geq 0$ <small>hin zum weg vom</small> BPkt.	\pm ___ . ___ . ___	
Ortsstundenwinkel t		___ . ___ . ___	A(q) (s.o.)	___ . ___ . ___	
wenn $t \in [180^\circ, 360^\circ]$		$t_E = 360 - t$	- B(h_r)	- ___ . ___ . ___	
360°		360°00,0'	= A(Z)	= ___ . ___ . ___	
- t		___ . ___ . ___	Fallunterscheidung für Z		
t_E oder t_W	t_{--}	___ . ___ . ___	$t_{W,E}$	$t_{W,E} < 90$	$t_{W,E} > 90$
wenn $t \in [0^\circ, 180^\circ]$		$t_W = t$	$\Delta\varphi$	-	+
Deklination δ			Z	< 90	> 90
δ aus NJ für ___ h		___ . ___ . ___ $\begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$	oben/unten		
Unt \pm ___ . ___	Vb	\pm ___ . ___ . ___	wenn $t_W, \alpha_{Az} = 360^\circ - Z$		
Deklination δ	$\begin{matrix} N \\ S \end{matrix}$	\pm ___ . ___ . ___	360°	360,0°	
			- Z	- ___ . ___ . ___	
			Azimet α_{Az}	___ . ___ . ___	
			wenn $t_E, \alpha_{Az} = Z$		